ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Praha, 2011 Bc. Petr BUBLA

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ

KATEDRA ŘÍDICÍ TECHNIKY

Studijní program: 10225904 - Elektrotechnika a informatika

Studijní obor: 2612T029 – Kybernetika a měření (magisterský)

Regulace laboratorního modelu vodáren jako vícerozměrového systému

Control of MIMO laboratory model coupled tanks

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Autor: Bc. Petr BUBLA

Vedoucí DP: Ing. Petr Hušek, Ph.D.

V Praze, dne 04. ledna 2011

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Katedra řídicí techniky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Petr Bubla**

Studijní program: Elektrotechnika a informatika (magisterský), strukturovaný
Obor: Kybernetika a měření, blok KM1 - Řídicí technika

Název tématu: **Regulace laboratorního modelu vodáren jako vícerozměrného systému**

Pokyny pro vypracování:

1. Identifikujte systém spojených nádrží nacházející se v laboratoři automatického řízení jako nelineární systém s dvěma vstupy a dvěma výstupy.
2. Linearizujte získaný model ve vhodně zvoleném pracovním bodě.
3. Pro linearizovaný model navrhněte a na reálném systému odzkoušejte základní typy regulace - PID regulátor a LQ regulátor.
4. Pro tentýž model navrhněte a na reálném systému odzkoušejte pokročilé metody řízení - řízení s rozvazbovacím regulátorem, H_inf regulaci, případně metody založené na tvarování otevřené smyčky.

Seznam odborné literatury:

[1] G.F. Franklin, J.D. Powell, A. Emami-Naeini: Feedback Control of Dynamic Systems. Prentice Hall, 2006
[2] S. Skogestad, I. Postlethwaite: Multivariable Feedback Control - Analysis and design. J. Wiley & Sons, 2005
[3] J. Zakucia: Řízení čtyřválcové vodárny. Diplomová práce, katedra řídicí techniky, FEL ČVUT v Praze, 2009

Vedoucí: Ing. Petr Hušek, Ph.D.

Platnost zadání: do konce letního semestru 2010/2011

prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry

L.S.

doc. Ing. Boris Šimák, CSc.
děkan

V Praze dne 2. 12. 2009

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracoval samostatně a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce. Veškeré podklady (literární zdroje, internetové stránky a software), které jsem v diplomové práci využil, jsou uvedené v přiloženém seznamu.

Souhlasím s použitím této diplomové práce jako školního díla ve smyslu §60 zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze, dne _____ _____

podpis autora

Poděkování

Na tomto místě si dovoluji poděkovat všem, kdo mi pomáhali při tvorbě této diplomové práce, ať už přímo nebo nepřímo. Zvláště pak děkuji Ing. Petru Huškovi, Ph.D. za odborné vedení diplomové práce, vstřícný přístup a podnětné konzultace.

Velice také děkuji svým rodičům, prarodičům, sourozencům, přítelkyni a mým kamarádům za podporu a inspiraci nejen během vzniku této diplomové práce, ale i během celého dosavadního studia.

Název

Regulace laboratorního modelu vodáren jako vícerozměrného systému

Abstrakt

Model spojených nádrží představuje systém řízení výšek hladin. Je osazen průmyslovými akčními členy a senzory. Diplomová práce se zabývá matematickým odvozením modelu, identifikací reálného systému spojených nádob jako MIMO systému a návrhem regulátorů pro řízení výšek hladin v obou nádržích. K identifikaci jsme použili dvě různé metody, experimentální získání konstant a sofistikovanější metodu, která se nazývá Subspace metoda identifikace.

Pro získaný matematický lineární model je provedena důkladná analýza systému, aby se předešlo případným problémům během návrhu regulátorů. Dalším cílem práce je návrh několika typů regulátorů. Nejprve je navrženo základní řízení pomocí decentralizovaného PIDf regulátoru. Ve snaze docílit lepší kvality regulace jsou v další části této práce použity pokročilé algoritmy řízení z oblasti moderní teorie řízení jako je LQG regulátor a postmoderní teorie řízení pomocí $\mathcal{H}_\infty$ optimalizace.

Klíčová slova:

Nelineární model, identifikace, 4SID, linearizace, analýza vlastností, interakce, decentralizované PIDf, LQG regulátor, eliminace interakcí, $\mathcal{H}_\infty$ optimalizace, robustní Loop-Shaping

Tittle

Control of MIMO laboratory model coupled tanks

Abstract

The model of Coupled Tanks comprises controling the level of liquid in the tanks. It is equipped with industrial sensors and actuators. This master thesis deals with mathematical derivation of the model and identification of the real system of coupled tanks such as MIMO system and controller designed for control of liquid level in both tanks. There are chosen two different methods for identification of the real system, experimental obtain the parameters of the state model, and a more sophisticated method called subspace identification methods.

For the obtain linear mathematical model there is a throughly made analysis of the system to avoid any problems during the design of the controllers. The main goal of this master thesis is to design several types of controllers. At first there is a decentralized PIDf controller designed. In the effort to achieve a better quality of the regulation there are used in the next part of this master thesis advanced control algorithms from the section of the modern control engineering such as LQG and the postmodern theory of control engineering such as $\mathcal{H}_\infty$ optimization.

Key words:
Nonlinear model, identification, 4SID, linearization, analysis of the properties, interaction, decentralized control PIDf, LQG controller, eliminating interaction, $\mathcal{H}_\infty$ optimization, robust Loop-Shaping

Obsah

Obsah ……... **vii**

Seznam obrázků ……... **ix**

Seznam použitých zkratek …… **xiii**

Seznam použitých symbolů …… **xv**

1 Úvod ……... **1**

2 Popis modelu vodárny ……... **5**

2.1 Popis modelu vodárny ……... 6

2.2 Akční členy a senzory …… 6

2.2.1 Snímače výšky hladiny ……..... 7

2.2.2 Čerpadlo ……..... 7

2.2.3 Ventily …… 8

2.3 Komunikace se systémem v Simulinku …….…… 9

2.4 Problémy při měření na modelu ……. 10

3 Matematický popis systému …..…….. **13**

3.1 Nelineární matematický model ……. 13

3.1.1 Odvození přítoku pro první nádrž …….. 15

3.1.2 Odvození výtoku z první nádrže …….. 17

3.1.3 Odvození výtoku z druhé nádrže …….. 18

3.1.4 Diferenciální rovnice pro systém spojených nádob …….. 19

3.2 Experimentální určení konstant modelu …… 20

3.3 Lineární model …….. 26

3.4 Odhad stavových matic …… 30

3.4.1 Formulace problému …….. 30

3.4.2 Naměřená data ……... 37

4 Analýza systému ……..... 41

4.1 Stabilita systému ...……. 41

4.2 Řiditelnost a pozorovatelnost ……. 41

4.3 Nuly a póly systému …… 42

4.4 Interakce a RGA faktor …… 42

4.6 Funkční řiditelnost systému ……... 45

5 Návrh regulátorů pro řízení výšek hladin systému spojených nádob …….. 49

5.1 Decentralizovaný PIDf regulátor ……. 50

5.2 LQG regulátor …….. 53

5.2.1 Diskretizace linearizovaného systému ……. 54

5.2.2 Kalmanův filtr …… 55

5.2.3 LQ regulátor …… 59

5.3 Návrh regulátorů s eliminací interakcí ……. 65

5.3.1 Návrh dynamického rozvazbovacího regulátoru …… 66

5.3.2 Návrh stavového rozvazbovacího regulátoru ……. 69

5.4 Robustní metody návrhy regulátoru ……. 72

5.4.1 Analýza robustnosti …….. 76

5.4.2 Metoda minimalizace $\mathcal{H}_\infty$ normy smíšené citlivostní funkce ……. 81

5.4.3 Metoda robustního tvarování frekvenční charakteristiky minimalizací $\mathcal{H}_\infty$ normy (Loop-Shaping $\mathcal{H}_\infty$) ……..... 84

6 Závěr ……. 91

Literatura …… 95

Příloha A Obsah přiloženého CD …….. I

Seznam obrázků

OBRÁZEK 1.1	Model dvouválcové vodárny v laboratoři K23	2
OBRÁZEK 2.1	Rozmístění akčních členů a senzorů, zadní pohled	7
OBRÁZEK 2.2	Rozmístění akčních členů a senzorů, přední pohled	8
OBRÁZEK 2.3	Šablona pro ovládání modelu ze Simulinku	9
OBRÁZEK 2.4	Vzrůstající výkon čerpadla s časem	10
OBRÁZEK 2.5	Opakovatelnost měření	11
OBRÁZEK 3.1	Schématický model vodárny	16
OBRÁZEK 3.2	Závislost hladiny h_1 v levé nádrži na vstupním řídicím signálu čerpadla a její aproximace polynomem druhého řádu	21
OBRÁZEK 3.3	Výtokové charakteristiky nádrže V1 a V2	23
OBRÁZEK 3.4	Porovnání přechodové charakteristiky $u_1 \rightarrow h_1$ nelineárního modelu a reálného systému při uzavřeném ventilu V_p	23
OBRÁZEK 3.5	Statická charakteristika druhé nádrže $u_2 \rightarrow$ hladina h_2	24
OBRÁZEK 3.6	Porovnání přechodové charakteristiky $u_2 \rightarrow h_2$ nelineárního modelu a reálného systému	24
OBRÁZEK 3.7	Převodní charakteristika snímače hladiny h_1	25
OBRÁZEK 3.8	Převodní charakteristika snímače hladiny h_2	26
OBRÁZEK 3.9	Průběh odezvy hladiny v první nádrži na 10% skokovou změnu vstupu $u_{1,2}$ z pracovního bodu	28
OBRÁZEK 3.10	Průběh odezvy hladiny ve druhé nádrži na 10% skokovou změnu vstupu $u_{1,2}$ z pracovního bodu	29
OBRÁZEK 3.11	Průběh odezvy hladiny v první nádrži na 10% skokovou změnu	

	vstupu $u_{1,2}$ z pracovního bodu, interakce mezi kanály	29
OBRÁZEK 3.12	Průběh odezvy hladiny ve druhé nádrži na 10% skokovou změnu vstupu $u_{1,2}$ z pracovního bodu, interakce mezi kanály	30
OBRÁZEK 3.13	Odhad řádu modelu n metodou 4SID	36
OBRÁZEK 3.14	Porovnání odezev na vstupní signál reálného systému a identifikovaného systému algoritmem 4SID	38
OBRÁZEK 3.15	Chyba odhadu výšek hladin mezi reálným systémem a lineárním modelem získaným pomocí 4SID	38
OBRÁZEK 3.16	Průběh odezvy hladiny v první nádrži na 10% skokovou změnu vstupu $u_{1,2}$ z pracovního bodu, porovnání s algoritmem 4SID	39
OBRÁZEK 3.17	Průběh odezvy hladiny ve druhé nádrži na 10% skokovou změnu vstupu $u_{1,2}$ z pracovního bodu, porovnání s algoritmem 4SID	39
OBRÁZEK 4.1	RGA v závislosti na frekvenci	44
OBRÁZEK 4.2	Zvolené párování systému pro návrh decentralizovaného řízení	44
OBRÁZEK 4.3	Směry u MIMO systému v závislosti na zesílení	45
OBRÁZEK 4.4	Závislost zesílení na směru vstupu při jednotkové velikosti vstupu	46
OBRÁZEK 5.1	Průběh poruchového signálu při regulaci systému spojených nádrží	49
OBRÁZEK 5.2	Schématické znázornění decentralizovaného řízení MIMO systému	50
OBRÁZEK 5.3	Regulace výšky hladin s PIDf regulátorem, při působící poruše - Odezva	52
OBRÁZEK 5.4	Regulace výšky hladin s PIDf regulátorem, při působící poruše - Akční zásahy	52
OBRÁZEK 5.5	Regulace výšky hladin s PIDf regulátorem, interakce mezi kanály – Odezva	53
OBRÁZEK 5.6	Regulace výšky hladin s PIDf regulátorem, interakce mezi kanály – Akční zásahy	54
OBRÁZEK 5.7	Průběh Kalmanova zesílení $L(k)$	57
OBRÁZEK 5.8	Zapojení KF pro linearizovaný systém s LQR regulátorem	58
OBRÁZEK 5.9	Zobrazení hodnot normalizované autokorelace, hladina h_1	59
OBRÁZEK 5.10	LQ regulátor + asymptotické sledování konstantní reference	62
OBRÁZEK 5.11	Průběh Kalmanova zesílení $K(k)$	63

OBRÁZEK 5.12 Regulace výšky hladin pomocí LQG regulátoru, při působící poruše, interakce mezi kanály, bez zapojeného BF - Odezva 63
OBRÁZEK 5.13 Regulace výšky hladin pomocí LQG regulátoru, při působící poruše, interakce mezi kanály, bez zapojeného BF – Akční zásahy 64
OBRÁZEK 5.14 Statistické parametry navrženého KF, BF nezapojen 65
OBRÁZEK 5.15 Porovnání filtračních vlastností navržených filtrů 65
OBRÁZEK 5.16 Schématické znázornění dynamického rozvazbovacího regulátoru 66
OBRÁZEK 5.17 Blokové schéma dynamického rozvazbovacího regulátoru pro systém spojených nádob 67
OBRÁZEK 5.18 Regulace výšky hladin pomocí dynamického rozvazbovacího regulátoru, při působící poruše, interakce mezi kanály – Odezva 68
OBRÁZEK 5.19 Regulace výšky hladin pomocí dynamického rozvazbovacího regulátoru, při působící poruše, interakce mezi kanály – Akční zásahy 68
OBRÁZEK 5.20 Detail interakcí mezi kanály při řízení výšky hladiny v první nádrži dynamickým rozvazbovacím regulátorem $ref_{h_2}\left(t=600s\right)\,|\,0{,}148\rightarrow 0{,}111\left[m\right]$ 69
OBRÁZEK 5.21 Blokové schéma stavového rozvazbovacího regulátoru pro systém spojených nádob 70
OBRÁZEK 5.22 Průběh Kalmanova zesílení $K\left(k\right)$ 71
OBRÁZEK 5.23 Regulace výšky hladin pomocí stavového rozvazbovacího regulátoru, při působící poruše, interakce mezi kanály - Odezva 71
OBRÁZEK 5.24 Regulace výšky hladin pomocí stavového rozvazbovacího regulátoru, při působící poruše, interakce mezi kanály – Akční zásahy 71
OBRÁZEK 5.25 Multiplikativní model neurčitosti 73
OBRÁZEK 5.26 Asymptotický průběh horní meze $1/\left|W_P\left(j\omega\right)\right|$ 77
OBRÁZEK 5.27 $\mathcal{H}_\infty$ optimální stabilizace, váhovací filtry 77
OBRÁZEK 5.28 Grafická interpretace robustní stability – multiplikativní model neurčitosti 78
OBRÁZEK 5.29 Grafická interpretace robustní kvality řízení – multiplikativní model neurčitosti 79
OBRÁZEK 5.30 Zobecněný systém 80
OBRÁZEK 5.31 Schématické znázornění minimalizace smíšené citlivostní funkce

	ve standardní formě pro sledování	82
OBRÁZEK 5.32	Meze na kvalitu řízení a robustnost	82
OBRÁZEK 5.33	Robustní stabilita – minimalizace $\mathcal{H}_\infty$ normz smíšené citlivostní funkce	83
OBRÁZEK 5.34	Robustní kvalita řízení - minimalizace $\mathcal{H}_\infty$ normy smíšené citlivostní funkce	83
OBRÁZEK 5.35	Regulace výšky hladin pomocí minimalizace $\mathcal{H}_\infty$ normy smíšené citlivostní funkce, při působící poruše – Odezva	83
OBRÁZEK 5.36	Regulace výšky hladin pomocí minimalizace $\mathcal{H}_\infty$ normy smíšené citlivostní funkce, při působící poruše – Akční zásahy	84
OBRÁZEK 5.37	Problém $\mathcal{H}_\infty$ optimální stabilizace	85
OBRÁZEK 5.38	Tvarovaná soustava a regulátor	86
OBRÁZEK 5.39	Frekvenční charakteristika otevřené smyčky soustavy s $\mathcal{H}_\infty$ optimálním regulátorem	87
OBRÁZEK 5.40	Robustní stabilita - $\mathcal{H}_\infty$ Loop-Shaping	87
OBRÁZEK 5.41	Robustní kvalita řízení - $\mathcal{H}_\infty$ Loop-Shaping	88
OBRÁZEK 5.42	Regulace výšky hladin pomocí $\mathcal{H}_\infty$ Loop-Shaping regulátoru, při působící poruše – Odezva	88
OBRÁZEK 5.43	Regulace výšky hladin pomocí $\mathcal{H}_\infty$ Loop-Shaping regulátoru, při působící poruše – Akční zásahy	89

Seznam použitých zkratek

ZKRATKA	VYSVĚTLIVKA
4SID	metoda identifikace stavového prostoru systému (Subspace State Space System Identification)
BF	Buttherworthův Filtr 2. řádu typu dolní propust
BIBO	systém s omezeným vstupem, který produkuje omezený výstup (Bounded Input Bounded Output)
CL	uzavřená smyčka regulačního obvodu (Closed Loop)
FIT	fitování dat danou funkcí
KF	Kalmanův Filtr
LQG	lineární kvadratický optimální regulátor s předpokládaným Gaussovsky rozloženým šumem (Linear Quadratic Gaussian control)
LQR	lineární kvadratický optimální regulátor (Linear Quadratic Regulator)
MIMO	systém s více vstupy a výstupy (Multiple Input Multiple Output)
NP	nominální kvalita řízení (Nominal Performance)
NS	nominální stabilita (Nominal Stability)
OL	otevřená smyčka regulačního obvodu (Open Loop)
PIDf	Proporcionální-Integrační-Derivační regulátor s filtrací D složky
prinuhl	principiální úhly u algoritmu 4SID
RGA	matice relativních zesílení (Relative Gain Array)
RP	robustní kvalita řízení (Robust Performance)
RS	robustní stabilita (Robust Stability)
RT	Real – Time
SGT	věta o malém zesílení (Small Gain Theorem)
SISO	systém s jedním vstupem a jedním výstupem (Single Input Single Output)

ZKRATKA	VYSVĚTLIVKA
SSV	strukturované singulární číslo (Structure Singular Value)
SVD	singulární rozklad matice (Singular Value Decomposition)

Seznam použitých symbolů

SYMBOL	VYSVĚTLIVKA	JEDNOTKA
(A, B, C, D)	matice stavového popisu MIMO systému, spojité	
(M, N, C, D)	matice stavového popisu MIMO systému, diskretizované	
$\mathcal{C}$	matice řiditelnosti	
$C(s)$	diagonální matice regulátorů	
$C_1(s)$	regulátor pro dvojici $u_1 \to y_1$	
$C_2(s)$	regulátor pro dvojici $u_2 \to y_2$	
$D(s)$	diagonální matice přenosových funkcí	
$\mathcal{D}_{k-1}$	dostupná data měření	
$d(s)$	nejmenší společný násobek matice $G(s)$	
$e_{h1,2}$	chyba odhadu výšky hladin	$[m]$
$e(k)$	šum měření	
$G(0)$	konstantní matice MIMO systému, $s = 0$	
$G(s)$	matice přenosových funkcí	
$G_0(s)$	nominální model	
$G_p(s)$	perturbovaný model	
$G_s(s)$	tvarovaná soustava (Loop-Shaping)	
g	tíhové zrychlení	$\left[m.s^{-2}\right]$

SYMBOL	VYSVĚTLIVKA	JEDNOTKA
$g_{11}(s), g_{12}(s)$ $g_{21}(s), g_{22}(s)$	členy matice $G(s)$	
$\mathcal{H}_\infty$	norma systému	
H_i	Toeplitzova matice impulsní odezvy systému	
h_1	výška hladiny v první nádrži $V1$, přepočtená	$[m]$
h_2	výška hladiny ve druhé nádrži $V2$, přepočtená	$[m]$
h_{off}	výška sloupce vody ode dna nádrže k přepouštěcímu ventilu	$[m]$
J	kvadratické kritérium optimality	
$K(k)$	Kalmanovo zesílení u LQ regulátoru	
$K(s)$	vazební činitel (rozvazbovací regulátor) matice přenosových funkcí robustního regulátoru	
K_{roz}	zesílení stavového rozvazbovacího regulátoru	
$k_{1,2}$, $k_č$	koeficienty čerpadla	$[-]$
k_{h1}	koeficient přepočítávající bezrozměrnou výšku hladiny odečtenou pomocí senzoru $S1$ na metry	$[m]$
k_{h2}	koeficient přepočítávající bezrozměrnou výšku hladiny odečtenou pomocí senzoru $S2$ na metry	$[m]$
k_p	koeficient přepouštěcího ventilu V_p	$[-]$
k_p, T_i, T_d, N	Parametry PIDf regulátoru	$[-, s, s, -]$
k_v	koeficient vypouštěcího ventilu V_v	$[-]$
k_{zi}	ztrátové činitelé	$[-]$
$L(k)$	Kalmanovo zesílení KF	
l	počet výstupů MIMO systému	
m	počet vstupů MIMO systému	
N	délka optimalizace	
$N(s)$	matice zobecněného systému	
n	počet stavů MIMO systému	

SYMBOL	VYSVĚTLIVKA	JEDNOTKA
$\mathcal{O}$	matice pozorovatelnosti	
o_{h1}	offset snímače $S1$	$[m]$
o_{h2}	offset snímače $S2$	$[m]$
$P_x(k\|k-1)$	Kovarianční matice chyby odhadu	
$p_G(s)$	pólový polynom matice $G(s)$	
p	počet výstupů MIMO systému	
p_0	atmosférický tlak	$[Pa]$
p_c	tlak dodávaný čerpadlem	$[Pa]$
Q, R	kovarianční matice KF, rozlišeno indexem KF váhové matice LQR	
Q_e	váhová matice regulačních odchylek	
Q_{se}	váhová matice součtu regulačních odchylek	
q_i	objemový přítok dodávaný do nádrže $V1$ čerpadlem	$\left[m^3.s^{-1}\right]$
q_o	objemový odtok z nádrže $V2$	$\left[m^3.s^{-1}\right]$
$R(s)$	rozvazbovací prekompenzátor	
$S1$	senzor umístěný na dně nádrže $V1$	
$S2$	senzor umístěný na dně nádrže $V2$	
S_1	průřez nádrže $V1$	$\left[m^2\right]$
S_{12}	průřez potrubí za ventilem V_p	$\left[m^2\right]$
S_2	průřez nádrže $V2$	$\left[m^2\right]$
S_{2o}	průřez výtokového potrubí	$\left[m^2\right]$
S_{i1}	průřez potrubí mezi čerpadlem a nádrží $V1$	$\left[m^2\right]$
T_s	vzorkovací perioda	$[s]$
U_f	Hankelova matice budoucích vstupů	
U_p	Hankelova matice minulých vstupů	
$u(t)$, $u(k)$	vstupní vektor	

SYMBOL	VYSVĚTLIVKA	JEDNOTKA
$u_{1,2}^0, h_{1,2}^0, y^0, u^0, x^0$	zvolené ekvilibrium MIMO systému	
u_1	bezrozměrná hodnota na čerpadle	$[-]$
$u_{10}, u_{20}, h_{10}, h_{20}$	rovnovážné stavy MIMO systému	
u_2	bezrozměrná hodnota na ventilu V_v	$[-]$
$u_{čer}$	hodnota napětí na čerpadle	$[V]$
u_d	hodnota napětí na ventilu V_p	$[V]$
u_p	hodnota napětí na ventilu V_v	$[V]$
u_r	nelinearita čerpadla typu necitlivost	$[-]$
$V1$	označení první nádrže	
$V2$	označení druhé nádrže	
V_1	objem nádrže $V1$	$\left[m^3\right]$
V_2	objem nádrže $V2$	$\left[m^3\right]$
V_p	označení přepouštěcího ventilu mezi nádržemi, digitální ventil	
V_v	označení vypouštěcího ventilu, proporcionální ventil	
$v(k)$	šum procesu	
v_1	rychlost vytékající kapaliny z nádrže $V1$	$\left[m.s^{-1}\right]$
v_2	rychlost vytékající kapaliny z nádrže $V2$	$\left[m.s^{-1}\right]$
v_c	rychlost kapaliny v přívodním potrubí čerpadla	$\left[m.s^{-1}\right]$
v_{h1}	rychlost výšky hladiny kapaliny v nádrži $V1$	$\left[m.s^{-1}\right]$
v_{h2}	rychlost výšky hladiny kapaliny v nádrži $V2$	$\left[m.s^{-1}\right]$
$W_1(s)$	prekompenzátor	
$W_2(s)$	postkompenzátor	
$W_I(s)$	váhová funkce (frekvenčně závislá)	
$W_P(s)$	váhová funkce (frekvenčně závislá)	

SYMBOL	VYSVĚTLIVKA	JEDNOTKA
X_f	časová posloupnost minulých stavů MIMO systému	
X_p	časová posloupnost budoucích stavů MIMO systému	
$x(t), x(k)$	stavový vektor MIMO systému	
$\hat{x}(k \mid k-1)$	optimální odhad stavu	
Y_f	Hankelova matice budoucích výstupů	
Y_{id}	matice výstupních hodnot systému - identifikovaná	
Y_m	matice výstupních hodnot systému - měřená	
Y_p	Hankelova matice minulých výstupů	
$y(t), y(k)$	výstupní vektor MIMO systému	
y_1	výška hladiny v nádrži $V1$, nepřepočtená	$[V]$
y_2	výška hladiny v nádrži $V2$, nepřepočtená	$[V]$
$z_G(s)$	nulový polynom matice $G(s)$	
Δh_{12}	rozdílná vztažná výška hladin mezi nádržemi	$[m]$
$\Delta_I(s)$	libovolná stabilní matice, neznáme informace o skutečné hodnotě a fázi perturbace	
Δ_i	reverzovaná rozšířená matice řiditelnosti	
Γ_i	rozšířená matice pozorovatelnosti	
$\Psi_i(s)$	jmenovatele Smith-McMillanovy formy matice $G(s)$	
$\varepsilon_i(s)$	čitatele Smith-McMillanovy formy matice $G(s)$	
$\gamma(G)$	číslo podmíněnosti systému $G(s)$	
η	viskozita vody	$\left[N.m.s^{-1}\right]$
$\mu(M)$	strukturované singulární číslo	
μ	index řiditelnosti	
$\rho(A)$	spektrální poloměr matice A	
ρ	hustota kapaliny	$\left[kg.m^{-3}\right]$
$\bar{\sigma}, \underline{\sigma}$	největší a nejmenší singulární číslo matice $G(0)$	

SYMBOL	VYSVĚTLIVKA	JEDNOTKA
υ	index pozorovatelnosti	
ω_F	zlomová frekvence BF 2. řádu typu dolní propust	$\left[rad.s^{-1}\right]$
ξ_p	tvarový koeficient ventilu V_p	$[-]$
ξ_v	tvarový koeficient ventilu V_v	$[-]$

Kapitola 1

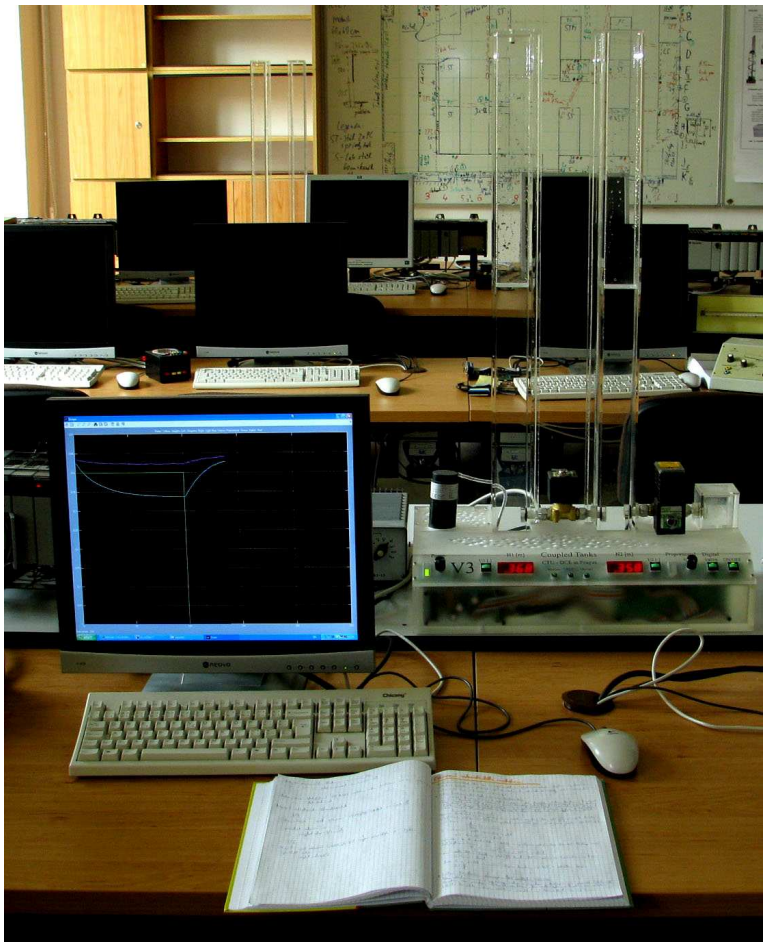
Úvod

V technické praxi je velmi běžné, že modely průmyslových procesů jsou chápány jako vícerozměrné systémy, tj. systém s více vstupy a více výstupy. Takovéto modely mohou mít neminimální fázové chování a interakce mezi vstupy a výstupy, které je v případě návrhu řízení potřebné zohlednit.

Cílem této diplomové práce je identifikace systému dvouválcové vodárny a následný návrh regulátoru, který má za úkol sledovat referenční signál výšky hladiny v obou nádržích. Systém je řízen počítačem a je umístěn v laboratoři K23 Katedry řídicí techniky Fakulty elektrotechnické Českého vysokého učení technického v Praze. Fotografie systému je na (Obr. 1.1). Tato úloha může mít i své uplatnění v technické praxi, ale v našem případě se jedná spíše o akademickou úlohu, jejímž cílem je aplikace moderní a postmoderní teorie řízení na systém spojených nádob a porovnání s klasickým přístupem pro návrh regulačního obvodu.

Diplomová práce bude organizována následovně: v kapitole 2 bude proveden popis reálného modelu spojených nádrží. Pro návrh regulátoru je třeba znát matematický model řízeného systému. A proto v kapitole 3 bude odvozena soustava nelineárních diferenciálních rovnic popisující model. V této kapitole bude také provedena experimentální identifikace systému a následně bude provedena linearizace ve vhodně zvoleném pracovním bodě. Dále v této kapitole bude provedena sofistikovanější metoda k získání matematického popisu systému. Metoda se nazývá Subspace identifikace systému, ze které dostaneme přímo stavové matice systému. Na přesnosti identifikace záleží následná analýza a syntéza regulačních obvodů, proto je nutné určit matematický model co nejpřesněji. Správnost a přesnost modelu určíme po-

rovnáním odezvy systému a modelu na různé testovací signály. V kapitole 4 je uvedena analýza systému, která je důležitou částí následné syntézy regulačního obvodu. Po určení všech neznámých parametrů a analýze řízeného systému přistoupíme k návrhu jednotlivých regulátorů. Kapitola 5 pojednává o návrhu několika typů regulátorů. Nejprve bude navrženo decentralizované řízení pomocí PIDf regulátoru, dále pak navrhneme LQG regulátor a otestujeme optimalitu navrženého KF. Poté navrhneme dva rozvazbující regulátory, přesněji řečeno dynamický rozvazbovací regulátor a stavový rozvazbovací LQR regulátor. Následně bude navržen regulátor minimalizující $\mathcal{H}_\infty$ normu. Na závěr těchto podkapitol budou jednotlivé navržené regulační obvody otestovány na reálném systému spojených nádob a odezvy budou navzájem porovnávány. Celou práci ukončí závěr v kapitole 6.



OBRÁZEK 1.1: *Model dvouválcové vodárny v laboratoři K23*

Od čtenáře tohoto textu se očekává základní znalost lineární algebry (matice, vektory, vlastní čísla, matice speciálních typů); čerpat lze z [16], teorie dynamických systémů (stavový popis systému, stabilita, řiditelnost, pozorovatelnost, atd.); čerpat lze z [1] a ze základů řízení systému; čerpat lze z [5].

Ke všem výpočtům a simulacím bude použit programový balík Matlab [32] a Simulink [34] a toolboxy: Control System, Polynomial, System Identification, Robust Control. Na přiloženém CD jsou zdrojové kódy většiny výpočtů a simulinkové modely většiny simulací provedených v této diplomové práci. Schématické obrázky jsou vytvořeny v programu [31]. Naměřená data z jednotlivých měření jsou zpracována v programu [32]. Jednotlivé soubory jsou uložené v adresářích s názvy odpovídajících kapitol.

Tato diplomová práce je koncipována tak, že ve většině kapitol je na začátku teoretický rozbor daného problému pro pochopení problematiky a následně je uvedeno praktické použití na systému spojených nádob. V rámci této diplomové práce není možné se věnovat všem teoretickým základům potřebným k pochopení dané problematiky, je-li to třeba, je u každého problému upozornění na rozšiřující literaturu, kde je možno nalézt další doplňující informace.

Na závěr bych rád poznamenal, že pro větší přehlednost jsou data z jednotlivých měření zpracována do dvou obrázků. První obrázek odpovídá odezvě systému na referenční signál a druhý obrázek zobrazuje průběh příslušných akčních zásahů. Jelikož se jedná o MIMO systém, závisí odezvy také na směru vstupních signálů (pořadí změn referenčních signálů), v některých případech se neprojeví interakce mezi kanály. Z tohoto důvodu bylo změřeno několik průběhů pro každý navržený regulátor s různými pořadími změn referenčních signálů. Většina změřených průběhů na reálném systému je pak zobrazena v příslušných přílohách, které jsou umístěny na přiloženém CD.

Kapitola 2

Popis modelu vodárny

Model představuje systém spojených nádrží s uzavřeným cyklem. Řízení výšky hladiny v nádržích a průtoku mezi jednotlivými nádržemi je jeden ze základních problémů v praktických aplikacích. V průmyslových procesech jsou kapaliny často čerpány, uchovávány v nádržích a posléze přečerpávány dále. Často dochází k jejich směšování s jinými látkami, jindy jsou podrobeny různým chemickým procesům, ale vždy musí být řízena výška hladiny nebo průtok. Dokonalé zvládnutí této problematiky je nezbytné pro zajištění lepšího řízení a dokonalejšího využití zdrojů.

Systém spojených nádrží je hydro-mechanický systém řízený počítačem a jeho skutečný stav je znázorněn na obrázku (Obr. 1.1). Pro identifikaci se na model díváme jako na systém se třemi vstupy a dvěma výstupy (MIMO systém).

Soustava má 3 vstupy:

- napětí čerpadla $u_{čer}$, dále bude vstup značen u_1
- poloha ventilu V_p (tento vstup nebudeme při modelování brát v úvahu, ventil bude vždy otevřeno, bude brán jako poruchová veličina)
- poloha proporcionálního ventilu V_v, dále bude vstup značen u_2

a dva výstupy:

- výška hladiny vody v první nádrži h_1
- výška hladiny vody v druhé nádrži h_2

V této části uvedeme popis celého systému, způsob měření výstupních veličin a dále také připojení systému k počítači. V následující kapitole bude sestaven nelineární matematický model systému, který bude vycházet ze závěrů uvedených v této kapitole.

2.1 Popis modelu vodárny

Fyzikální model vodárny představuje systém pro řízení výšky hladiny při proměnném odběru. Vodárna se skládá ze dvou přepouštěcím ventilem V_p propojených plastových tanků konstantního shodného průřezu 50 x 50 mm (levý S_1, pravý S_2) o objemu 2 litry, které jsou umístěny nad zásobníkem vody, jehož objem je zhruba 7 litrů. Tento přepouštěcí ventil V_p lze nastavit do dvou poloh – zavřeno a otevřeno. Výšky hladin jsou měřeny přesnými průmyslovými tlakovými snímači umístěnými na dně nádrže, po převedení A/D převodníkem následně pomocí RT Toolboxu Matlabu měříme výšku hladin jako bezrozměrné číslo v intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Nulová výška hladiny je vztažena na dno nádrže. Jak je vidět ze schématického znázornění systému na obrázku (Obr. 3.1), musíme z tohoto důvodu provést přepočet nulové výšky hladin ke spodnímu vnitřnímu okraji trubek ventilů. Do první nádrže je voda čerpána ze zásobníku pomocí odstředivého čerpadla. Pomocí RT Toolboxu v Matlabu zadáváme bezrozměrné číslo v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, které je následně D/A převodníkem převedeno na napětí a přivedeno na svorky čerpadla. Za druhou nádrží je umístěn výpustní ventil, kterým voda vtéká zpět do zásobníku. Tento ventil je proporcionální. Pro detailnější popis celého systému je možno použít [8]. Pro odvození základního popisu můžeme zanedbat vlastní dynamiku čerpadla s ohledem na pomalou dynamiku celého systému (řádově minuty). Dále je možno dokázat, že odstředivé čerpadlo se chová jako zdroj tlaku s konstantními otáčkami při napájení z řízeného zdroje napětí. Z tohoto důvodu musíme uvažovat odpor přívodního potrubí a protitlak sloupce vody (průtok čerpadlem závisí na protitlaku, do kterého se čerpá). Věže vodárny jsou zabezpečeny proti přetečení odpadními kanálky, jejichž vtoky jsou u vrcholů nádrží a odvádí vodu zpět do zásobníku kapaliny.

2.2 Akční členy a senzory

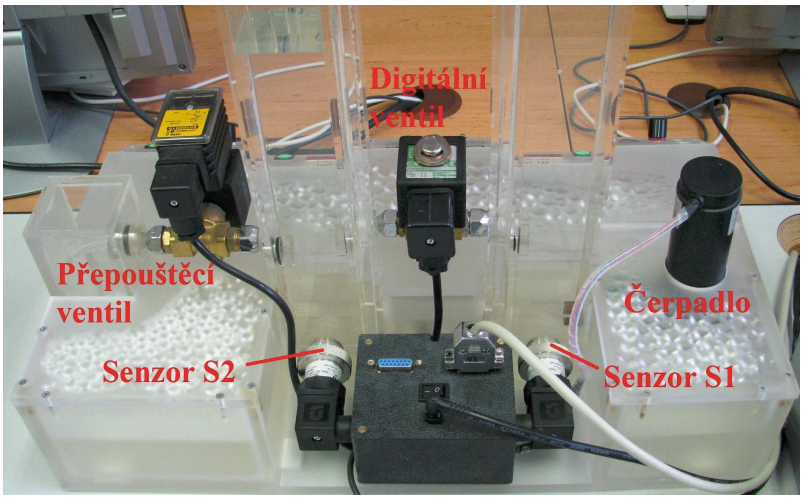
V této podkapitole budou probrány podrobně jednotlivé části modelu. Model je osazen průmyslovými akčními členy a senzory.

2.2.1 Snímač výšky hladiny

Model je osazen dvěma čidly LM 331 (Obr. 2.1) od firmy Smaris [24]. Jedná se o hydrostatický senzor určený pro kontinuální měření výšky hladiny kapalin, kalů nebo emulzí. Jeho výhodou je vysoká linearita, dobrá reprodukovatelnost měření, možnost různého elektrického připojení a v neposlední řadě i mechanická robustnost. Základním prvkem senzoru je tlakové čidlo DSP 401. Hydrostatický tlak, přímo úměrný výšce hladiny, je přenášen prostřednictvím vhodné náplně na měřící polovodičový čip. Na tomto čipu je polovodičovou technologií vytvořen tenzometrický můstek, jehož výstupní signál je teplotně kompenzován a upraven na standardní elektrický signál. V tomto případě je senzor kalibrován v metrech vodního sloupce (0 – 1 m) s napěťovým výstupem (0 – 10 V).

2.2.2 Čerpadlo

V modelu je použito odstředivé čerpadlo CM10P7-1 (Obr. 2.1, Obr. 2.2) firmy Johnson Pump [13]. Odstředivá čerpadla jsou zdrojem tlaku, tzn. že průtok čerpadlem závisí na protitlaku, do kterého se čerpá. K ustálení výšky hladiny v nádrži dojde ve chvíli, kdy se vyrovná hydrostatický tlak s protitlakem čerpadla v místě přívodu kapaliny do soustavy za zdrojem tlaku. Pokud je hydrostatický tlak u výtoku čerpadla vyšší než tlak vytvářený čerpadlem, voda se přes něj dostává zpět do zásobní nádrže.



OBRÁZEK 2.1: *Rozmístění akčních členů a senzorů, zadní pohled*

Výhodou tohoto čerpadla je oddělení oběžného kola a motoru magnetickou spojkou. Čerpadlo je osazeno stejnosměrným motorem, jehož moment se na oběžné kolo přenáší pomocí dvou

magnetů. Jeden je pevně spojen s motorem a uzavřen ve vodotěsném pouzdře, druhý je připevněn k oběžnému kolu. Magnetické pole pak přes plastický kryt motoru otáčí magnetem oběžného kola. Čerpadlo umožňuje suchý chod po dobu max. 30 minut, je odolné vůči zasek-nutí lopatek – nedojde ke spálení motoru. Nemalou výhodou tohoto čerpadla je také jeho tichý chod oproti čerpadlům zubovým. Za nevýhodu lze považovat nelineární charakteristiku průtoku – výška hladiny. Čerpadlo je napájeno 24 V DC. Další parametry jako je teplotní rozsah čerpané kapaliny, teplotní rozsah okolí, ve kterém může čerpadlo pracovat, a mnohé další specifikace, lze nalézt v katalogovém listu výrobce [13].

OBRÁZEK 2.2: *Rozmístění akčních členů a senzorů, přední pohled*

2.2.3 Ventily

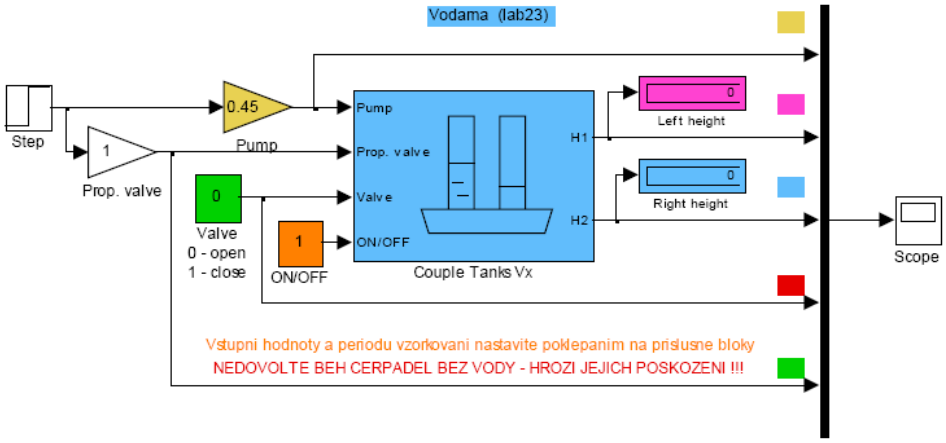
Na modelu jsou umístěny dva ventily. Jeden ventil je digitální, druhý proporcionální s nastavitelným průtokem. Oba dva se ovládají solenoidovou cívkou. Tyto ventily jsou méně přesné než ventily ovládané servopohonem, ale přestavení z polohy zavřeno do polohy otevřeno je řádově rychlejší. Ventily jsou od firmy Asco Joucomatic [2, 3]. Digitální ventil SCG262A264 (Obr. 2.2, Obr. 2.3) je v klidovém stavu otevřený, má bronzové tělo a je ovládán 24 V DC cívkou. Doba odezvy je řádově 10 ms, štěrbina má průměr 5,6 mm. Proporcionální ventil SCG202A057V (Obr. 2.2, Obr. 2.3) je konstrukčně podobný jako digitální ventil. V klidovém stavu je zavřený. Štěrbina má průměr 7,1 mm. Opakovatelnost nastavení ventilu je < 3 % a hystereze je < 5 %. Pro ovládání ventilu je použita řídicí jednotka. Na modelu se používá napěťové řízení v rozsahu 0 – 10 V, kde při 0 V je ventil zavřený, při 10 V je otevřený na maximální průtok. Převodní charakteristika řídicí napětí - průtok je nastavitelná pomocí trimrů v řídicí jednotce ventilu. Takto lze částečně upravovat jeho značně nelineární charakteristiku na vstupním napětí nebo případné offsety otevření.

ristiku na vstupním napětí nebo případné offsety otevření. Další specifikace obou ventilů je opět možno nalézt v katalogovém listu výrobce [2, 3].

2.3 Komunikace se systémem Simulink

Systém je možné ovládat přímo na panelu vodárny nebo přes připojený řídicí počítač (pomocí karty PCI – 1711 a konektoru CANON) ze simulinkového schématu pomocí real – time knihovny Real Time Toolboxu Matlabu od firmy Humusoft (RT toolbox). Pro komunikaci je nutné využít ovladač, který zajišťuje rozhraní mezi prostředím programu a systémem ovládaným přes převodníkovou kartu. Vhodným nastavením je možné měnit vstupní napětí čerpadla, digitálního a proporcionálního ventilu. Dále je možné také vyčítat hodnoty výšky hladiny měřené senzory.

Vstupní a výstupní napětí jsou na modelu normalizována v rozsahu 0 – 10 V. RT toolbox je pak přímo převádí na bezrozměrná čísla v rozsahu 0 – 1 [-]. Efektivní rozsah napětí čerpadla je však omezen výškou věží a platí, že pro pracovní napětí $u_1 > 0,65[-]$ dochází k přetékání první nádrže bezpečnostním přepadem. Digitální ventil je možné nastavit do polohy zavřeno, která odpovídá $u_d = 1[-]$ nebo do polohy otevřeno $u_d = 0[-]$. Proporcionální ventil lze nastavovat průběžně v rozsahu $u_p = \langle 0;1 \rangle$, kde při hodnotě $u_p = 0[-]$ je ventil zavřen a při hodnotě $u_p = 1[-]$ je otevřen na maximální průtok.



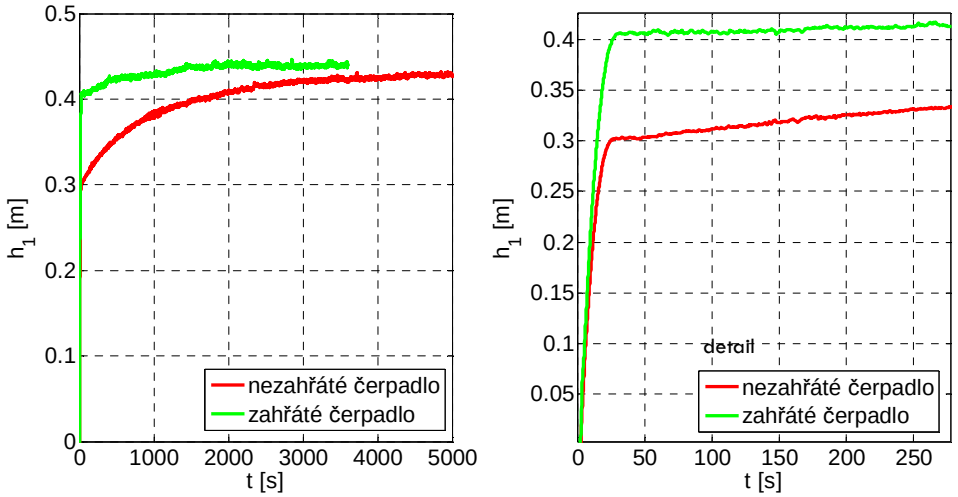
OBRÁZEK 2.3: *Šablona pro ovládání modelu ze Simulinku*

Na tomto místě je vhodné ještě upozornit na to, že zobrazený blok Couple Tanks (Obr. 2.3) obsahuje softwarovou filtraci výstupních signálů ze senzorů pro měření výšky hladin. Je

zde použit Butherworthův filtr 2. řádu typu dolní propust se zlomovou frekvencí na $\omega_F = 2\left[\text{rad.s}^{-1}\right]$. Vliv a význam tohoto filtru bude probírán v dalších kapitolách.

2.4 Problémy při měření na modelu

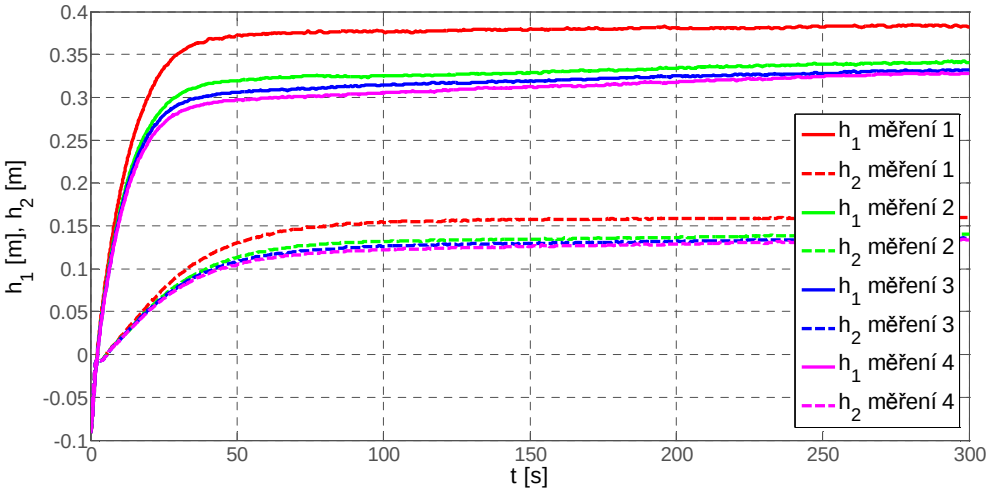
Při měření na vodárně jsme narazili na problém při čerpání čerpadlem, který systém značně ovlivňuje. V systému docházelo po určité době a za jistých počátečních podmínek k pozvolnému růstu výkonu čerpadla při neměnných vstupních podmínkách. Z tohoto důvodu jsme provedli několik pokusů, při kterých jsme na čerpadlo dodávali konstantní vstupní signál $u_1 = 0,5[-]$ při uzavřeném přepouštěcím ventilu. V jednom pokusu jsme začali čerpat hned po zapnutí systému, v druhém pokusu, který byl proveden následující den, jsme nechali čerpadlo nejprve zahřát a poté teprve provedli měření. Hladina se od doby relativního ustálení 50 sekund do uplynutí měřeného časového intervalu 5000 sekund zvýšila přibližně o 12 cm. Výsledky obou pokusů jsou zobrazeny na (Obr. 2.4). Výsledek pokusů vypovídá o tom, že čerpadlo je pravděpodobně závislé na zahřívání jeho elektroniky nebo na vlastním mechanickém zahřátí samotného čerpadla, které je pak po rozběhu výkonnější. Jelikož je systém uzavřen, nebylo možné ověřit, který z těchto předpokladů je ten správný.



OBRÁZEK 2.4: *Vzrůstající výkon čerpadla s časem*

Na systému spojených nádob byl proveden ještě další pokus, který měl za úkol zjistit hodnotu výšky ustálení hladin v obou nádržích při opakovatelnosti měření přechodové charakteristiky při neměnných vstupních podmínkách s vícedenními odstupy. Vstupní signál na čerpadle byl nastaven na hodnotu $u_1 = 0,5[-]$. Přepouštěcí ventil byl otevřen a výpustní ven-

til byl nastaven na maximální průtok. Data byla naměřena při zahřátém čerpadle vždy následující den od prvního měření. Výsledek pokusu je zobrazen na obrázku (Obr. 2.5). Z obrázku je patrné, že ustálení je při každém měření jiné. Důvodů může být hned několik, ať už je to příčina, která je uvedena výše, a nebo se také může jednat o problém, že měřený systém má výpustní ventil s horší opakovatelností nastavení, než je hodnota uvedena v katalogovém listu. V tomto případě by byla opakovatelnost nastavení ventilu zhruba 7 %. Dalším problémem, se kterým jsme se setkali při měření na modelu, byl velký vliv atmosférických podmínek, které panovaly v danou chvíli v laboratoři. Nebylo v našich silách zajistit, aby byly vždy zaručeny stejné podmínky pro měření. Naší snahou bylo co nejvíce eliminovat tyto zmíněné problémy.



OBRÁZEK 2.5: *Opakovatelnost měření*

Kapitola 3

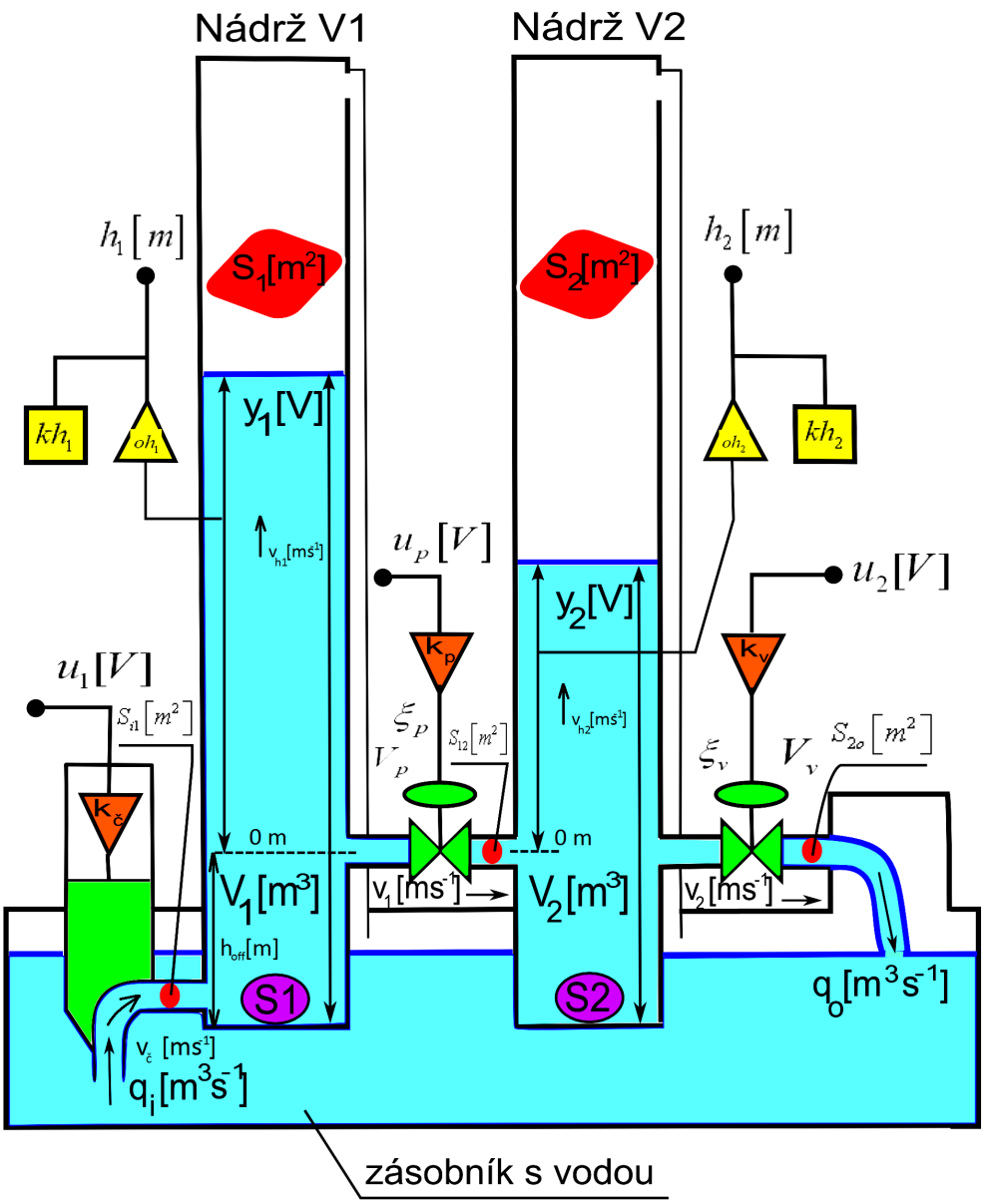
Matematický popis systému

Matematicko – fyzikální model popisující reálný systém spojených nádob vychází ze schématického znázornění (Obr. 3.1). Čerpadlo přivádí ze zásobníku do levého válce objemový přítok q_1, který zvětšuje (zmenšuje v případě zastavení čerpadla) objem vody V_1 v levém válci. Tím se zvětšuje (zmenšuje) výška hladiny h_1. Za běžného provozního stavu je výška v levé nádrži větší než v pravé. Množství vody přitékající z levé nádrže do pravé za jednotku času q_1 závisí na rozdílu výšek hladin, který určuje ideální rychlost toku vody mezi nádržemi v_1 (jako otevřený výtok při uvažování pouze laminárního proudění), ploše ventilu S_{12}, viskozitě vody η a tvarovém koeficientu ventilu ξ_1. Součin všech těchto činitelů budeme dále nazývat koeficientem ventilu a zavedeme značení k_p. Pravý válec vodárny má pracovní přítok z levého tanku, odtok je pak přes vypouštěcí ventil V_v. Odtok lze opět fyzikálně popsat jako volný výtok z otevřené nádoby a experimentálně vyjádřit výsledným koeficientem vypouštěcího ventilu, který budeme dále značit k_v.

3.1 Nelineární matematický model

V předchozí kapitole byl uveden popis systému. Na základě tohoto popisu se odvodí nelineární matematický model celého systému. Matematický popis systému je velice důležitou částí při návrhu řízení. Vodárna se dá popsat soustavou dvou nelineárních diferenciálních

rovnic prvého řádu s tím, že se zanedbává dynamika čerpadla. K vytvoření popisu se vychází ze zákona zachování energie (Bernoulliho rovnice 3.2) a ze zákona zachování hmotnosti (rovnice kontinuity 3.4) pro hydraulické systémy [20].



OBRÁZEK 3.1: *Schématický model vodárny*

Pro jednu nádobu platí rovnice (3.1).

$$\frac{dV_1}{dt} = S_1 \frac{dh_1}{dt} = q_i - q_o \,, \tag{3.1}$$

kde

q_i objemový přítok $\left[m^3.s^{-1}\right]$,

q_o objemový odtok $\left[m^3.s^{-1}\right]$,

h_1 výška hladiny v nádrži $[m]$,

S_1 průřez nádrže $\left[m^2\right]$ (předpokládá se nádrž s konstantním průřezem po celé výšce),

V_1 objem nádrže $\left[m^3\right]$.

Objem první nádrže V_1 lze vyjádřit jako $V_1 = S_1 h_1(t)$. Potom změna objemu kapaliny v nádrži dV_1 za jednotku času je dána rozdílem mezi přítokem kapaliny q_i a výtokem kapaliny q_o.

3.1.1 Odvození přítoku pro první nádrž

Za předpokladu, že je výtokový otvor ideálně tvarovaný a po zanedbání všech ztrát, může být použita Bernoulliho rovnice, která nabývá pro nestlačitelnou kapalinu za působení tíhového zrychlení a ustáleného proudění tvaru

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2(t) + h\rho g = \text{konst}, \tag{3.2}$$

kde

p působící tlak $[Pa]$,

ρ hustota kapaliny $\left[kg.m^{-3}\right]$,

v rychlost kapaliny $\left[m.s^{-1}\right]$,

h výška hladiny v nádrži $[m]$,

g tíhové zrychlení $\left[m.s^{-2}\right]$.

Aplikujeme-li uvedenou rovnici na uvažovaný přítok za odstředivým čerpadlem v první nádrži, bude mít rovnice (3.2) tvar

$$p_0 + p_c(t) + \frac{1}{2}\rho v_c^{\,2}(t) + h_{off}\rho g = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_{h1}^2(t) + h_1(t)\rho g, \tag{3.3}$$

kde

p_0 atmosférický tlak $[Pa]$,

p_c tlak dodávaný čerpadlem $[Pa]$,

v_c rychlost kapaliny v přívodním potrubí čerpadla $[m.s^{-1}]$,

h_{off} výška hladiny ode dna nádrže k přívodnímu potrubí $[m]$,

v_{h1} rychlost pohybu hladiny v první nádrži $[m.s^{-1}]$.

Z formulace rovnice kontinuity, která platí pro proudění ideální kapaliny v uzavřené trubici, můžeme psát, že vztah mezi rychlostí proudění kapaliny a průřezem trubice je konstantní

$$q_i = S_{i1} v_c(t) = konst\,, \tag{3.4}$$

kde

S_{i1} průřez přítokového potrubí $\left[m^2\right]$,

ξ_1 konstanta vyjadřující ztráty $[-]$,

g gravitační zrychlení $\left[m.s^{-2}\right]$.

Za předpokladu, že průřez nádrže je podstatně větší než je průřez přítokového potrubí, tj. $S_1 >> S_{i1}$, pak z rovnice (3.4) plyne, že rychlost pohybu hladiny první nádrže je podstatně menší než rychlost kapaliny v přítokovém potrubí čerpadla, tj. $v_1 << v_c$ a tedy rychlost v_1 je možné zanedbat. Atmosférický tlak p_0 je také stejný vzhledem k malé výšce nádrží. Při splnění těchto předpokladů se nám pak rovnice (3.3) zjednoduší na tvar

$$p_c(t) + \frac{1}{2}\rho v_c^{\,2}(t) + h_{off}\rho g = h_1(t)\rho g\,. \tag{3.5}$$

Z poslední uvedené rovnice vyjádříme rychlost v_c. Jak již bylo uvedeno na předcházejících stránkách, pokud je rychlost přitékající kapaliny do nádrže menší než rychlost vytékající kapaliny z nádrže, pak se kapalina vrací do zásobníku přes přítokové potrubí čerpadla. Z důvodu lepšího přehledu odvození nelineárního modelu systému zavedeme matematickou funkci *sign*, která tento směr kapaliny bude určovat. Člen $2g\left(h_1(t) + h_{off}\right)$ se vztahuje k rychlosti kapaliny, která z nádrže vytéká, a člen $2p_c(t)/\rho$ se vztahuje k rychlosti kapaliny, která do nádrže přitéká. Směr rychlosti v_c z výtokového potrubí čerpadla směrem do první nádrže považujeme za kladný, proto přejde rovnice pro rychlost $v_c(t)$ (3.5) do tvaru

$$v_c(t) = sign\left(2\left[\frac{p_c(t)}{\rho} - g\left(h_1(t) + h_{off}\right)\right]\right)\sqrt{\left|2\left[\frac{p_c(t)}{\rho} - g\left(h_1(t) + h_{off}\right)\right]\right|}\,. \tag{3.6}$$

Nyní odvodíme závislost tlaku dodávaného čerpadlem p_c na jeho vstupním napětí u_1. Jak bude ukázáno dále, ze změřených průběhů čerpadla (Obr. 3.2) je patrné, že čerpadlo má neza-

nedbatelné pásmo necitlivosti, kde čerpadlo čerpá až od napětí u_r, které je potřebné k překonání vnitřních odporů. Rovnice pak vypadá následovně

$$p_c(t) = k_c\left(u_1(t) - u_r\right)^2, \tag{3.7}$$

kde:

k_c konstanta čerpadla $[-]$.

Dosazením rovnice (3.7) do rovnice (3.6) získáme výsledný vztah pro ideální rychlost kapaliny v přívodním potrubí čerpadla

$$v_c(t) = sign\left(2\left[\frac{k_c\left(u_1(t)-u_r\right)^2}{\rho} - g\left(h_1(t)+h_{off}\right)\right]\right)\sqrt{\left|2\left[\frac{k_c\left(u_1(t)-u_r\right)^2}{\rho} - g\left(h_1(t)+h_{off}\right)\right]\right|}. \tag{3.8}$$

Dosazením rovnice (3.8) do rovnice (3.4) je získán vztah pro ideální přítok kapaliny do první nádrže

$$q_i(t) = S_{i1}\, sign\left(2\left[\frac{k_c\left(u_1(t)-u_r\right)^2}{\rho} - g\left(h_1(t)+h_{off}\right)\right]\right)\sqrt{\left|2\left[\frac{k_c\left(u_1(t)-u_r\right)^2}{\rho} - g\left(h_1(t)+h_{off}\right)\right]\right|}. \tag{3.9}$$

3.1.2 Odvození výtoku z první nádrže

Pro odvození výtoku z první nádrže budeme opět uvažovat Bernouliho rovnici (3.2) jen s tím rozdílem, že rovnice bude odvozena pro místo mezi hladinou první nádrže a místem těsně za přepouštěcím ventilem. Pro tento případ dostáváme

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho {v_{h1}}^2(t) + h_1(t)\rho g = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2(t) + h_2(t)\rho g, \tag{3.10}$$

kde:

v_1 rychlost kapaliny v průtokovém potrubí mezi nádržemi $\left[m.s^{-1}\right]$.

Za předpokladu, že je průřez první nádrže podstatně větší než průřez průtokového potrubí, tj. $S_1 >> S_{12}$, je z rovnice kontinuity (3.4) patrné, že rychlost pohybu hladiny v první nádrži je podstatně menší než je rychlost kapaliny v průtokovém potrubí, tj. $v_{h1} << v_1$ a lze ji zanedbat. Nyní analogicky aplikujeme předpoklad, za kterého můžeme rovnici (3.10) zjednodušit. Bernoulliho rovnice pak pro tento případ přechází do tvaru

$$h_1(t)\rho g = \frac{1}{2}\rho v_1^2(t) + h_2(t)\rho g, \tag{3.11}$$

z toho lehkým výpočtem odvodíme, že ideální rychlost vytékající kapaliny z první nádrže je

$$v_1(t) = sign\left(h_1(t) - h_2(t)\right)\sqrt{\left|2g\left(h_1(t) - h_2(t)\right)\right|}\,. \tag{3.12}$$

Opět zde byla zavedena matematická funkce *sign* z důvodu respektování znamének pro přítok a odtok z nádrže. V tomto případě pokud bude hladina $h_2(t) > h_1(t)$, poteče voda opačným směrem, zpět do první nádrže. Tento směr funkce *sign* respektuje. Ze schématického znázornění systému spojených nádob (Obr. 3.1) je zřejmé, že musí být dále splněna podmínka $h_1(t) \geq 0$, protože kapalina z první nádrže může vytékat pouze v případě, že je nad úrovní spodního okraje přepouštěcího ventilu. Z tohoto důvodu do rovnice (3.12) zavedeme Heavisideovu funkci, která bude tuto podmínku respektovat. Heavisideova funkce je definována následovně

$$H(h_1) = \begin{cases} 0, & h_1(t) < 0 \\ 1, & h_1(t) \geq 0 \end{cases}. \tag{3.13}$$

Rovnice pro ideální rychlost vytékající kapaliny z první nádrže má pak tvar

$$v_1(t) = sign\left(H(h_1)h_1(t) - h_2(t)\right)\sqrt{\left|2g\left(H(h_1)h_1(t) - h_2(t)\right)\right|}\,. \tag{3.14}$$

Dosazením rovnice (3.14) do rovnice (3.4) dostaneme vztah pro ideální výtok kapaliny z první nádrže

$$q_{o1}(t) = S_{12}\, sign\left(H(h_1)h_1(t) - h_2(t)\right)\sqrt{\left|2g\left(H(h_1)h_1(t) - h_2(t)\right)\right|}\,. \tag{3.15}$$

Nyní je potřeba si uvědomit, že výtok z první nádrže je zároveň přítokem do druhé nádrže, tzn., že platí

$$q_{o1} = q_{i2}\ , \tag{3.16}$$

proto budeme v diferenciální rovnici popisující dynamiku druhé nádrže uvažovat opačné znaménko než v diferenciální rovnici, která popisuje dynamiku nádrže první. V jednom případě se jedná o odtok z nádrže a v druhém případě o přítok do nádrže.

3.1.3 Odvození výtoku z druhé nádrže

Zcela analogicky jako v předchozím případě by se odvodila rovnice pro výtok z druhé nádrže. Nyní zde uvedeme již výsledné vztahy. Bernoulliho rovnice má v tomto případě tvar

$$h_2(t)\rho g = \frac{1}{2}\rho v_2^2(t), \tag{3.17}$$

z toho ideální výtoková rychlost kapaliny je

$$v_2(t) = \sqrt{2gh_2(t)}\,. \tag{3.18}$$

Tento vztah je známý Torriccelliho vzorec pro rychlost vytékající kapaliny z otvoru nádrže. Dosazením rovnice (3.18) do rovnice kontinuity (3.4) získáme ideální výtok z druhé nádrže.

$$q_2(t) = S_{2o}\sqrt{2gh_2(t)}\,. \tag{3.19}$$

3.1.4 Diferenciální rovnice pro systém spojených nádob

Dosadíme-li do rovnice (3.1) za přítok do první nádrže rovnici (3.9) a za výtok z první nádrže rovnici (3.15), dostaneme diferenciální rovnici, která popisuje dynamiku první nádrže (3.20). Je potřeba si uvědomit, že při odvozování byly zanedbány ztráty způsobené tvarem vtoků do potrubí, ventilů a tření. Tyto ztráty budou společně zakomponovány v koeficientech jednotlivých ventilů.

$$\begin{aligned}\frac{d\,h_1(t)}{dt} &= \frac{q_{i1}}{S_1} - \frac{q_{o1}}{S_1} = k_1 sign\left(k_2\left(u_1(t)-u_r\right)^2 - \left(h_1(t)+h_{off}\right)\right)\sqrt{\left|k_2\left(u_1(t)-u_r\right)^2 - \left(h_1(t)+h_{off}\right)\right|} \\ &\quad - k_p sign\left(H(h_1)h_1(t)-h_2(t)\right)\sqrt{\left|\left(H(h_1)h_1(t)-h_2(t)\right)\right|},\end{aligned} \tag{3.20}$$

kde:

$$k_1 = k_{z1}\frac{S_{i1}}{S_1}\sqrt{2g}\,, \tag{3.21}$$

$$k_2 = k_{z2}\frac{k_c}{\rho g}\,, \tag{3.22}$$

$$k_p = k_{z3}\frac{S_{12}}{S_1}\sqrt{2g}\,. \tag{3.23}$$

Jelikož jsou obě dvě nádrže stejné, použijeme podobnou analogii i pro sestavení diferenciální rovnice popisující dynamiku druhé nádrže. Do rovnice (3.1) tentokrát dosadíme za přítok z rovnice (3.16) a za odtok rovnici (3.19), čímž dostaneme

$$\frac{d\,h_2(t)}{dt} = \frac{q_{i2}}{S_2} - \frac{q_{o2}}{S_2} = k_p sign\left(H(h_1)h_1(t)-h_2(t)\right)\sqrt{\left|\left(H(h_1)h_1(t)-h_2(t)\right)\right|} - k_v u_2(t)\sqrt{h_2(t)}\,, \tag{3.24}$$

kde:

$$k_v = k_{z4}\frac{S_{2o}}{S_2}\sqrt{2g}\,. \tag{3.25}$$

Rovnice (3.20) a (3.24) tvoří soustavu dvou nelineárních diferenciálních rovnic popisující dynamiku systému spojených nádrží, které byly odvozeny dle schématického znázornění (Obr. 3.1). Jednotlivými indexy rozlišujeme, které nádrže se daný symbol týká. Detailnější odvození je možné nalézt v [15]. Koeficient k_1 ovlivňuje nejvíce dynamiku modelu, koeficient k_2 představuje zesílení, k_p je koeficient průtokového ventilu a k_v je koeficient výtokového ventilu. Koeficienty k_{zi} jsou ztrátové činitelé. Tok z první nádrže do druhé je závislý na rozdílu hladin v nádržích. Člen $k_v u_2(t)\sqrt{h_2(t)}$ z rovnice (3.24) reprezentuje úbytek výšky hladiny ve druhé nádrži přes vypouštěcí ventil V_v, přičemž velikost tohoto úbytku je závislá na otevření ventilu, které je dáno vstupem u_2.

Proměnné $h_1(t)$ a $h_2(t)$ jsou stavy systému, $u_1(t)$ a $u_2(t)$ jsou vstupy systému. Pro výstupní hladiny platí

$$y_1(t) = k_{h1} h_1(t) + o_1,$$

$$y_2(t) = k_{h2} h_2(t) + o_2, \tag{3.26}$$

kde $y_1[m]$ a $y_2[m]$ jsou výstupní hladiny v nádržích a konstanty $k_{h1}[m]$ a $k_{h2}[m]$ přepočítávají bezrozměrné výšky hladin odečtené ze senzorů jednotlivých zásobníků na hodnotu udávanou přímo na stupnici reálného modelu v metrech. Proměnné $o_1[m]$ a $o_2[m]$ jsou offsety obou snímačů hladin. Jedná se o poruchové veličiny, které je třeba před každým měřením zohlednit na reálném modelu.

Stavové rovnice nám říkají, že se jedná o nelineární model druhého řádu se vstupním vektorem $u = [u_1 \quad u_2]^T$, stavovým vektorem $x = [h_1 \quad h_2]^T$ a výstupním vektorem $y = [y_1 \quad y_2]^T$. Pomocí těchto stavových rovnic můžeme zkonstruovat nelineární matematický model pomocí Simulinku.

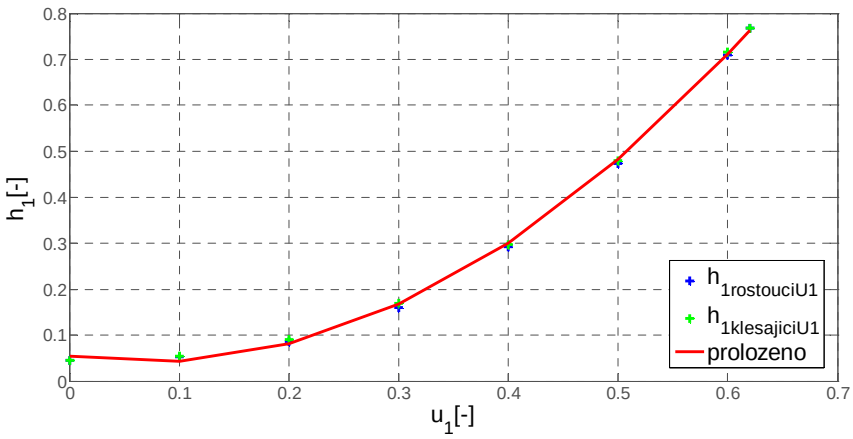
3.2 Experimentální určení konstant modelu

V této části se budeme zabývat experimentálním určením konstant systému spojených nádrží. V předchozích podkapitolách jsme již nalezli nelineární matematický model systému, ve kterém nyní musíme určit neznámé koeficienty. Při identifikaci systému se budeme snažit systém rozdělit na komponenty, které budeme identifikovat zvlášť, protože identifikace celého systému najednou by byla značně obtížná. Nakonec spojíme modely jednotlivých částí

systému dohromady a získáme kompletní model systému spojených nádrží. Pro ověření správnosti identifikace porovnáme odezvy systému a jeho modelu na různé vstupní testovací signály.

Jak již bylo napsáno, v této kapitole popíšeme způsob určení jednotlivých konstant nelineárního modelu. Na obrázku (Obr. 3.2) je zobrazena závislost hladiny h_1 v levé nádrži na vstupním napětí čerpadla a její aproximace kvadratickou funkcí $h_1 = f(u_1)$. To tedy není nic jiného než statická charakteristika první nádrže s uzavřeným ventilem V_p. Z této charakteristiky lze odvodit pracovní oblast čerpadla $u_1 \in (0,2;0,62)$. Nelinearita typu necitlivost se projevuje pro $u_1 \in \langle 0;0,185 \rangle$ a nasycení pro $u_1 > 0,65$, což je řídicí signál čerpadla, při kterém úroveň hladiny v první nádrži dosáhne v ustáleném stavu k horní bezpečnostní výpusti. Rovnice polynomu, kterým jsme proložili změřený průběh, je

$$h_1 = (1,5483u_1 - 0,185)^2 . \tag{3.27}$$



OBRÁZEK 3.2: *Závislost hladiny h_1 v levé nádrži na vstupním řídicím signálu čerpadla a její aproximace polynomem druhého řádu*

Charakteristika byla změřena tak, že byl nastaven řídicí signál na čerpadle a po ustálení hladiny došlo k odečtení výšky hladiny pro příslušné řídicí napětí. Jak je vidět z obrázku (Obr. 3.2) není potřeba uvažovat hysterezi v čerpadle, měření při stoupající i klesající hladině je téměř identické. Z obrázku (Obr. 3.2) určíme také konstantu h_{off}, což je výška hladiny k přepouštěcímu ventilu. Konstanta má hodnotu $h_{off} = 0,04279[m]$.

Při uzavřeném přepouštěcím ventilu se nám rovnice (3.20) zjednoduší, odpadne druhý člen, který odpovídá výtoku kapaliny z nádrže. Dále uvažujeme směr čerpání jako kladný,

z toho plyne, že v rovnici (3.20) nám dále vypadne také funkce *sign*, a pro ustálené hodnoty přechodové charakteristiky také platí, že $dh_1(t)/dt = 0$. Po splnění těchto předpokladů lze vyjádřit koeficient k_2 ve tvaru

$$k_2 = \frac{\left(h_1(t) + h_{off}\right)}{\left(u_c(t) - u_r\right)^2}. \tag{3.28}$$

Po dosazení do rovnice (3.28) vypočítáme pro každý rovnovážný stav konstantu k_{2i} a následně určíme její průměr pro určení výsledné konstanty. V tomto případě je konstanta $k_2 = 2{,}53[-]$. Parametr k_1 určíme z rovnice

$$k_1 = \frac{\dfrac{dh_1(t)}{dt}}{\sqrt{\left|k_1\left(u_1(t) - u_r\right)^2 - \left(h_1(t) + h_{off}\right)\right|}}. \tag{3.29}$$

Pro určení konstanty k_1 jsme změřili několik přechodových charakteristik pro různá napětí čerpadla a z jejich dynamiky jsme určili konstanty k_{1i}. Výslednou konstantu dostaneme jako průměr konstant k_{1i}. V tomto případě je konstanta $k_1 = 0{,}065[-]$.

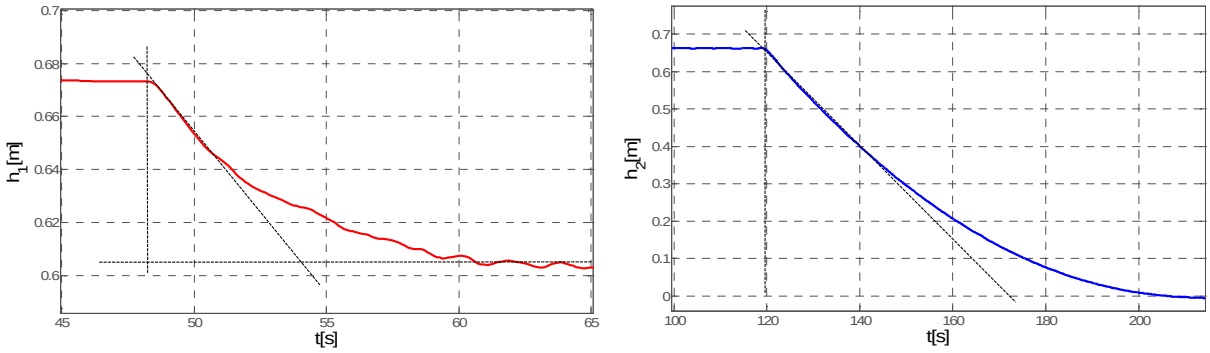
Konstanty k_p a k_v lze identifikovat dvěma způsoby měření. První způsob je měření n rovnovážných stavů $u_{10}, u_{20}, h_{10}, h_{20}$. Po dosazení do rovnice (3.20) resp. (3.24) vypočítáme pro každý rovnovážný stav konstanty k_{pi} a k_{vi} a následně určíme jejich průměr pro určení výsledných konstant k_p, k_v.

$$k_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_{pi}}{n}, \quad k_v = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_{vi}}{n} \tag{3.30}$$

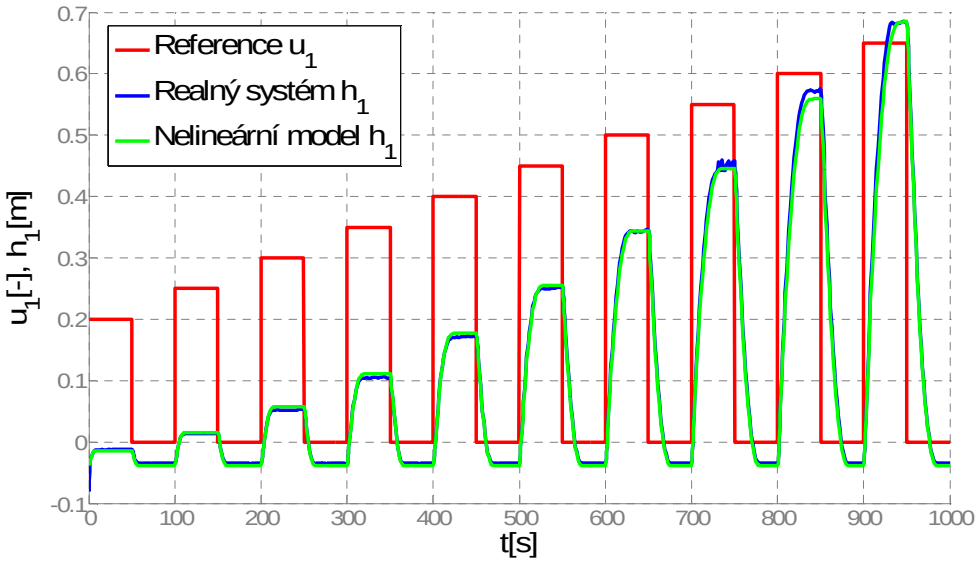
Druhá metoda spočívá v měření výtokových charakteristik. Výhodou první metody je její větší přesnost oproti druhé metodě, ale za cenu větší časové náročnosti. Druhá metoda je podstatně rychlejší a výsledné konstanty lze vyladit na samotném matematickém modelu v Simulinku tak, aby odpovídaly skutečnému modelu. V této práci jsme aplikovali obě metody. První metodou jsme si udělali přehled o tom jakou přibližně hodnotu by měly mít konstanty, a poté jsme změřili výtokovou charakteristiku a výslednou konstantu jsme doladili na nelineárním modelu tak, aby se ustálená hodnota přechodové charakteristiky nelineárního modelu odchylovala co nejméně od reálné ustálené hodnoty změřené na reálném modelu v laboratoři. Výtokové charakteristiky obou nádrží jsou zobrazeny na obrázku (Obr. 3.3). Pro náš systém pak dostáváme výsledné konstanty ve tvaru

$$k_p = 0,023[-], \quad k_v = 0,05[-]. \tag{3.31}$$

Na obrázku (Obr. 3.4) je srovnání přechodových charakteristik nelineárního modelu první nádrže s uzavřeným přepouštěcím ventilem V_p a reálným systémem.



OBRÁZEK 3.3: *Výtokové charakteristiky nádrže $V1$ a $V2$*

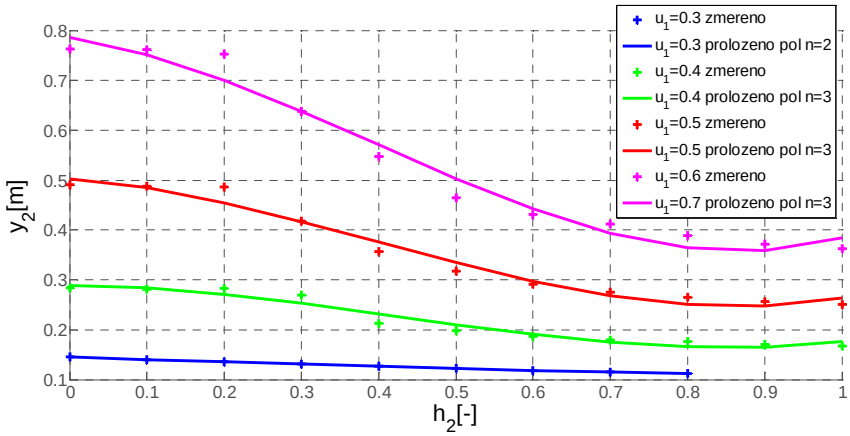


OBRÁZEK 3.4: *Porovnání přechodové charakteristiky $u_1 \to h_1$ nelineárního modelu a reálného systému při uzavřeném ventilu V_p*

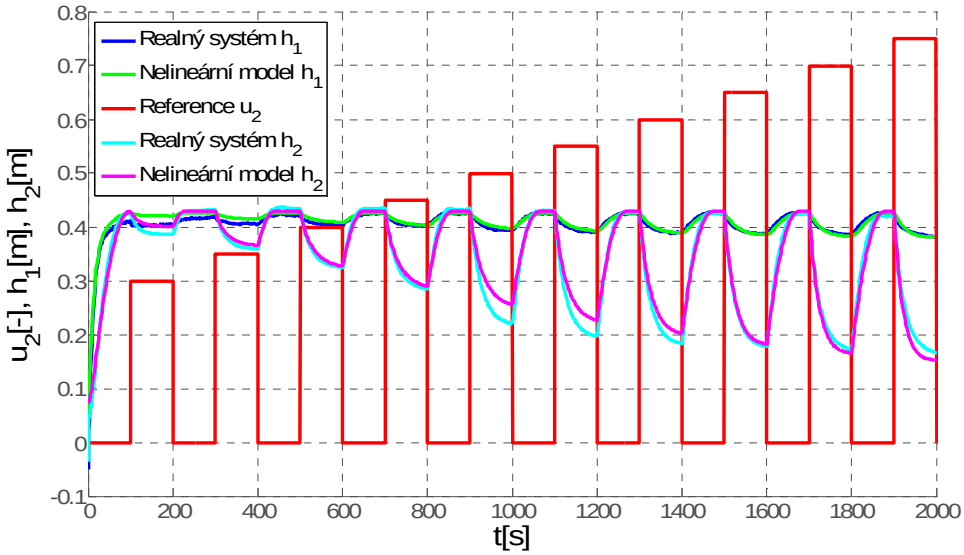
Dále byla změřena statická závislost mezi otevřením výpustního ventilu druhé nádrže a její výškou hladiny pro různé řídicí signály čerpadla. Tyto charakteristiky jsou zobrazeny na obrázku (Obr. 3.5). Pracovní oblast vypouštěcího ventilu je v rozmezí $u_2 \in \langle 0,2; 0,75 \rangle$. Charakteristiky byly změřeny pro čtyři řídicí signály čerpadla $u_1 = 0,3$, $u_1 = 0,4$, $u_1 = 0,5$ a

$u_1 = 0,6$. Závislost otevření výpustního ventilu na jeho vstupním napětí je značně nelineární a vykazuje offsety. Charakteristika byla změřena tak, že byl nejdříve nastaven příslušný řídicí signál na čerpadle při uzavřeném vypouštěcím ventilu. Po ustálení hladiny byl zvyšován řídící signál na vypouštěcím ventilu, čímž se ventil více otevíral, po každé změně řídicího signálu se čekalo na ustálení hladiny, která byla následně odečtena.

Porovnání přechodových charakteristik hladiny ve druhé nádrži h_2 nelineárního modelu a reálného systému při konstantním řídicím signálu čerpadla $u_1 = 0,5$ a proměnném řídicím signálu výpustního ventilu u_2 je na obrázku (Obr. 3.6). Z obrázku (Obr. 3.6) je patrné, že nelineární matematický model s výše uvedenými konstantami dostatečně přesně popisuje reálný systém spojených nádrží.



OBRÁZEK 3.5: *Statická charakteristika druhé nádrže $u_2 \rightarrow$ hladina h_2*



OBRÁZEK 3.6: *Porovnání přechodové charakteristiky $u_2 \rightarrow h_2$ nelineárního modelu a reálného systému*

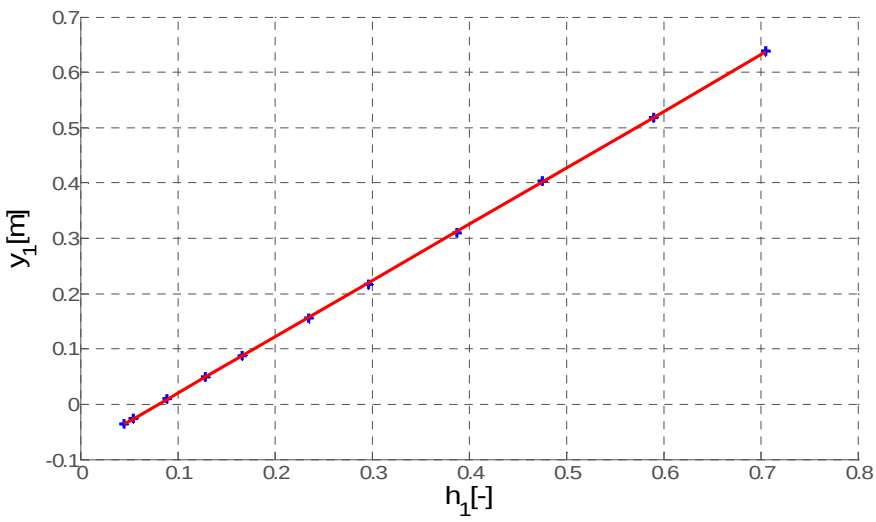
Převodní charakteristika snímačů hladin S_1 a S_2 udává závislost bezrozměrné výšky hladiny odečtené pomocí snímačů na výšce hladiny odečtené na stupnici reálného modelu v metrech. Při jejím změření se ukázalo, že vodárna má nenulové hladiny pro nulové hodnoty odečtené pomocí snímačů. Proto je nutné tuto hodnotu zohlednit v konstantách o_1 a o_2 pro obě hladiny. Toho lze dosáhnout proložením převodní charakteristiky lineární regresní přímkou viz (Obr. 3.7, 3.8). Po této úpravě dostáváme následující převodní konstanty snímačů a jejich offsety

$$\begin{aligned} k_{h1} &= 1{,}0182, \quad o_1 = -0{,}082, \\ k_{h2} &= 1{,}0486, \quad o_2 = -0{,}0918. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Konstanty o_1, o_2 jsou přičítány ke změřeným signálům v Matlabu, aby bylo možné porovnání s reálným systémem, který má již stupnici kalibrovanou v metrech

$$\begin{aligned} &y_{1M}(t) = k_{h1} h_{1S}(t) + o_1; \quad y_{2M}(t) = k_{h2} h_{2S}(t) + o_2, \\ &y_{1M}(t) = 1{,}0182 h_{1S}(t) - 0{,}0820; \quad y_{2M}(t) = 1{,}0486 h_{2S}(t) - 0{,}0918, \end{aligned} \tag{3.33}$$

Při nulové výšce hladiny v první nádrži (tím se myslí výška vztažena k přepouštěcímu potrubí) je na výstupu tlakového senzoru nenulová hodnota $o_{h1} = 0{,}04297$ (výška měřena senzorem ode dna nádrže), která bude v nelineárním modelu představovat vztažnou počáteční výšku hladiny h_1. Ve všech simulacích je tato hodnota přičítána k výstupu nelineárního modelu, aby bylo možné srovnání s reálným systémem.

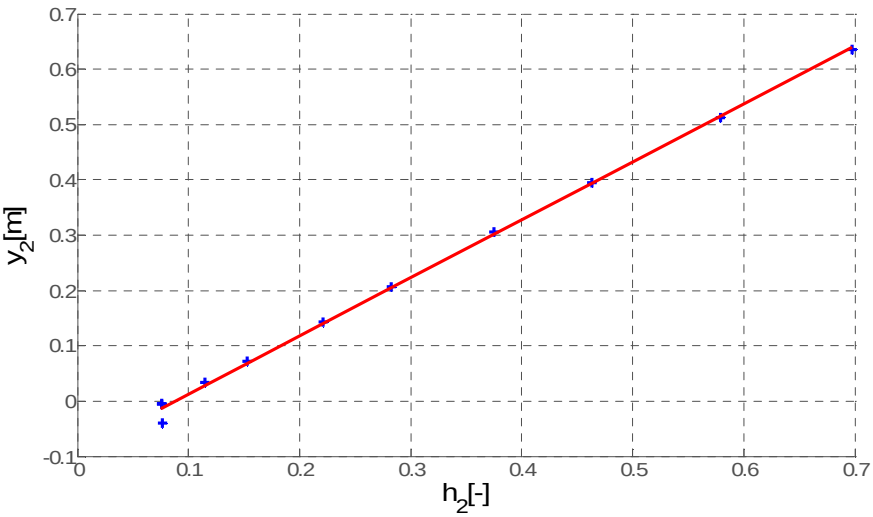


OBRÁZEK 3.7: *Převodní charakteristika snímače hladiny* h_1

Vztažná počáteční výška hladiny h_2 má hodnotu $o_{h2} = 0{,}07753$ a je přičítána k výstupu nelineárního modelu, aby bylo možné porovnání s reálným systémem. Při výpočtu rozdílu

hladin h_1 a h_2 je nutné počítat s jejich rozdílnou vztažnou výškou hladiny a proto se k tomuto rozdílu přičítá konstanta $\Delta h_{12} = o_{h1} - o_{h2} = 0,04297 - 0,07753 = -0,0346$.

Proměnné h_1, h_2 jsou výstupy ze snímačů výšky hladin, skutečnou výšku hladiny v nádržích udávají proměnné y_1, y_2. Ve všech následujících grafech budou tyto výstupy označovány jako hladina.



OBRÁZEK 3.8: *Převodní charakteristika snímače hladiny* h_2

3.3 Lineární model

Lineární model systému dostaneme linearizací nelineárního modelu v námi zvoleném pracovním bodě (ekvilibrium). Pracovní bod nevolíme v extrémních stavech systému, ale volíme takové hodnoty, kterých je systém schopen dosáhnout za běžných provozních podmínek a platí nám v této oblasti nelineární model. Poznamenejme, že linearizovaný model je modelem odchylkovým. Pro získání stavových rovnic lineárního systému v základním předpisovém tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{3.34}$$

je potřeba nelineární systém (3.20), (3.24), který si zjednodušíme do tvaru

$$\dot{x}(t) = \dot{h}(t) = f(x,u),\ y(t) = h(x,u) \tag{3.35}$$

v okolí jeho ekvilibria $x^0 = h^0 = \begin{bmatrix} h_1^0 & h_2^0 \end{bmatrix}^T$, $u^0 = \begin{bmatrix} u_1^0 & u_2^0 \end{bmatrix}^T$ linearizovat. Pro ustálený stav platí

$$f\left(h^0,u^0\right)=0,\ h\left(h^0\right)=y^0\,. \tag{3.36}$$

Přibližnou linearizací systému (3.35), jehož pravá strana a výstupní zobrazení jsou spojitě diferencovatelné, v okolí ekvilibria nazveme následující lineární systém

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x}(t)&=A\Delta x(t)+B\Delta u(t)\\ \Delta y(t)&=C\Delta x(t)+D\Delta u(t)\end{aligned}, \tag{3.37}$$

kde

$$\Delta x(t)=\left(h(t)-h^0\right)\in R^n,\ \Delta u(t)=\left(u(t)-u^0\right)\in R^m,\ \Delta y(t)=\left(y(t)-y^0\right)\in R^p, \tag{3.38}$$

kde matice A,B,C,D příslušných rozměrů lze určit jako

$$A\approx\frac{\partial f}{\partial x}\left(h^0,u^0\right),\ B\approx\frac{\partial f}{\partial u}\left(h^0,u^0\right),\ C\approx\frac{\partial h}{\partial x}\left(h^0,u^0\right),\ D\approx\frac{\partial h}{\partial u}\left(h^0,u^0\right) \tag{3.39}$$

Pracovní bod byl zvolen následující

$$\begin{aligned}u^0&=\left[u_1^0\quad u_2^0\right]^T=\left[0,5\quad 0,65\right]^T,\\ y^0&=\left[y_1^0\quad y_2^0\right]=\left[0,338\quad 0,148\right]^T.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Matice stavového popisu pak mají tvar

$$A=\begin{bmatrix}-\dfrac{k_1}{2\sqrt{k_2\left(u_{10}-u_r\right)^2-\left(h_{10}+h_{off}\right)}}-\dfrac{k_p}{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}} & \dfrac{k_p}{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}}\\ \dfrac{k_p}{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}} & -\dfrac{k_p}{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}}-\dfrac{k_v\left(u_{20}-u_p\right)}{2\sqrt{h_{20}}}\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}\dfrac{k_1k_2\left(u_{10}-u_r+\dfrac{1}{2}u_r^2\right)}{\sqrt{k_2\left(u_{10}-u_r\right)^2-\left(h_{10}+h_{off}\right)}} & 0\\ 0 & -k_v\sqrt{h_{20}}\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{3.41}$$

Po dosazení jednotlivých konstant dostáváme matice ve tvaru

$$A=\begin{bmatrix}-0,2850 & 0,039\\ 0,039 & -0,0375\end{bmatrix},$$

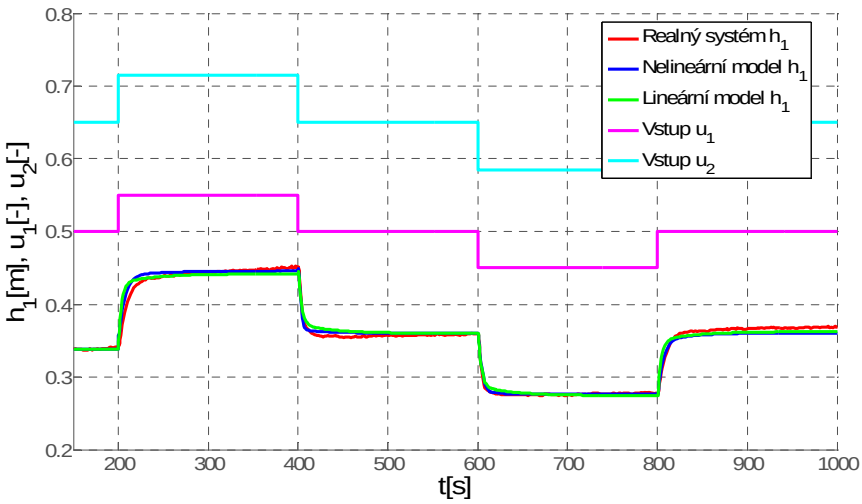
$$B=\begin{bmatrix}0,5412 & 0\\ 0 & -0,0417\end{bmatrix},$$
$$C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$
$$D=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{3.42}$$

Matice přenosových funkcí

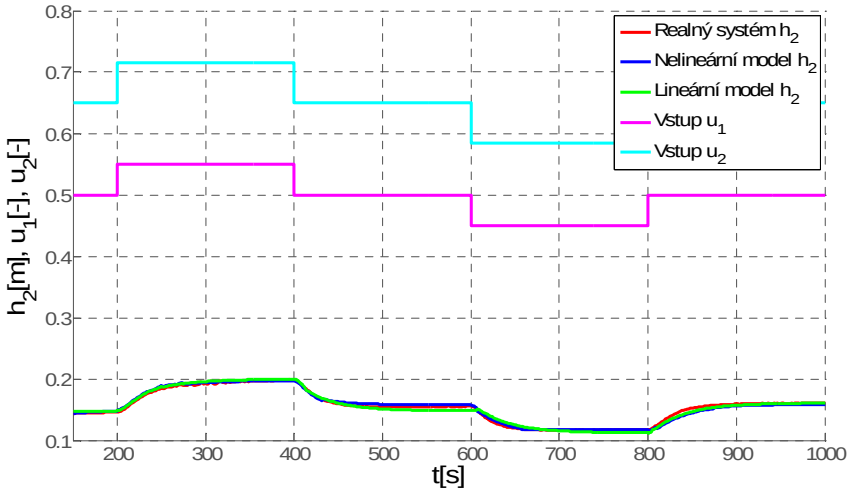
$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}g_{11}(s) & g_{12}(s)\\ g_{21}(s) & g_{22}(s)\end{bmatrix}, \tag{3.43}$$

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{0,5412(s+0,0375)}{(s+0,2957)(s+0,02683)} & \dfrac{-0,0029461}{(s+0,2957)(s+0,02683)}\\ \dfrac{0,022133}{(s+0,2957)(s+0,02683)} & \dfrac{-0,43727(s+0,285)}{(s+0,2957)(s+0,02683)}\end{bmatrix}. \tag{3.44}$$

Nyní porovnejme nelineární model a model linearizovaného systému s reálným modelem. Na obrázcích (Obr. 3.9, 3.10) jsou znázorněné odezvy nelineárního, linearizovaného systému a reálného modelu 10% skoky z pracovního bodu (3.40). Je patrné, že přenosy pro různé pracovní body se od sebe liší. Každý přenos charakterizuje systém pouze v jednom pracovním bodě. Pokud má daný nelineární systém kvalitní přibližnou linearizaci, je možné využít ji k jeho řízení v okolí příslušného ekvilibria. V dalších kapitolách nás bude zajímat pouze linearizovaný model (3.42), resp. (3.44).

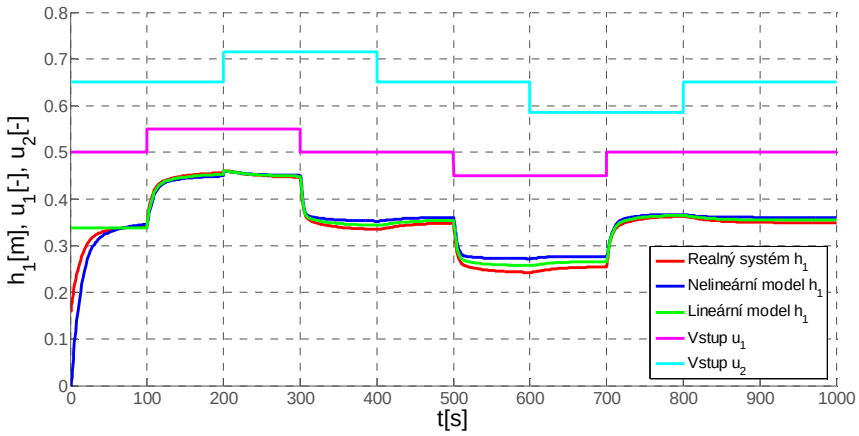


OBRÁZEK 3.9: *Průběh odezvy hladiny v první nádrži na 10% skokovou změnu vstupu* $u_{1,2}$ *z pracovního bodu*

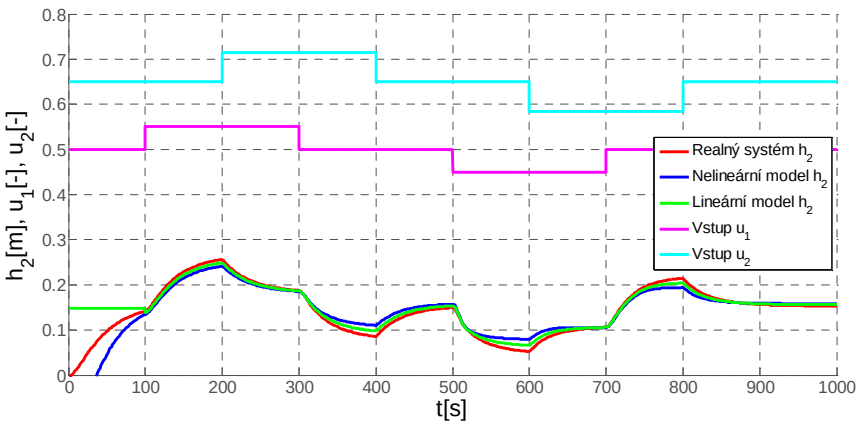


OBRÁZEK 3.10: *Průběh odezvy hladiny ve druhé nádrži na 10% skokovou změnu vstupu* $u_{1,2}$ *z pracovního bodu*

Jak jsme již předesílali v úvodu této práce, interakce se nám projeví, jestliže skoky řídicích signálů budou prováděny v různé časové okamžiky. Z obrázků (Obr. 3.9, 3.10) je vidět, že se nám interakce mezi kanály vůbec neprojevily. To je způsobeno tím, že skoky z pracovního bodu byly voleny ve stejný časový okamžik. Na následujících dvou obrázcích je porovnání odezev lineárního, nelineárního modelu a reálného systému na skoky z pracovního bodu, které byly voleny pro každý kanál zvlášť. Jak je vidět z těchto obrázků (Obr. 3.11, 3.12), změna řídicího signálu v jednom kanálu se nám projeví v obou kanálech.



OBRÁZEK 3.11: *Průběh odezvy hladiny v první nádrži na 10% skokovou změnu vstupu* $u_{1,2}$ *z pracovního bodu, interakce mezi kanály*



OBRÁZEK 3.12: *Průběh odezvy hladiny ve druhé nádrži na 10% skokovou změnu vstupu $u_{1,2}$ z pracovního bodu, interakce mezi kanály*

Při detailnějším prozkoumání (Obr. 3.11, 3.12), je vidět, že změna řídicího signálu v druhém kanálu (výpustní ventil) má menší vliv na výšku hladiny v první nádrži než změna řídicího signálu čerpadla na výšku hladiny ve druhé nádrži, tento problém bude dále rozvinut v kapitole pojednávající o analýze systému. Z těchto čtyř obrázků, které porovnávaly odezvy systému spojených nádob na různé skoky z pracovního bodu, můžeme usoudit, že se nám podařilo dostatečně přesně matematicky popsat zkoumaný systém.

3.4 Odhad stavových matic systému

V této podkapitole použijeme sofistikovanější metodu pro získání lineárního matematického popisu systému spojených nádrží. Metody odhadů parametrů předpokládají diskrétní měření signálů, čímž se získají číselné posloupnosti hodnot $u(k)$ a výstupu $y(k)$.

3.4.1 Formulace problému

Jedná se o metodu identifikace stavového modelu systému. Metoda je explicitní numerický algoritmus pro získání odhadů posloupnosti stavů a systémových matic ze vstupně/výstupních dat. Slovo Subspace vyjadřuje skutečnost, že posloupnost stavů systémů může být přímo získána z řádkových a sloupcových prostorů určitých matic vytvořených pouze ze vstupně výstupních dat. Jakmile jsou tyto stavy jednou známy, je určení systémových matic A, B, C, D jednoduchým problémem řešitelným metodou nejmenších čtverců. Dále bude me-

toda nazývána zkráceně 4SID. Metoda je stále ve vývoji, v této práci není možné obsáhnout celou tuto problematiku, proto je zde pouze okrajové odvození celé metody a praktické využití pro identifikaci systému spojených nádrží. Pro detailnější porozumění této problematiky doporučuji [14, 26].

Výhodami této metody je to, že pro určení stavových matic stačí minimální počet parametrů zadávaných uživatelem, prakticky se jedná jen o řád identifikovaného systému, k jeho určení navíc metoda poskytuje dobrý odhad. Algoritmus 4SID je iterativní. Metoda identifikuje přímo model s redukovaným řádem a odpadá tedy problém identifikace systému s vysokým řádem a následné použití metod pro redukci řádu modelu. Metoda má i několik nevýhod, především není určena pro malé soubory dat a je to abstraktní metoda, jejíž kroky jsou obtížně fyzikálně interpretovatelné.

Podstatou těchto metod založených na geometrických vlastnostech prostorů generovaných signály vstupů a výstupů a šumů je ortogonalita mezi nezávislými signály. Hankelova matice vytvořená ze změřených výstupních dat má hodnost nanejvýš n. Navíc, je-li systém dostatečně vybuzen, potom sloupcový prostor $col(Y)$ je invariantní a je shodný se sloupcovým prostorem rozšířené matice pozorovatelnosti.

Naším cílem je z naměřených dat $\{u_i, y_i\}_{i=1}^{n}$ určit řád systému a získat matice A, B, C, D stavového LTI modelu. Naměřená vstupně/výstupní data jsou pro použití algoritmů 4SID naplněna do Hankelových matice (tj. matice se stejnými prvky na vedlejších diagonálách.). Tvorba Hankelovy matice pro 4SID:

$$U_{0|2i-1} = \begin{array}{c} i\updownarrow \\ i\updownarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{j-1} \\ u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i-1} & u_i & u_{i+1} & \dots & u_{i+j-2} \\ \hline u_i & u_{i+1} & u_{i+2} & \dots & u_{i+j-1} \\ u_{i+1} & u_{i+2} & u_{i+3} & \dots & u_{i+j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{2i-1} & u_{2i} & u_{2i+1} & \dots & u_{2i+j-2} \end{array}\right) \begin{array}{c} \updownarrow past \\ \updownarrow future \end{array} = \left(\begin{array}{c} U_{0|i-1} \\ \hline U_{i|2i-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} U_p \\ \hline U_f \end{array}\right), \qquad (3.45)$$

kde

i	počet blokových řádků, musí být větší než řád odhadovaného systému (postačuje větší než je index pozorovatelnosti)
j	počet sloupců je typicky roven $s-2i+1$, kde s je počet vzorků.

Indexy $U_{0|2i-1}$ označují první a poslední prvek v prvním sloupci Hankelovy matice. U_f, U_p - matice reprezentují řádkový podprostor v $s-2i+1$ rozměrném prostoru. Matice U_p (minulé vstupy) a U_f (budoucí vstupy) jsou definovány rozdělením matice $U_{0|2i-1}$ na dvě stejné části. Matice U_p^+ a U_f^- vzniknou posunutím hranice mezi minulými a budoucími vstupy o jednu blokovou řádku dolů

$$\begin{pmatrix} U_p^+ \\ \hline U_f^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{0|i} \\ \hline U_{i+1|2i-1} \end{pmatrix}. \tag{3.46}$$

Hankelova matice výstupů $Y_{0|2i-1}$ je definována podobně.

Posloupnost stavů X_i je definována jako

$X_i \overset{def}{=} \begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} & \dots & x_{i+j-2} & x_{i+j-1} \end{pmatrix} \in R^{n\times j}$, kde index i označuje index prvního prvku v posloupnosti stavů.

X_i je matice o rozměrech (n, j) kde:

- v řádcích jsou časové posloupnosti jednoho stavu (ty tvoří vektory, se kterými 4SID metody pracují)
- ve sloupcích pak jsou hodnoty všech stavů pro daný časový okamžik

$$X_p \overset{def}{=} \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{i-1} & x_i & \dots & x_{j-1} \end{pmatrix}, \tag{3.47}$$

$$X_f \overset{def}{=} \begin{pmatrix} x_i & \dots & x_{j-1} & x_j & \dots & x_{i+j-1} \end{pmatrix}. \tag{3.48}$$

Rozšířená matice pozorovatelnosti Γ_i je definována následně

$$\Gamma_i \overset{def}{=} \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^{i-1} \end{bmatrix}^T \in R^{li\times n}. \tag{3.49}$$

Předpokládáme, že dvojice $\{A, C\}$ je pozorovatelná, což znamená, že hodnost Γ_i je rovna n.

Reverzovaná rozšířená matice řiditelnosti Δ_i je definovaná

$$\Delta_i \overset{def}{=} \begin{bmatrix} A^{i-1}B & A^{i-2}B & \dots & AB & B \end{bmatrix} \in R^{n\times mi}. \tag{3.50}$$

Předpokládáme, že dvojice $\{A, B\}$ je řiditelná, což znamená, že hodnost Δ_i je rovna n.

Toeplitzova matice impulsní odezvy systému je definována následně:

$$H_i \overset{def}{=} \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & \dots & D \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{mi \times ri}. \tag{3.51}$$

Metody deterministické 4SID si kladou za cíl určit z naměřených vstupně/výstupních dat $\{u_i, y_i\}_{i=0}^{s}$ řád systému, posloupnost stavů $\{x_i\}_{i=0}^{s}$ a následně matice stavového modelu A, B, C, D. Stavový model systému (m vstupů, l výstupů, n řád systému):

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + v(k), \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k). \end{aligned}$$

Je zřejmé, že stavový model je nejednoznačný vzhledem k volbě báze stavového prostoru. Jeden systém tak může být popsán nekonečně mnoha stavovými modely, které jsou ovšem svázány podobnostní transformací. Výsledek stavové identifikace tak není v maticích A, B, C, D numericky jednoznačný.

4SID algoritmy nehledají konkrétní stavové posloupnosti X_i, ale právě prostor generovaný řádky matice X_i, jehož libovolná báze tvoří plnou stavovou posloupnost (lze nalézt pomocí SVD). Rovnice rozšířeného stavového modelu je výchozím bodem 4SID metod. Stavový model v maticovém tvaru je definován následovně

$$\begin{aligned} Y_p &= \Gamma_i X_p + H_i U_p \\ Y_f &= \Gamma_i X_f + H_i U_f \\ X_f &= A^i X_p + \Delta_i U_p, \end{aligned} \tag{3.52}$$

kde

U_p, U_f	Hankelovy matice “minulých” a “budoucích” vstupních dat,
Y_p, Y_f	Hankelovy matice “minulých” a “budoucích” výstupních dat,
X_p, X_f	časová posloupnost “minulých” a “budoucích” stavů systému,
Γ_i	rozšířená matice pozorovatelnosti,
H_i	Toeplitzova matice impulsní odezvy,
Δ_i	reverzovaná matice říditelnosti,

(počítané z matic A, B, C, D).

Maticový zápis stavových rovnic systému odpovídá rozepsaným diferenčním rovnicím – spojují tak v sobě obvyklou rovnici aktualizace stavů a výstupní rovnici. Algoritmy 4SID využí-

vají geometrických vlastností vazeb mezi řádkovými prostory matic $U_p, U_f, Y_p, Y_f, X_p, X_f$ popsaných maticovými rovnicemi systému. Téměř výhradně pracujeme s řádkovými vektory blokových Hankelových matic (časové posloupnosti) a nikoliv např. s vektorem vstupů nebo stavů z jednoho časového okamžiku. Stavový model (3.52) můžeme přepsat do tvaru (indexy značí čas a nikoliv složky vektoru)

$$Y_p = \Gamma_i X_p + H_i U_p$$

$$\begin{bmatrix} y_0 & \dots & y_{j-1} \\ y_1 & \dots & y_j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{i-1} & \dots & y_{i+j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & 0 & \dots \\ CB & D & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_{j-1} \\ u_1 & u_2 & \dots & u_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i-1} & u_i & \dots & u_{i+j-2} \end{bmatrix}, \tag{3.53}$$

$$X_f = A^i X_p + \Delta_i U_p$$

$$\begin{bmatrix} x_i & \dots & x_{i+j-1} \end{bmatrix} = A^i \begin{bmatrix} x_0 & \dots & x_{j-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^{i-1}B & \dots & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 & \dots & u_{j-1} \\ u_1 & \dots & u_j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i-1} & \dots & u_{i+j-2} \end{bmatrix}, \tag{3.54}$$

Vysvětlení významu matic Y_p, U_p:

V prvním sloupci

$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{i-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{i-1} \end{bmatrix}$ jsou výstupy počítány jako odezva na počáteční stav x_0 a posloupnost vstupů,

ve druhém sloupci

$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \end{bmatrix}$ jsou výstupy počítány jako odezva na počáteční stav x_1 a posloupnost vstupů.

Identifikační metoda pracuje na základě velmi jednoduché vlastnosti řádkových prostorů datových Hankelových matic, přesněji řečeno zde využíváme průsečíkový algoritmus [14, 26]. Je založený na možnosti získat posloupnost stavů z průniku dvou prostorů, které jsou generovány I/O daty. Stavovou posloupnost X_f pak dostaneme jako průnik historických a budoucích dat

$$row\left(X_f\right) = row\begin{pmatrix} U_p \\ Y_p \end{pmatrix} \cap row\begin{pmatrix} U_f \\ Y_f \end{pmatrix}, \tag{3.55}$$

to ukazuje, že stav představuje propojení mezi historickým a budoucím vývojem systému. Nalezení průniku vychází z tzv. principiálních úhlů a principiálních směrů mezi lineárními prostory, což je zobecnění koncepce úhlu mezi dvěma vektory na úhly mezi dvěma prostory. Prostor průniku je potom určen principiálními směry odpovídajícími nulovým principiálním úhlům. Principiální úhly a principiální směry mezi podprostory se počítají pomocí SVD. Pro tento účel se vytvoří následující matice

$$W_p = \begin{pmatrix} U_p \\ Y_p \end{pmatrix}, W_f = \begin{pmatrix} U_f \\ Y_f \end{pmatrix}, \tag{3.56}$$

$$\mathcal{M} = W_p^T \left(W_p W_p^T\right)^+ W_p W_f^T \left(W_f W_f^T\right)^+ W_f = USV^T . \tag{3.57}$$

Matice S má na diagonále kosíny principiálních úhlů mezi principiálními směry danými řádky matice U a V^T. Počet principiálních úhlů blížících se nule udává odhad dimenze průniku a tím také řád systému. Odpovídající principiální směry pak tvoří bázi tohoto průniku a tím i platnou posloupnost stavů systému. Následující obrázek (Obr. 3.13) nám ilustruje odhad řádu modelu pro náš systém dvou spojených nádob (v tomto případě je $s = 2174, i = 10$), dále bylo naměřeno $2s$ vzorků. První polovina naměřených dat byla použita na identifikaci systému, zbývající polovina na validaci získaných výsledků, (to odpovídá času $s = t = \left(500/2\right)/T_s$). Z obrázku (Obr. 3.13) je vidět, že odhadovaný řád modelu je 2, což koresponduje s výsledky z předcházející podkapitoly.

Začneme-li přidávat k měření šum, bude se zhoršovat jednoznačnost odhadu řádu systému. Minulá a budoucí data budou postupně ztrácet průnik, principiální úhly budou růst, pomocí SVD můžeme určit aproximaci průniku pro zvolený řád systému.

X_f leží v řádkovém prostoru budoucích dat W_f, tj. $row\left(X_f\right) \in row\begin{pmatrix} U_f \\ Y_f \end{pmatrix}$,

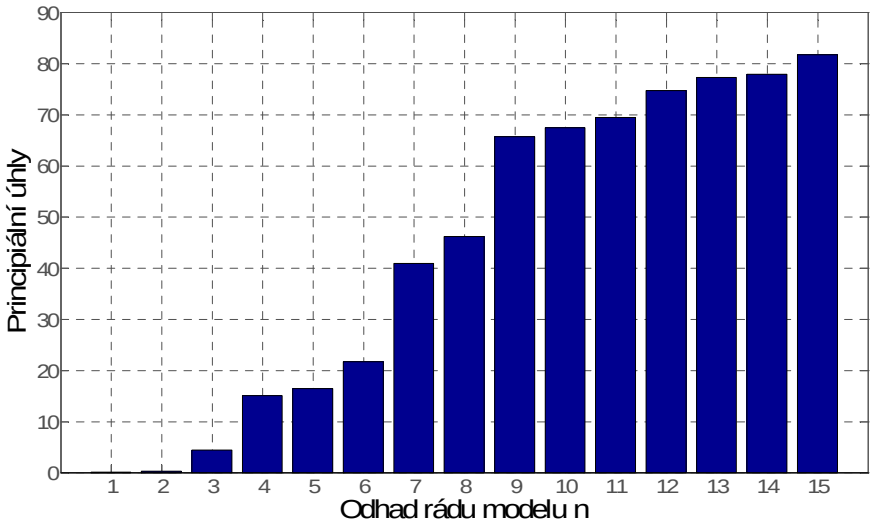
X_p leží také v řádkovém prostoru minulých dat W_p, tj. $row\left(X_f\right) \in row\begin{pmatrix} U_p \\ Y_p \end{pmatrix}$,

prostor průniku má dimenzi rovnou řádu systému n

$$\dim\left(row\begin{pmatrix} U_p \\ Y_p \end{pmatrix} \cap row\begin{pmatrix} U_f \\ Y_f \end{pmatrix} \right) = n,$$

předchozí rovnost platí za splnění předpokladu, že

- řádky Hankelových matic U_p, U_f jsou lineárně nezávislé, to lze zajistit dostatečným počtem vzorků,
- řádky matic X_p, X_f jsou lineárně nezávislé. To odpovídá v identifikaci obvyklé podmínce dostatečného vybuzení systému.



OBRÁZEK 3.13: *Odhad řádu modelu n metodou 4SID*

Výpočet stavových matic:

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} & \dots & x_{i+j} \\ y_i & \dots & y_{i+j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i & \dots & x_{i+j-1} \\ u_i & \dots & u_{i+j-1} \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} X_i \\ U_{i|i} \end{bmatrix}^T \backslash \begin{bmatrix} X_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{bmatrix}^T \right]^T. \tag{3.58}$$

Ukázkový postup identifikace lineárního stavového modelu metodou 4SID (průnikový algoritmus):

1) volba počtu řádek Hankelových matic i, umožní identifikovat systémy až do i-tého řádu,
2) z naměřených vzorků sestavíme datové Hankelovy matice $U_p, U_f, Y_p, Y_f, W_p, W_f$,
3) vypočteme součin projekčních matic a provedeme jejich singulární rozklad $\mathcal{M} = USV^T$.

   Z matice singulárních čísel S vypočteme principiální úhly:

   $\text{prinuhl} = \text{acos}\left(diag\left(S\right)\right) * 180/\pi$,

z počtu principiálních úhlů blížících se nule odhadneme řád systému. Odpovídající řádky matice U (s normou rovné jedné) pak tvoří posloupnost stavů. Ta je nejednoznačná vůči podobnostní transformaci,

4) nakonec jsou z posloupnosti stavů, vstupu a výstupu pomocí nejmenších čtverců určeny matice systému A, B, C, D.

3.4.2 Naměřená data

Pro potřeby identifikace pomocí algoritmu 4SID jsme naměřili odezvu reálného systému na náhodně generované vstupy okolo zvoleného pracovního bodu (3.40). Celkem jsme naměřili přes 4000 vzorků. Tento počet vzorků jsme rozdělili na polovinu. Pomocí první poloviny sady vzorků jsme identifikovali náš systém. Zbývající sadu vzorků jsme použili na validaci dat z identifikovaného systému a z odezvy našeho reálného systému. Obrázek (Obr. 3.14) ukazuje porovnání naměřené odezvy a odezvy lineárního modelu, který jsme získali pomocí algoritmu 4SID. Pomocí vztahu (3.59) jsme spočetli procentuální shodu identifikovaného lineárního modelu a reálného systému, resp. k výpočtu jsme použili odezvu na zvolený vstupní signál. Z těchto hodnot i z obrázku se dá usuzovat, že metoda vykazuje uspokojivé výsledky.

$$FIT = \left(1 - \left\| Y_m - Y_{id} \right\| / \left\| Y_m - mean\left(Y_m\right) \right\| \right) 100 [\%] \tag{3.59}$$

$$FIT_{h1} = 66{,}19\%,\ FIT_{h2} = 73{,}40\%$$

Obrázek (Obr. 3.15) pak zobrazuje rozdíl výšek hladin v jednotlivých nádržích reálného systému a lineárního modelu. Z této chyby odhadu jsme spočetli statistické údaje, abychom mohli vyvodit závěry z této použité metody identifikace.

$$\begin{aligned} mean\left(e_{h1}\right) &= 0{,}0015[\mathrm{m}],\ \sigma_{eh1} = 2{,}63.10^{-4}[\mathrm{m}] \\ mean\left(e_{h2}\right) &= 0{,}0014[\mathrm{m}],\ \sigma_{eh1} = 6{,}70.10^{-5}[\mathrm{m}] \end{aligned} \tag{3.60}$$

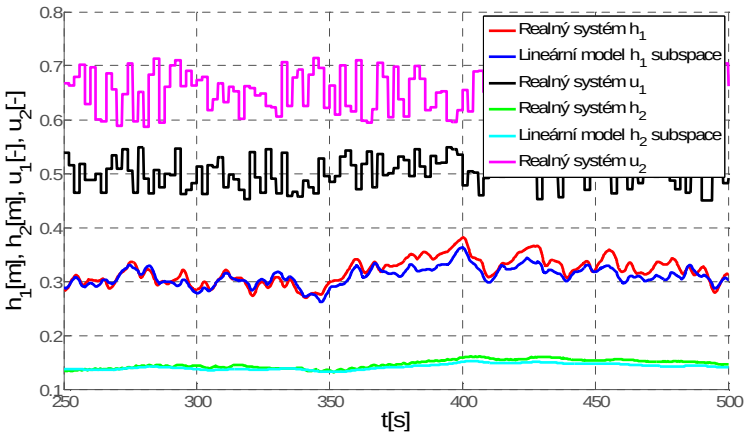
Střední hodnota chyby odhadu obou výšek hladin, která se spočetla z rozdílu výšek hladin reálného systému a identifikovaného lineárního modelu, se pohybuje v jednotkách milimetru. I z hlediska těchto statistických údajů nám algoritmus 4SID aplikovaný na náš problém poskytuje uspokojivé výsledky.

Tato podkapitola měla za cíl přiblížit jiný přístup k identifikaci MIMO systému a porovnat ho s experimentální identifikací. Jak je vidět z obrázků (Obr. 3.16, 3.17) algoritmem 4SID jsme dosáhli skoro stejných výsledků jako v případě experimentální identifikace. Sice o

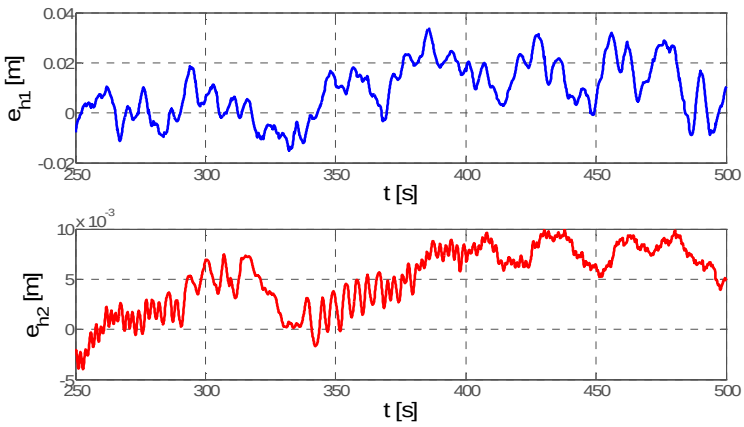
něco přesnější shody bylo dosáhnuto experimentální identifikací, ale v tomto případě si je potřeba uvědomit, že konstanty nelineárního modelu byly dolaďovány takovým způsobem, abychom dosáhli co nejlepší shody, kdež to při použití algoritmu 4SID jsme žádné dolaďování neprováděli. Pro úplnost, zde ještě uvedeme stavový popis, který byl získán algoritmem 4SID

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0,99853 & 0,00055 \\ 0,00026 & 0,99931 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0,00225 & -0,00095 \\ 8,04.10^{-5} & 2,09.10^{-5} \end{bmatrix} u(k), \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(k). \end{aligned} \tag{3.61}$$

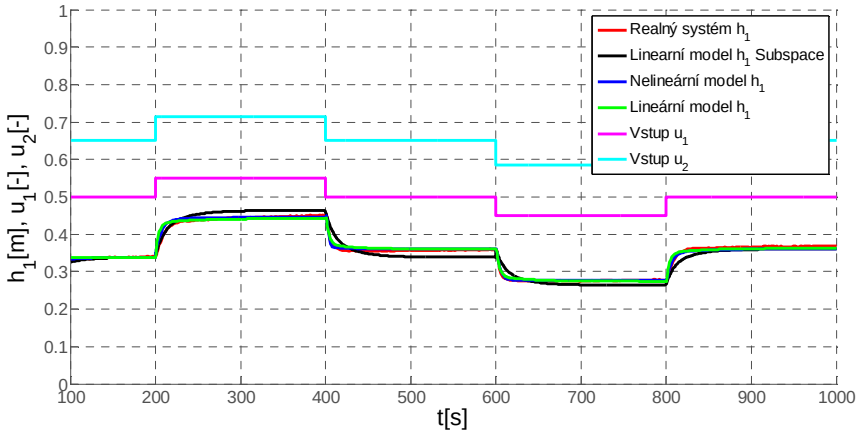
Ze zde vyvozených závěrů plyne, že jsme dosáhli při identifikaci velice uspokojivých výsledků. Pro další kapitoly budeme uvažovat matice systému (3.42), které jsme získali experimentální identifikací v kapitole 3.3.



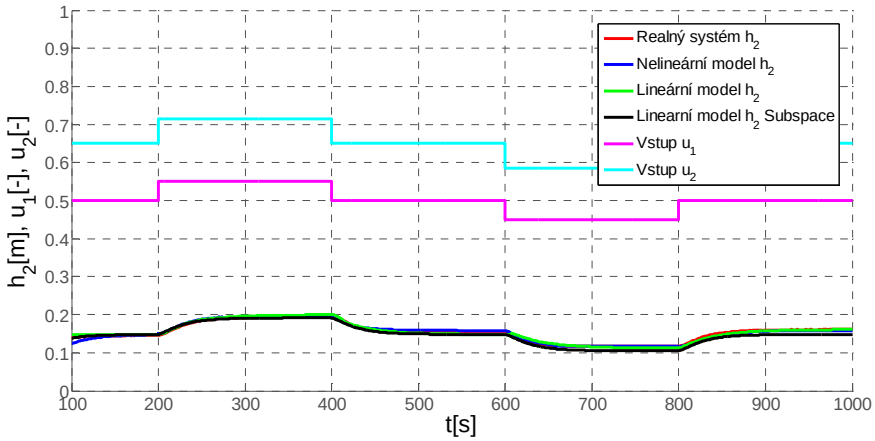
OBRÁZEK 3.14: *Porovnání odezev na vstupní signál reálného systému a identifikovaného systému algoritmem 4SID*



OBRÁZEK 3.15: *Chyba odhadu výšek hladin mezi reálným systémem a lineárním modelem získaným pomocí 4SID*



OBRÁZEK 3.16: *Průběh odezvy hladiny v první nádrži na 10% skokovou změnu vstupu* $u_{1,2}$ *z pracovního bodu, porovnání s algoritmem 4SID*



OBRÁZEK 3.17: *Průběh odezvy hladiny v druhé nádrži na 10% skokovou změnu vstupu* $u_{1,2}$ *z pracovního bodu, porovnání s algoritmem 4SID*

Kapitola 4

Analýza systému

V této kapitole provedeme analýzu identifikovaného systému dvou spojených nádrží. Závěry vyvozené v této kapitole použijeme v následujících kapitolách, které se budou věnovat regulaci výšek hladin v nádržích.

4.1 Stabilita systému

V tomto případě jsou všechna vlastní čísla matice A systému (3.42) v levé části komplexní poloroviny. Tudíž můžeme tvrdit, že námi identifikovaný systém v okolí ekvilibria (3.40) je asymptoticky stabilní. Dále také můžeme tvrdit, že je systém BIBO stabilní. [1, 4]

4.2 Řiditelnost a pozorovatelnost

Systém (3.42) má plnou sloupcovou hodnost matice pozorovatelnosti a také plnou řádkovou hodnost matice řiditelnosti. Z toho plyne, že systém (3.42) je plně pozorovatelný a řiditelný. Za těchto podmínek je tedy i plně detekovatelný a stabilizovatelný. Index řiditelnosti systému (3.42) je $\mu \overset{def}{=} \max \mu_i = 1$. Index pozorovatelnosti je $\upsilon \overset{def}{=} \max \upsilon_i = 1$. [1]

4.3 Nuly a póly systému

Nuly a póly zjistíme pomocí Smith-McMillanovy formy přenosové matice. Pro náš identifikovaný systém s maticí přenosových funkcí (3.44), můžeme psát

$$G(s)=\frac{1}{0,079+0,32s+s^2}\begin{bmatrix}0,02+0,54s & -0,0027\\ 0,021 & -0,011-0,037\end{bmatrix}=\frac{1}{d(s)}N(s). \qquad (4.1)$$

Smith-McMillanova forma, ze které snadno určíme nuly a póly našeho systému, je

$$SM_G(s)=\begin{bmatrix}\tilde{\Lambda}(s) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\tilde{\Lambda}(s)\overset{def}{=}\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon_1(s)}{\Psi_1(s)} & \dots & \frac{\varepsilon_r(s)}{\Psi_r(s)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+0,2957)(s+0,02682)} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}. \qquad (4.2)$$

Póly $G(s)$ jsou kořeny pólového polynomu

$$p_G(s)=\Psi_1(s)\times\ldots\times\Psi_r(s)=(s+0,2957)(s+0,02682)\Rightarrow\{p_1=-0,2957,\, p_2=-0,02682\}. \qquad (4.3)$$

Přenosové nuly jsou kořeny nulového polynomu $z_G(s)=\varepsilon_1(s)\times\ldots\times\varepsilon_r(s)$. V tomto případě systém nemá žádné přenosové nuly.

4.4 Interakce a RGA faktor

Řízení MIMO systémů je složitější zejména kvůli interakcím mezi jednotlivými vstupy a výstupy. Míru těchto interakcí můžeme určit pomocí RGA, tzv. matice relativních zesílení. RGA se používá jako hlavní nástroj pro určení párování vstupů a výstupů MIMO systému při návrhu decentralizovaného řízení. RGA nám tedy ukáže, které párování vstupů a výstupů MIMO systémů bude s nejmenší mírou interakce, pro následný možný návrh izolovaných regulátorů, konkrétně pro tyto vstupy a výstupy. [23]

Nechť u_j a y_i bude vstupně – výstupní pár mnoharozměrového systému $G(s)$ a nechť je naší úlohou řízení výstupu y_i vstupem u_j v těchto dvou extrémních případech:

- všechny zpětnovazební smyčky budou otevřené, tj. $u_k=0,\forall k\neq j$,
- všechny zpětnovazební smyčky budou zavřené, tj. $y_k=0,\forall k\neq i$.

Zesílení pro tyto dva extrémní případy:

- otevřená smyčka $\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial u_j}\right)_{u_k=0,k\neq j} = g_{ij} = \left[G(s)\right]_{ij} \Rightarrow y_i = \left[G(s)\right]_{ij} u_j$,

- uzavřená smyčka $\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial u_j}\right)_{y_k=0,k\neq i} = \hat{g}_{ij} = 1/\left[G^{-1}(s)\right]_{ji} \Rightarrow y_i = \dfrac{1}{\left[G^{-1}(s)\right]_{ji}} u_j$.

Pro $m\times m$ MIMO systém je možný počet párování $m!$. V našem případě je tedy možný počet párování 2. Poměr zesílení při otevřených smyčkách a uzavřených smyčkách vyjadřuje míru interakčnosti daného párování u_j a y_i, tzv. $ij-$té relativní zesílení bude

$$\lambda_{ij} = \frac{g_{ij}}{\hat{g}_{ij}} = \left[G\right]_{ij}\left[G^{-1}\right]_{ji}.$$

RGA je matice relativních zesílení, kde součet prvků v každém řádku a v každém sloupci je rovný 1. RGA matici systému $G(s)$ dostaneme jako

$$RGA(G) = \Lambda(G) = G\times\left(G^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \cdots & \lambda_{mm} \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

kde $\times$ je součin po prvcích.

Nyní uvedeme následující interpretaci λ_{ij}:

- jakmile je $\lambda_{ij} \cong 1$, tak jsou interakce pro párování u_j a y_i minimální, jelikož zesílení z u_j na y_i je ovlivněné uzavřením jiných smyček. Doporučené meze jsou $0,67 < \lambda_{ij} < 1,5$,
- jestliže je $\lambda_{ij} < 0$, tak zesílení uzavřené smyčky má opačné znaménko než zesílení v otevřené smyčce, to může vést k nestabilitě při regulaci,
- jestliže je $\lambda_{ij} >> 1$, typicky $5-10$ a nebo i více, tak je takovýto systém velice těžké řídit, kvůli silným interakcím a citlivostem k neurčitostem modelu.

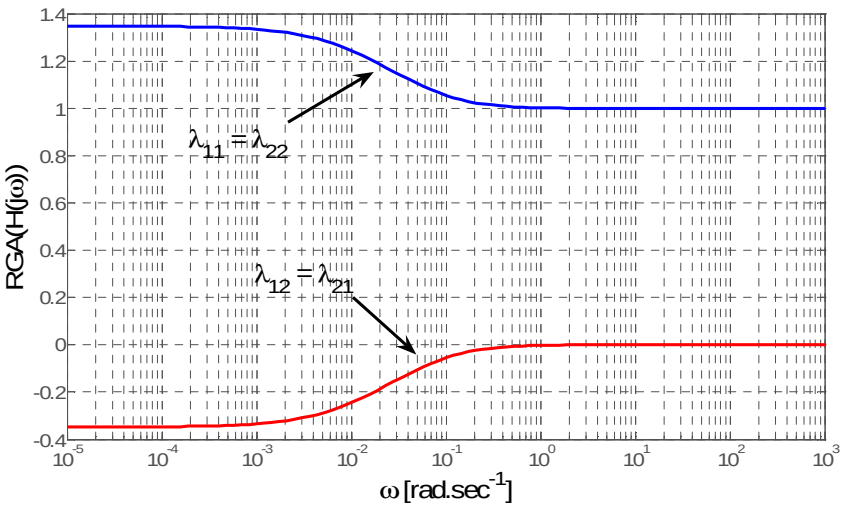
Z těchto uvedených hledisek je proto při párování vstupů a výstupů pro návrh decentralizovaného řízení doporučeno preferovat párování, když λ_{ij} je blízko 1 a vyhnout se situacím, kdy je λ_{ij} nulové a nebo záporné. Pro náš systém s dvěma vstupy a dvěma výstupy dostáváme matici relativních zesílení ve tvaru

$$RGA(G) = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix},$$

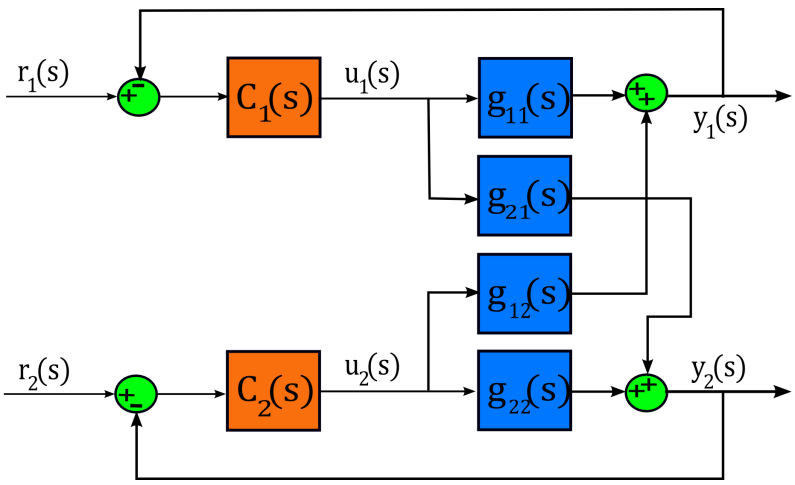
jak jsme již uvedli, tak řádkový a sloupcový součet je roven 1, pak si můžeme dovolit psát

$$RGA(G)=\begin{bmatrix}\lambda & 1-\lambda\\ 1-\lambda & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1,3477 & -0,3477\\ -0,3477 & 1,3477\end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Z matice relativního zesílení nám tedy vyplývá, že pro návrh decentralizovaného řízení je doporučeno řídit vstupem u_1 výstup y_1 a vstupem u_2 výstup y_2. Následující obrázek (Obr. 4.1) ukazuje průběh RGA v závislosti na frekvenci. Je vidět, že pro rostoucí frekvenci se nám zvolené párování blíží k hodnotě 1, zatímco opačné párování k hodnotě 0. Obrázek (4.2) pak schématicky znázorňuje zvolené párování pro návrh decentralizovaného řízení MIMO systému.



OBRÁZEK 4.1: *RGA v závislosti na frekvenci*



OBRÁZEK 4.2: *Zvolené párování systému pro návrh decentralizovaného řízení*

4.5 Funkční řiditelnost systému

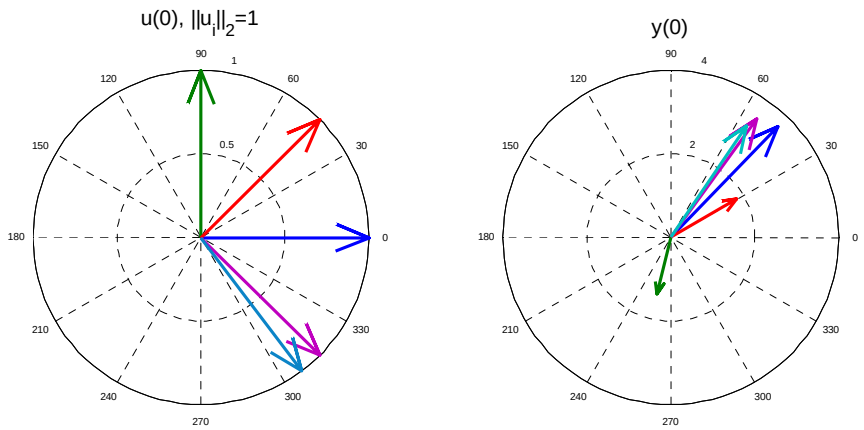
Při analýze MIMO systému si je potřeba uvědomit, že na rozdíl od SISO systému je zesílení závislé, jak na frekvenci, tak také na směru vstupu, není závislé na amplitudě vstupu. Tento podstatný rozdíl plyne z toho, že signály jsou vektory, a tak se musí nejdříve určit velikost jednotlivých prvků pomocí nějaké normy. Nyní budeme uvažovat konstantní přenosovou funkci (3.44), tj.

$$G(0)=\begin{bmatrix} 2,5592 & -0,3343 \\ 2,6616 & -1,3477 \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Na tento systém (4.6) aplikujeme postupně 5 vstupů, které mají stejnou normu (velikost) $\|u_i\|_2 = 1$, ale různé směry, vstupy jsou zobrazeny na obrázku (Obr. 4.3). Přestože mají všechny vstupní signály stejnou velikost, odezvy na ně (příslušné výstupní signály) mají velikost různou, jak se sami můžeme přesvědčit na obrázku (Obr. 4.3). Z obrázku (Obr. 4.3) tedy pro nás plyne závěr, že zesílení u MIMO systému je opravdu závislé také na směru vstupu. Odezva na vstupní signály byla spočtena dle vztahu

$$y(0)=G(0)*u(0). \tag{4.7}$$

V tomto případě ještě vyneseme do grafu závislost zesílení na směru vstupu při jednotkové velikosti vstupu. Tato závislost je zobrazena na obrázku (Obr. 4.4). Jak se přesvědčíme dále, maximální hodnota zesílení odpovídá maximálnímu singulárnímu číslu matice (4.6) a minimální hodnota zesílení na druhou stranu odpovídá minimálnímu singulárnímu číslu.

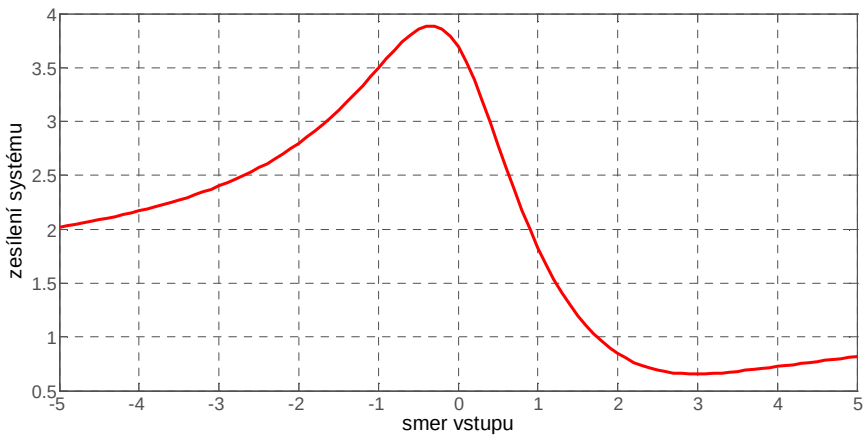


OBRÁZEK 4.3: *Směry u MIMO systému v závislosti na zesílení*

Funkční řiditelnost systému (4.6) můžeme vidět v (4.8)

$$SVD\left(G(0)\right)=USV^{H},\quad U=\begin{bmatrix}-0,6510 & -0,7591\\ -0,7591 & 0,6510\end{bmatrix},$$
$$S=\begin{bmatrix}3,8896 & 0\\ 0 & 0,6580\end{bmatrix},V^{H}=\begin{bmatrix}-0,9478 & -0,3190\\ 0,3190 & -0,9478\end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

SVD rozklad nám poskytuje lepší informace o zesílení systému. Jelikož je jedno singulární číslo menší jak jedna, daly by se očekávat problémy se vstupními nejistotami, ale jak se přesvědčíme dále, tato hypotéza bude vyvrácena. Nyní budeme pokračovat ve zkoumání vlastností matice (4.6). Největší zesílení je ve vstupním směru $\bar{v}=\left[-0,9478 \quad 0,3190\right]^{T}$ a je to $\bar{\sigma}=3,8896$. Nejmenší zesílení je $\underline{\sigma}=0,6580$ a to ve vstupním směru $\bar{v}=\left[-0,3190 \quad -0,9478\right]^{T}$.



OBRÁZEK 4.4: *Závislost zesílení na směru vstupu při jednotkové velikosti vstupu*

Podmíněnost systému, která je definována jako podíl největšího singulárního čísla nejmenším singulárním číslem, je

$$\gamma(G)=\frac{\bar{\sigma}}{\underline{\sigma}}=\frac{3,8896}{0,6580}=5,9115. \tag{4.9}$$

Z tohoto čísla bychom usoudili, že je systém dobře podmíněný. Je však potřeba si uvědomit, že takto spočtené číslo podmíněnosti je závislé na škálování. Proto se raději používá minimalizované číslo podmíněnosti, které je definováno jako (4.10), kde matice D jsou škálovací matice. Takto definované číslo podmíněnosti se špatně počítá, ovšem dá se použít horní odhad strukturovaného singulárního čísla. V tomto případě je horní odhad $\gamma^{*}=1,7506$.

$$\sqrt{\gamma^{*}(G)}=\min_{D_I,D_O}\bar{\sigma}\left(DHD^{-1}\right),\quad D=diag\left\{D_I,D_O\right\},H=\begin{bmatrix}0 & G^{-1}\\ G & 0\end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Jako rozumný odhad čísla podmíněnosti lze použít RGA faktor (4.5). Součet absolutních hodnot prvků RGA matice je velmi blízko minimalizovanému citlivostnímu číslu γ^*. V tomto případě je součet absolutních prvků roven $\gamma_{RGA} = 3,3908$. Dále nám RGA faktor dává dobrou indikaci citlivosti systému na neurčitosti. V tomto případě jsou hodnoty RGA matice malé a tudíž nemusíme očekávat problémy s citlivostí na neurčitosti.

Na závěr shrneme poznatky, které jsme získali v této kapitole. Lineární model je stabilní v okolí svého ekvilibria. Je detekovatelný a stabilizovatelný. Dále jsme zjistili, že je minimální ve fázi, tj. nemá žádné nestabilní nuly, které bychom museli zohlednit při návrhu regulátorů. Určili jsme párování pro návrh decentralizovaného řízení z RGA faktoru. Systém je interaktivní, oba vstupy ovlivňují oba výstupy. Přenosová matice má i nediagonální prvky. Jak jsme se mohli přesvědčit na obrázcích (Obr. 3.11, 3.12), je jasně vidět, že při změně jednoho vstupu dochází ke změně obou výstupů. Výběr pořadí těchto změn vstupů bude hrát také velkou roli při návrhu regulátorů. Jak bude ukázáno v následující kapitole, při změně referenčních signálů ve stejný časový okamžik se neprojeví interaktivnost jednotlivých regulačních smyček. Proto pro dokázání interaktivního řízení se provádí změna referenčního signálu v různé časové okamžiky nezávisle na sobě. Systém je dobře podmíněný, nemělo by nastat, že některé vstupy budou mít velký vliv na výstup a jiné malý. Dále si je potřeba uvědomit, že takto provedená analýza je závislá na frekvenci, byl zde ilustrován pouze případ, kdy jsme uvažovali konstantní přenosovou matici (4.6).

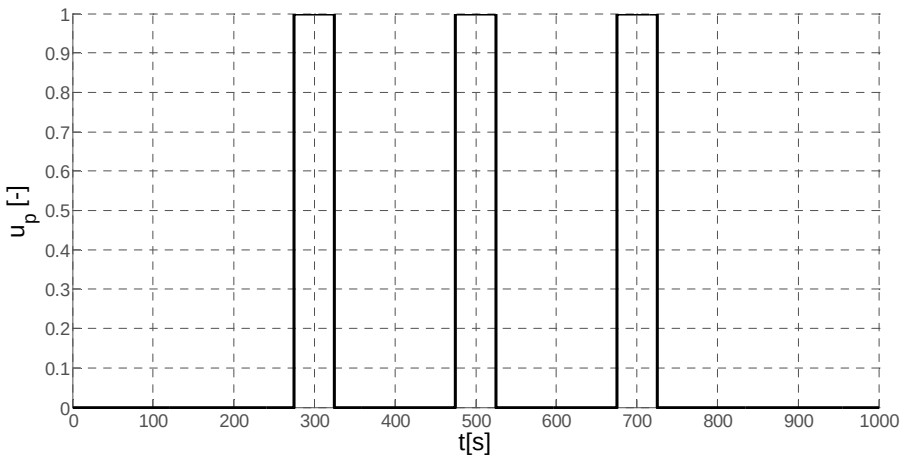
Z takto provedené analýzy našeho lineárního modelu popisující spojené nádrže neočekáváme žádné problémy s řízením a můžeme přistoupit k návrhu jednotlivých typů regulátorů. Více o analýze systému je možno se dočíst v [23].

Kapitola 5

Návrh regulátorů pro řízení výšek hladin systému spojených nádob

V předcházejících kapitolách jsme odvodili stavový popis, dále jsme uvedli některé základní vlastnosti identifikovaného MIMO systému spojených nádrží, které jsou potřebné pro návrh regulátorů.

Ve třech podkapitolách se budeme věnovat návrhu decentralizovaného řízení PIDf regulátorem, návrhu centralizovaného řízení stavovým LQG regulátorem a návrhu regulátoru za použití robustních metod, jako je minimalizace $\mathcal{H}_\infty$ normy smíšené citlivostní funkce a robustní tvarování frekvenční charakteristiky. Ve čtvrté podkapitole uvedeme způsob návrhu regulátoru s eliminací interakcí.

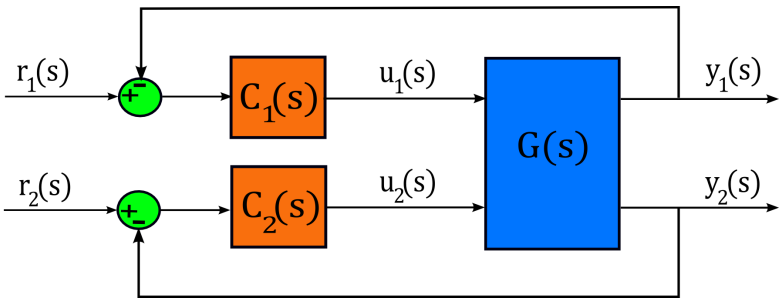


OBRÁZEK 5.1: *Průběh poruchové signálu při regulaci systému spojených nádrží*

Jak již bylo zmíněno v úvodu, pro lepší přehlednost jsou data z jednotlivých měření zpracována do více obrázků. Z obrázků jsou vyjmuty příslušné akční zásahy, které jsou zobrazeny samostatně. Jestliže bude v textu explicitně napsáno, že byl regulační obvod vystaven při regulaci na požadovanou výšku hladin také poruchovému signálu, má se za to, že poruchový signál má průběh zobrazený na obrázku (Obr. 5.1). Je vhodné na tomto místě připomenout, že poruchovým signálem se má na mysli uzavírání, resp. otevírání přepouštěcího ventilu mezi nádržemi.

5.1 Decentralizovaný PIDf regulátor

Rozdíl mezi řízením SISO a MIMO systému je zejména ten, že u MIMO systémů jednotlivé vstupy obecně ovlivňují všechny výstupy, a to se při více-smyčkové regulaci nutně projeví na interaktivnosti jednotlivých smyček a na návrhu smyčkových regulátorů. Za neinteraktivní řízení považujeme takové řízení MIMO systému, při kterém je matice přenosových funkcí uzavřeného systému diagonální.



OBRÁZEK 5.2: *Schématické znázornění decentralizovaného řízení MIMO systému*

Přidržme se prozatím strukturálního schématu smyčkové regulace 2x2 MIMO systému z předchozího obrázku. První smyčkový regulátor je zapojen mezi dvojici (u_1, y_1), druhý mezi dvojici (u_2, y_2). Pro přiřazení smyčkových regulátorů jsme vycházeli ze závěru z podkapitoly 4.4. Dalo by se snadno dokázat, že toto párování vstupů a výstupů pro smyčkové regulátory má zásadní význam z hlediska apriorní dosažitelnosti minimální interaktivnosti regulačních smyček. Je potřeba si uvědomit, že pro více smyčkovou regulaci je návrh regulátorů vícestupňový návrhový proces. Z obrázku (Obr. 4.2) vidíme, že dílčí přenosy znemožňují nezávislý návrh smyčkových regulátorů klasickými metodami syntézy SISO systému, a řízení

je tak interaktivní. Z blokového schématu je také dále zřejmé, že při sekvenčním způsobu nastavování parametrů regulátoru v jedné smyčce závisí model řízeného systému i na nastavení parametrů regulátoru v druhé smyčce, přenosy $g_{11}(s)$, resp. $g_{22}(s)$ jsou modifikovány a mohou výrazně měnit své vlastnosti (nestabilita, neminimální fázovost) a limitovat dosažitelnou kvalitu regulace.

Decentralizované řízení je takové zpětnovazební řízení, kdy navrhujeme regulátory zvlášť pro jednotlivé páry vstupů a výstupů. Párování vstupů a výstupů určujeme podle RGA faktoru.

Regulátory budeme navrhovat pro linearizovaný minimálně fázový systém v pracovním bodě zvoleném v kapitole 3.3. Matice přenosových funkcí je uvedena v (3.44). Regulátory navrhneme jen pro diagonální přenosy $g_{11}(s)$ a $g_{22}(s)$ matice přenosů. Přenosy $g_{12}(s)$ a $g_{21}(s)$ budeme ignorovat. Situaci ilustruje blokové schéma na obrázku (Obr. 5.2). V podstatě budeme mít diagonální strukturu přenosové matice regulátorů $C(s) = \mathrm{diag}\{C_1(s), C_2(s)\}$, tj. regulátor $C_1(s)$ bude zapojený mezi dvojici $u_1 \to y_1$ a $C_2(s)$ mezi dvojici $u_2 \to y_2$.

Nyní nám tedy zbývá navrhnout dva PIDf regulátory pro dva SISO systémy druhého řádu. Regulátory byly navrhnuty pomocí metody geometrického místa kořenů pro překmit max. 10% a pro akční zásah v intervalu 0-1. Přenosová funkce PID regulátoru s filtrem D složky má tvar

$$C_{1,2}(s) = k_p\left[1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d}{1 + sT_d / N}\right], \quad C(s) = \begin{bmatrix} C_1(s) & 0 \\ 0 & C_2(s) \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

V tomto případě jsou jednotlivé konstanty následující, pro $C_1(s)$ dostáváme:

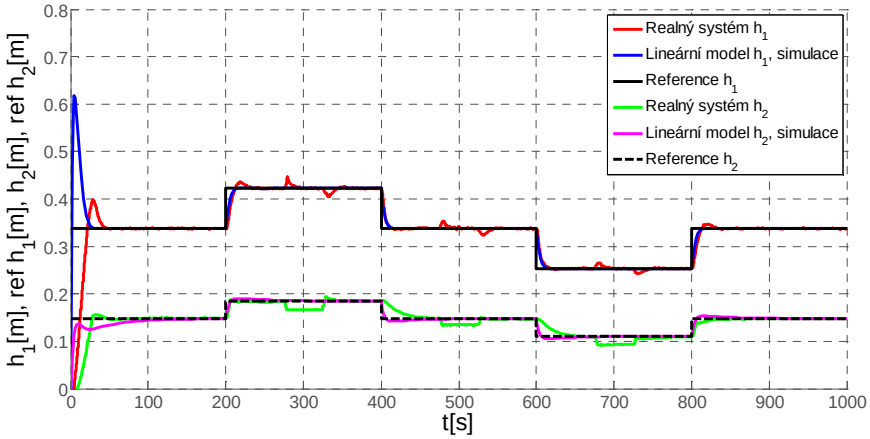
$$k_p = 0{,}11; \quad T_d = 1{,}7; \quad T_i = 0{,}11; \quad N = 4, \tag{5.2}$$

pro $C_2(s)$ dostáváme:

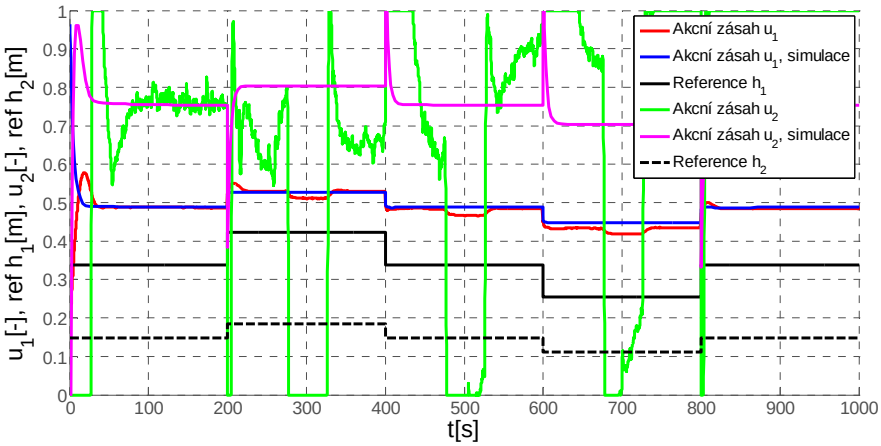
$$k_p = 2{,}5; \quad T_d = 0{,}42; \quad T_i = 2{,}5; \quad N = 1{,}5. \tag{5.3}$$

Na obrázku (Obr. 5.3) je znázorněna odezva systému s PIDf regulátory na průběh referenčního signálu, obrázek (Obr. 5.4) zobrazuje akční zásahy. V první části byla provedena regulace do zvoleného pracovního bodu a následně byly provedeny jednotkové skoky z pracovního bodu oběma směry. Z obrázku je patrné, že pro skoky volené ve stejný časový okamžik se neprojeví interakce mezi jednotlivými kanály. Do regulačního obvodu byl zaveden poruchový signál v podobě uzavření přepouštěcího ventilu mezi nádržemi. Je vidět, že takto nastavené

regulátory se dokáží s touto poruchou dostatečně rychle vyrovnat a sledovat nastavené referenční hladiny. Přípustné meze řídicích signálů na čerpadle a výpustním ventilu jsou splněné.



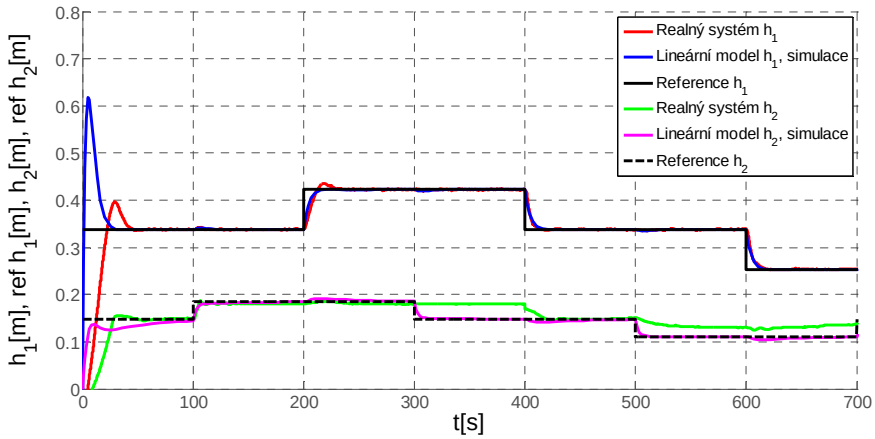
OBRÁZEK 5.3: *Regulace výšky hladin s PIDf regulátorem, při působící poruše - Odezva*



OBRÁZEK 5.4: *Regulace výšky hladin s PIDf regulátorem, při působící poruše – Akční zásahy*

Jestliže zvolíme jiné pořadí skoků referenčního signálu, již se nám mezi kanály objeví vzájemná interakce. Z obrázků (Obr. 5.5, 5.6) je vidět, že změna referenčního signálu $ref\ h_1$ má vliv jak na výstup h_1 tak h_2 a naopak. Z odezvy, která je zobrazena na obrázku (Obr 5.6) je vidět, že dochází k saturaci akčního členu, výpustní ventil je otevřen na maximum, ale z první nádrže přiteče za časový okamžik více vody, než stačí vytéct, tudíž pak systém reguluje výšku hladiny v druhé nádrži s ustálenou regulační odchylkou, která je daná fyzikálními možnostmi systému spojených nádob. Při návrhu regulátoru pro MIMO systém si musíme uvědomit, že hodnoty nastavené na výpustním ventilu nemohou být libovolné, ale musí splňovat omezení dané samotným systémem. Tento případ měl ilustrovat špatnou volbu výšek pracovních hladin h_1 a h_2, kdy v tomto případě byly voleny daleko od sebe. Kdybychom je

zvolily blíže k sobě, tak jak je zvoleno v dalších průbězích, průtok prostředním ventilem by nebyl tak velký. V tomto případě se totiž děje to, že systém není lineární v okolí pracovního bodu kvůli saturaci akčního členu, tudíž zde lineární regulace moc nefunguje, pro špatně zvolený pracovní bod. Tento problém je nejvíce patrný na (Obr. 5.5, 5.6), kde je rozdíl mezi referencemi největší. U dalších regulátorů jsou reference blíže k sobě a ventil je v saturaci jen chvilku, tudíž tento problém není tak patrný. Dalším řešením jak eliminovat tuto saturaci je možnost přidat do systému třetí vstup v podobě možnosti ovládání přepouštěcího ventilu. Při uzavření přepouštěcí ventilu se sníží výkon čerpadla, ale na druhou stranu stačí odtéct voda z druhé nádrže a systém po odeznění přechodových dějů a znovu otevření přepouštěcího ventilu bude regulovat s nulovou regulační odchylkou. Význam této poruchové veličiny je patrný na obrázcích (Obr. 5.3, 5.4). Tento způsob byl zavrhnut, jelikož se jedná z hlediska teorie řízení o nesmysl. Pro lepší objasnění tohoto problému je v dalším textu analyzován problém se saturacemi akčních členů. Pracují-li ventily trvale v blízkosti některé krajní polohy (saturace), není to dobré. Směr jedné změny ventilu je v podstatě blokován, což převrací předpoklady, podle kterých byl regulátor nastaven a vede to ke snížení výkonu regulátoru, a jak se dále přesvědčíme, někdy i významnému. Je tím především ovlivněna kvalita regulačního pochodu. Více odezev regulačního obvodu při regulaci decentralizovaným PIDf regulátorem je možné nalézt v příloze B, která je součástí tohoto textu a je umístěna na přiloženém CD.

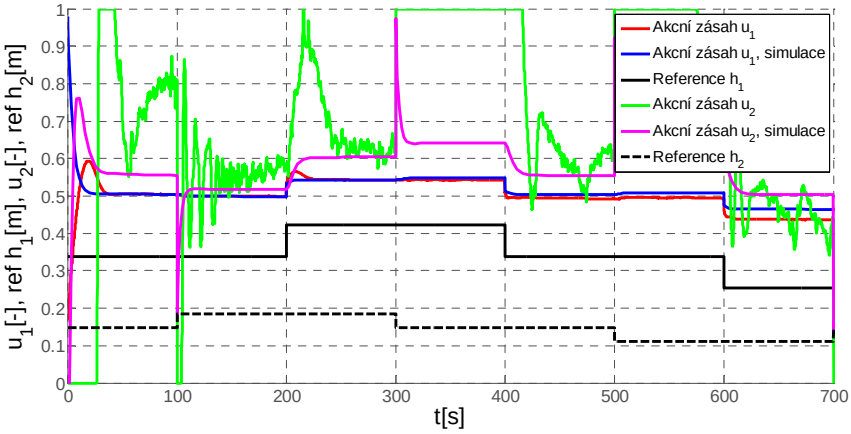


OBRÁZEK 5.5: *Regulace výšky hladin s PIDf regulátorem, interakce mezi kanály – Odezva*

5.2 LQG regulátor

V této části navrhneme pro regulaci výšek hladin v systému spojených nádob diskrétní lineární kvadratický optimální regulátor s Kalmonovým filtrem. Lineární kvadraticky optimální regulátor (LQ) je obdobou stavového regulátoru, který je navržen tak, aby kvadratické

kritérium bylo minimální. Vstupem do regulátoru je stavový vektor $x(k)$, k jeho odhadu použijeme Kalmanův filtr.



OBRÁZEK 5.6: *Regulace výšky hladin s PIDf regulátorem, interakce mezi kanály – Akční zásahy*

Před samotným návrhem regulačního obvodu je nutné vyšetřit detekovatelnost a stabilizovatelnost lineárního systému. Pokud nebude systém tyto vlastnosti splňovat, nemá smysl pokračovat v návrhu regulační smyčky. Tyto dvě vlastnosti souvisí s konvergencí limitního řešení diferenční Riccatiho rovnice. Vlastnosti řešení diferenční Riccatiho rovnice shrnuje Goodwin-Sinova věta. Více podrobností o vlastnostech Riccatiho rovnice je možné nalézt v [10]. Souvislost konvergence řešení Riccatiho rovnice se stabilizovatelností systému je nasnadě. Je-li nestabilní mód neřiditelný, pak také nemůže být stabilizovatelný pomocí stavové zpětné vazby. Souvislost stability KF s dosažitelností systému si můžeme vysvětlit tak, že pokud nějaký mód není vybuzen šumem procesu $v(k)$, pak filtr není nucen jeho neurčitost korigovat a tím stabilizovat matici $A-LC$. Jak již víme ze závěrů, které jsme vyvodili v předcházející kapitole, námi zkoumaný systém obě vlastnosti splňuje a my tedy můžeme přistoupit k návrhu LQ regulátoru s Kalmanovým filtrem.

5.2.1 Diskretizace linearizovaného systému

K návrhu diskrétního lineárního kvadraticky optimálního regulátoru potřebujeme vytvořit ze spojitého lineárního systému (3.42) diskrétní popis zkoumaného systému. K jeho získání použijeme vztahy pro diskretizaci se synchronním vzorkováním vstupu a výstupu

$$M = e^{AT_s}$$
$$N = e^{AT_s} \int_0^{T_s} e^{-A\tau} d\tau B, \tag{5.4}$$

kde T_s je perioda vzorkování, kterou v tomto případě volíme

$$T_s = 0{,}1[s]. \tag{5.5}$$

Výstupní matice C a D zůstávají při synchronní diskretizaci nezměněny a diskretizovaný popis je

$$x(k+1) = Mx(k) + Nu(k),$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k). \tag{5.6}$$

LQG regulátor vznikne spojením lineárního diskrétního kvadraticky optimálního regulátoru s Kalmanovým filtrem. Toto spojení je možné díky platnosti separačního principu. Nejprve určíme optimální odhad stavu $\hat{x}(k \mid k-1)$, minimalizující střední kvadratickou chybu odhadu a využívající dostupných dat $\mathcal{D}_{k-1}$. Tento odhad lze najít KF se zesílením $L(k)$ a kovarianční maticí chyby odhadu $P_x(k \mid k-1)$. Posloupnost těchto kovariančních matic a zesílení najdeme řešením diferenční Riccatiho rovnice pro problém optimální filtrace. Poté určíme kvadraticky optimální zákon řízení $u(k) = -K(k)x(k)$ minimalizující kvadratické kritérium pro deterministický systém, získaný zanedbáním stochastické složky v modelu. Posloupnost těchto zesílení najdeme na základě řešení diferenční Riccatiho rovnice pro problém optimálního řízení. Posléze aplikujeme nalezený zákon řízení, přičemž neznámý stav $x(k)$ nahradíme jeho optimálním odhadem. Závěr, který plyne ze separačního principu, je ten, že můžeme navrhnout zvlášť KF a LQ regulátor, spojením pak získáme LQG regulátor. Vlastní čísla uzavřené smyčky LQG regulátoru jsou dány vlastními čísly matice $eig(A - BK)$ kvadraticky optimálního regulátoru a vlastními čísly matice $eig(A - LC)$ kvadraticky optimálního pozorovatele stavu.

5.2.2 Kalmanův filtr

V této části popíšeme návrh Kalmanova filtru pro diskrétní linearizovaný systém spojených nádob. Uvažujme lineární stochastický systém

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Mx(k) + Nu(k) + v(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) + e(k) \end{aligned}, \tag{5.7}$$

kde $v(k)$ a $e(k)$ jsou diskrétní bílé posloupnosti s nulovou střední hodnotou a neznámou kovarianční maticí

$$\mathcal{E}\left\{\begin{bmatrix} v(k_1) \\ e(k_1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v(k_2) \\ e(k_2) \end{bmatrix}^T\right\} = \begin{bmatrix} Q_{KF} & 0 \\ 0 & R_{KF} \end{bmatrix}\delta(k_1 - k_2). \tag{5.8}$$

$v(k)$ - šum procesu

$e(k)$ - šum měření

δ - Diracova funkce

Kalmanův filtr je založen na algoritmu generující posloupnost lineárních odhadů stavu $\hat{x}(k)$ a kovariančních matic chyb odhadu

$$P(k) = \mathcal{E}\left\{\left[x(k) - \hat{x}(k)\right]\left[x(k) - \hat{x}(k)\right]^T\right\},$$

přičemž odhad stavu $\hat{x}(k)$ v každém kroku minimalizuje kritérium

$$J_{LMS} = trace\left(P(k)\right).$$

Budeme řešit Riccatiho rovnici

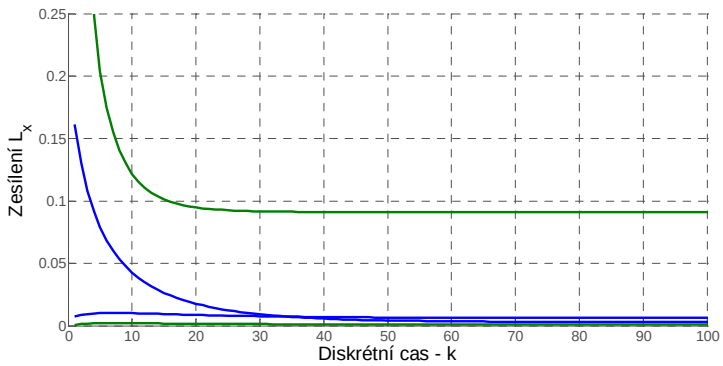
$$\begin{aligned} P(k+1|k) &= MP(k|k-1)M^T + Q_{KF} - L(k)\left(CP(k|k-1)M^T\right) \\ L(k) &= MP(k|k-1)C^T\left(CP(k|k-1)C^T + R_{KF}\right)^{-1} \end{aligned}, \tag{5.9}$$

kde $L(k)$ je Kalmanovo zesílení. Tuto rovnici řešíme simulací v čase, dokud nedostaneme ustálené Kalmanovo zesílení L. Průběh Kalmanova zesílení $L(k)$ pro parametry (5.11) znázorňuje následující obrázek (Obr. 5.7). Ustálené L použijeme pro časově neproměnný Kalmanův filtr, jehož simulinkové schéma zobrazuje (Obr. 5.8).

Stavový popis Kalmanova filtru z obrázku (Obr. 5.8) je

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= (M - LC)\hat{x}(k) + (N - LD)u(k) - Ly(k), \\ y_{KF}(k) &= \hat{x}(k). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Zbývá vyřešit poslední problém související s návrhem Kalmanova filtru a to jak nastavit kovarianční matice Q_{KF} a R_{KF}. Tento problém je zcela zásadní, protože celý algoritmus je možno nalézt v literatuře [9, 21] a bez problémů naprogramovat, ale pokud nastavíme nevhodně kovarianční matice, nebude Kalmanův filtr odhadovat stavy s dostatečnou přesností a přestane být optimální.



OBRÁZEK 5.7: *Průběh Kalmanova zesílení* $L(k)$

Zdroje šumu, které ovlivňují výstup tlakových senzorů hladiny, jsou čerpadlo a výpustní ventil, popřípadě na systém mohou působit i otřesy zvenčí. Šum od čerpadla se zvyšuje se zvyšujícími se otáčkami čerpadla. S vyššími otáčkami se totiž zvětšují vibrace čerpadla, které přidávají šum zvláště k hodnotě výšky hladiny v první nádrži. Šum od výstupního ventilu se projevuje jen při určitém otevření a ovlivňuje údaj ze senzoru hladiny ve druhé nádrži. V některých případech se u hodnoty hladiny ve druhé nádrži může vyskytnout porucha, která má tvar tlumených harmonických kmitů. Po sérii pokusů jsme pro výpočet Kalmanova zesílení použili následující nastavení kovariančních matic

$$\begin{aligned} Q_{KF} &= diag\{0,01;0,1\} \\ R_{KF} &= diag\{0,1;1\}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

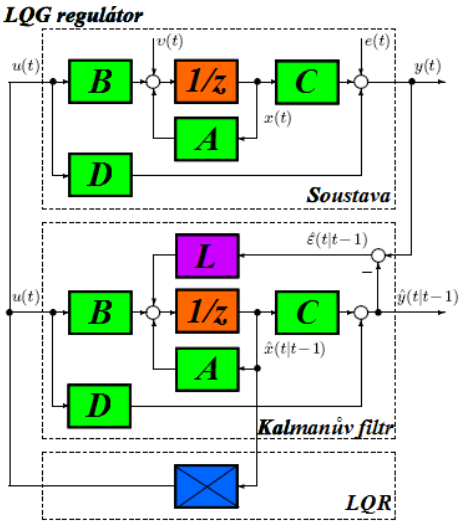
Pokud jsme navrhli KF správně, musí být chyba predikce výstupu bílý šum. O pár řádků výše jsme uvedli, že matice (nekorelovaného) šumu Q_{KF}, R_{KF} jsou ladícími parametry pro nalezení Kalmanova zesílení $L(k)$. Jestliže parametry přesně vystihují vlastnosti šumu, filtr pak pracuje v optimálním režimu a odhad stavů má nejnižší možný rozptyl. V praktických situacích jako je tato však máme o vlastnostech šumu jen velmi malé apriorní informace a nastavení KF pak vede k suboptimálnímu chodu filtru. Pro vylepšení vlastností odhadu stavu je vhodné aktualizovat znalosti o šumu pomocí změřených dat. První úlohou při aktualizaci vlastností šumu je rozpoznat fakt, že filtr pracuje v suboptimálním režimu. Z teorie o KF víme, že v optimálním režimu tvoří chyba odhadu nekorelovaný stacionární bílý šum. Při tvorbě této práce se po každém nastavení nových parametrů KF změřila odezva při regulaci výšky hladin s LQG regulátorem a vypočítala se chyba odhadu. Chyba odhadu byla testována na optimalitu odhadování KF. Naší úlohou tedy je nalézt korelaci chyby odhadu v čase a násled-

ně rozhodnout o optimálním chodu filtru. Chyba predikce neboli inovace je definována následovně

$$\mathcal{E}(k\,|\,k-1) \hat{=} y(k) - C\hat{x}(k\,|\,k-1). \tag{5.12}$$

Odhad autokorelační funkce na intervalu N se určí podle vztahu

$$\hat{\Gamma}_k = \frac{1}{N}\sum_{i=k}^{N} \mathcal{E}(i)\mathcal{E}^T(i-k). \tag{5.13}$$



OBRÁZEK 5.8: *Zapojení KF pro linearizvaný systém s LQR regulátorem*

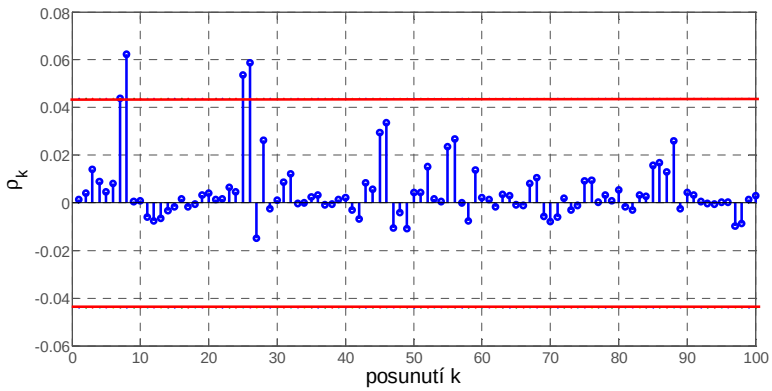
Takto definovaná autokorelační funkce je asymptoticky nevychýlená pro $N \to \infty$. Jestliže chceme zachovat tuto vlastnost i pro konečné N, je potřebné dělit výrazem $(N-k)$ namísto N. Definice podle (5.13) dává autokorelační funkci s menší chybou ve smyslu nejmenších čtverců, a proto je tento postup u mnoho algoritmů preferovaný. Dalšími vlastnostmi jsou asymptotická konzistentnost a má blíže k normálnímu rozdělení. Zároveň platí $\hat{\Gamma}_0 \geq \hat{\Gamma}_k, k > 0$. Speciálně pro bílý šum a pro $N \to \infty$ teoreticky platí $\hat{\Gamma}_k = 0, k \neq 0$. Autokorelační funkcí bílého šumu je impuls v bodě 0.

Abychom mohli rozhodnout o optimalitě filtru na základě autokovarianční funkce, využijeme intervalový odhad se šířkou 5%. Jde v podstatě o test bělosti posloupnosti inovací a algoritmus je definovaný následovně. Nejprve určíme normalizované autokovarianční koeficienty podle vztahu

$$[\hat{\rho}_k]_{ij} = \frac{\left[\hat{\Gamma}_k\right]_{ij}}{\sqrt{\left(\left[\hat{\Gamma}_0\right]_{ii}\left[\hat{\Gamma}_0\right]_{jj}\right)}}. \tag{5.14}$$

Zkontrolujeme, kolik prvků z množiny $[\hat{\rho}_k]_{ii}$ pro $k > 0$ leží mimo interval $\pm\frac{1,96}{\sqrt{N}}$. V případě, že více jak 5% hodnot leží mimo uvedený interval, filtr pracuje suboptimálně. Tento test optimality je vhodný v našem případě, jelikož neaktualizujeme matice Q, R, resp. zesílení K v každé vzorkovací periodě.

Test, kterým otestujeme optimální režim KF se nazývá Mehrův. Úlohou tohoto testu je určit optimalitu pomocí autokorelační inovace. Testů existuje celá řada, další z nich je možno nalézt v [18]. Nastavení zvolíme následující $N = 2000$ a maximální počet kroků posunutí autokorelační funkce je 100. Na následujícím obrázku (Obr. 5.9) je zobrazena autokorelační funkce pro parametry KF (5.11). Na obrázku vidíme, že čtyři hodnoty překročili hranici $\pm\frac{1,96}{\sqrt{N}}$, to činí 4%. Posloupnost inovací můžeme označit za bílý šum a takto nastavený KF pracuje v optimálním režimu.



OBRÁZEK 5.9: *Zobrazení hodnot normalizované autokorelace, hladina* h_1

Mehrův test optimality patří do skupiny statistických testů bělosti. Testy bělosti posloupnosti inovací patří mezi významnou část adaptivní filtrace, protože umožňují ověřit optimalitu KF a kvalitativně zhodnotit odhady kovariančních matic. Další testy optimality je možné nalézt v příloze C, kde jsou zobrazeny autokorelační funkce chyby predikce pro všechna měření s LQG regulátorem.

5.2.3 LQ regulátor

Uvažujme lineární diskrétní dynamický systém

$$x(k+1) = Mx(k) + Nu(k), \qquad x(0) = x_0 . \tag{5.15}$$

LQ regulátor minimalizuje kritérium optimality

$$J=\frac{1}{2}x^T(N)Q(N)x(N)+\frac{1}{2}\sum_{k=t_0}^{N-1}\left[x^T(k)u^T(k)\right]\begin{bmatrix}Q(k) & 0\\ 0 & R(k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(k)\\ u(k)\end{bmatrix}, \tag{5.16}$$

kde t_0 je počáteční a N koncový čas řízení. Matice Q, R a S jsou váhové matice. První člen rovnice je cena koncového stavu a druhý člen je cena předchozích stavů. Váhovou matici R volíme tím větší, čím je dražší řízení. Matici Q volíme tím větší, čím je dražší odchylka stavu $x(k)$ od nulové hodnoty. Matice Q je pozitivně semidefinitní váhová matice stavů a matice R pozitivně definitní váhová matice vstupů. Kvadratická optimalizace je vhodným nástrojem pro návrh lineárních regulačních obvodů mnoharozměrových systémů. Při návrhu je ovšem významná zejména dynamika výsledného obvodu, která je dána polohou jeho pólů. Souvislost mezi váhovými maticemi kvadratického kritéria a polohou pólů optimálního regulačního obvodu není zřejmá ani jednoznačná. Váhové matice slouží jako ladící parametry pro návrh regulátoru. Je však obtížné dosáhnout požadované dynamiky, protože vztah mezi váhovou maticí a polohou pólů regulačního obvodu je komplikovaný. Návrh potom probíhá metodou pokusů a omylů, kdy měníme váhové matice až do té doby, kdy dostáváme odezvy podle našich představ. Obvykle začínáme od diagonálních váhových matic, až poté volíme složitější strukturu matic.

V případě kvadraticky optimálního řízení řešíme optimalizační úlohu ve tvaru

$$u^*(k)=\arg\min_{u(k)} J\ . \tag{5.17}$$

Minimalizací kritéria J bychom dospěli k diferenční Riccatiho rovnici

$$P(k)=Q+M^TP(k+1)M-M^TP(k+1)NK(k), \tag{5.18}$$

kde Kalmanovo zesílení $K(k)$ je

$$K(k)=\left(R+N^TP(k+1)N\right)^{-1}N^TP(k+1)M\ . \tag{5.19}$$

Rovnici (5.18) řešíme zpětně v čase s koncovou podmínkou $P(k)=Q(N)$, kde P je matice kvadratické formy a udává optimální hodnotu kritéria (5.16), dokud se Kalmanovo zesílení neustálí. Kritérium (5.16) potom nabývá svého minima pro řízení ve tvaru

$$u^*(k)=-K(k)x(k). \tag{5.20}$$

V tomto případě Kalmanovo zesílení $K(k)$ konverguje k limitní hodnotě, potom řešení diferenční Riccatiho rovnice je také zároveň symetrickým pozitivně semidefinitním řešením algebraické Riccatiho rovnice. Platí, že

$$P(k) \to P, \quad K(k) \to K = \left(R + N^T PN\right)^{-1} N^T PM \,. \tag{5.21}$$

Za takto uvedených podmínek získáme časově neměnný LQ regulátor, který má stejnou strukturu jako běžná stavová zpětná vazba.

Takto definovaný lineární diskrétní kvadraticky optimální regulátor stabilizuje všechny stavy do počátku, což není naším cílem řízení. My od regulačního obvodu chceme, aby sledoval referenční trajektorii s nulovou regulační odchylkou. Základní úlohu tedy modifikujeme na úlohu kvadraticky optimálního sledování. Rozšíříme model o generátor konstantní reference. Generátor konstantní reference můžeme modelovat následovně

$$\begin{aligned} x_r(k+1) &= Ix_r(k) \\ w(k) &= Ix_r \end{aligned}, \tag{5.22}$$

kde I je jednotková matice příslušné dimenze a x_r je vektor referencí

$$x_r = \begin{bmatrix} x_{rh_1} \\ x_{rh_2} \end{bmatrix}. \tag{5.23}$$

Jelikož má výstup systému $y(k)$ na zvoleném horizontu délky N sledovat konstantní referenční signál $w(k)$, definujme kvadratické kritérium optimality ve tvaru

$$J = \ldots + \frac{1}{2}\sum_{k=t_0}^{N-1}\left\{e^T(k)Q_e e(k) + u^T(k)R_u u(k)\right\}, \tag{5.24}$$

kde pro regulační odchylku platí

$$e(k) = w(k) - y(k) = x_r(k) - Cx(k) - Du(k). \tag{5.25}$$

Abychom dosáhli toho, že výstup bude asymptoticky sledovat referenční signál, přidáme do kritéria sumátor regulačních odchylek, který má tvar

$$x_{se}(k+1) = x_{se}(k) + e(k) = x_{se}(k) + x_r(k) - Cx(k) - Du(k)\,. \tag{5.26}$$

Současně s tímto formálním přepisem musíme také přepsat kvadratické kritérium do tvaru

$$J = \ldots + \frac{1}{2}\sum_{k=t_0}^{N-1}\left\{e^T(k)Q_e e(k) + y_{se}^T(k)Q_{se}y_{se}(k) + u^T(k)R_u u(k)\right\}, \tag{5.27}$$

kde Q_e je váhová matice regulační odchylky a Q_{se} je váhová matice součtu regulačních odchylek. Za účelem sjednocení všech takto definovaných částí zavedeme nový formální systém se stavovým vektorem

$$x(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x_r(k) \\ x_{se}(k) \end{bmatrix}, \tag{5.28}$$

a stavovou rovnicí

$$x(k+1)=\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -C & I & I \end{bmatrix} x(k)+\begin{bmatrix} N \\ 0 \\ -D \end{bmatrix} u(k)\cdot \tag{5.29}$$

Nyní dosadíme do kritéria (5.27) a upravíme ho na standardní problém kvadraticky optimálního regulátoru (5.16)

$$J=\ldots+\frac{1}{2}\sum_{k=t_0}^{N-1}\begin{bmatrix} x^T(k) & x_r^T(k) & x_{se}^T(k) & u^T(k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C^T & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ D^T & 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_e & 0 & 0 \\ 0 & Q_{se} & 0 \\ 0 & 0 & R_u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & -I & 0 & D \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k) \\ x_r(k) \\ x_{se}(k) \\ u(k) \end{bmatrix}=$$

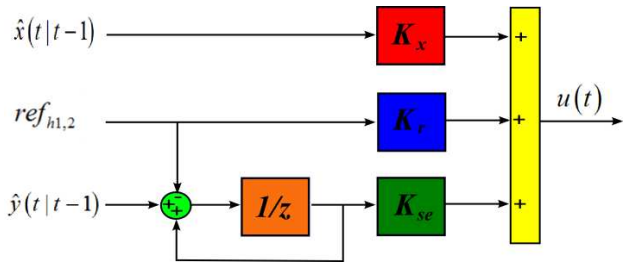
$$J=\ldots+\frac{1}{2}\sum_{k=t_0}^{N-1}\begin{bmatrix} x^T(k) & u^T(k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C^TQ_eC & -C^TQ_e & 0 & C^TQ_eD \\ -Q_eC & Q_e & 0 & -Q_eD \\ 0 & 0 & Q_{se} & 0 \\ D^TQ_eC & -D^TQ_e & 0 & D^TQ_eD+R_u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix}. \tag{5.30}$$

Nyní již můžeme opět řešit Riccatiho rovnici (5.18), která limitně povede na optimální zákon řízení (5.20) ve tvaru (viz Obr. 5.10)

$$u^*(k)=-Kx(k)=-\begin{bmatrix} K_x & K_r & K_{se} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k) \\ x_r(k) \\ x_{se}(k) \end{bmatrix}. \tag{5.31}$$

Kvadraticky optimální asymptotické sledování konstantní reference tedy obsahuje tři základní části:

- stavový model regulované soustavy (standardní úloha LQ regulátoru),
- generátor konstantní reference,
- sumátor regulačních odchylek.

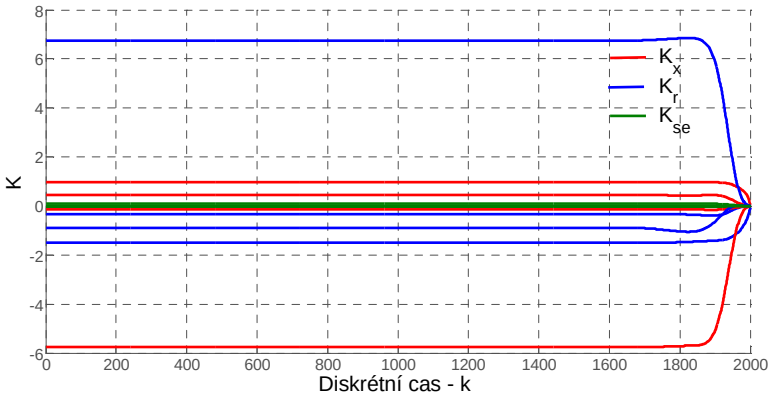


OBRÁZEK 5.10: *LQ regulátor + asymptotické sledování konstantní reference*

Opět je potřeba jako při návrhu Kalmanova filtru zvolit váhové matice kritéria, které jsou ladícím parametrem při návrhu LQ regulátoru. Hodnoty váhových matic jsou následující

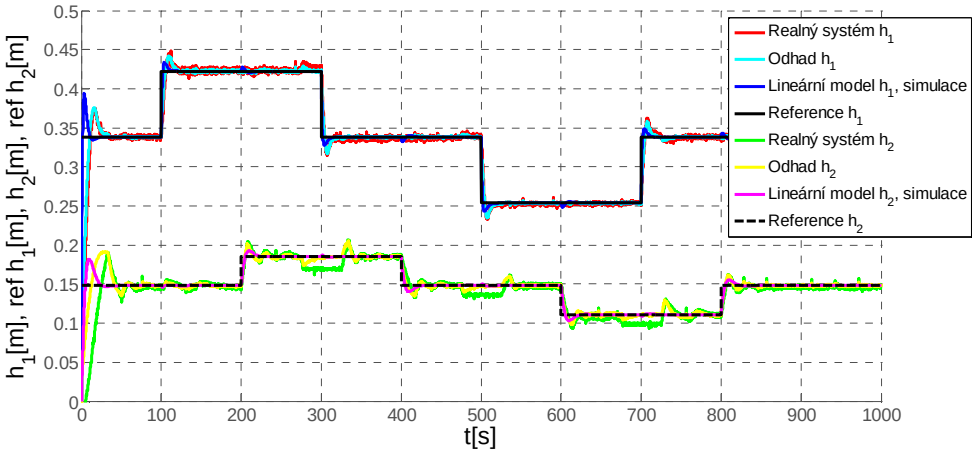
$$Q_e = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad Q_{se} = \begin{bmatrix} 0,05 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}. \tag{5.32}$$

Při volbě váhových matic bylo respektováno především omezení na řídící vstup $u_1, u_2 \in (0,1)$. Na následujícím obrázku (Obr. 5.11) je znázorněn průběh Kalmanova zesílení při řešení Riccatiho rovnice.

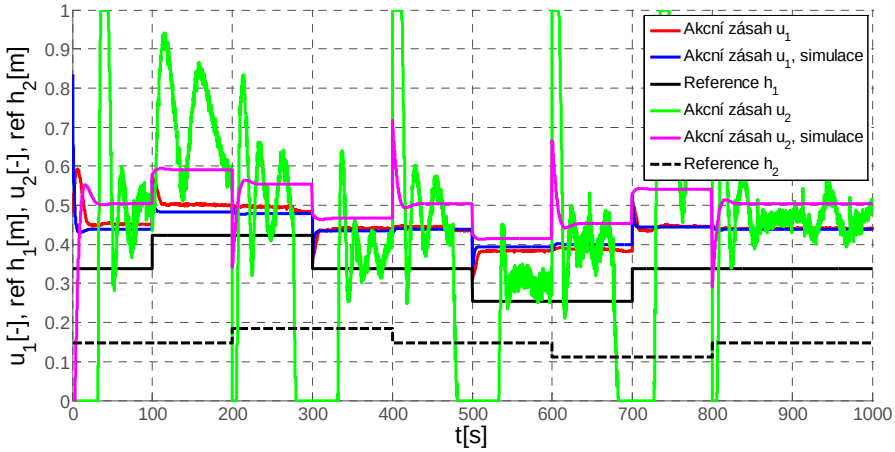


OBRÁZEK 5.11: *Průběh Kalmanova zesílení* $K(k)$

Výsledky regulace navrženého LQG regulátoru pro řízení a odhadu výšek hladin v systému spojených nádob jsou zobrazeny na následujících obrázcích. Z jednotlivých průběhů je vidět, že kvalita regulace je značně lepší než v případě decentralizovaného řízení pomocí PIDf regulátoru. Z výsledného průběhu můžeme vidět, že regulátor sleduje referenční trajektorii s nulovou regulační odchylkou jen pro regulaci výšky hladiny v první nádrži. Ve druhé nádrži dochází při regulaci ke kmitání okolo referenční trajektorie a nepodařilo se najít takové váhové matice, aby k tomuto jevu nedocházelo. Rozkmit je v intervalu $\pm 0,25$ cm.

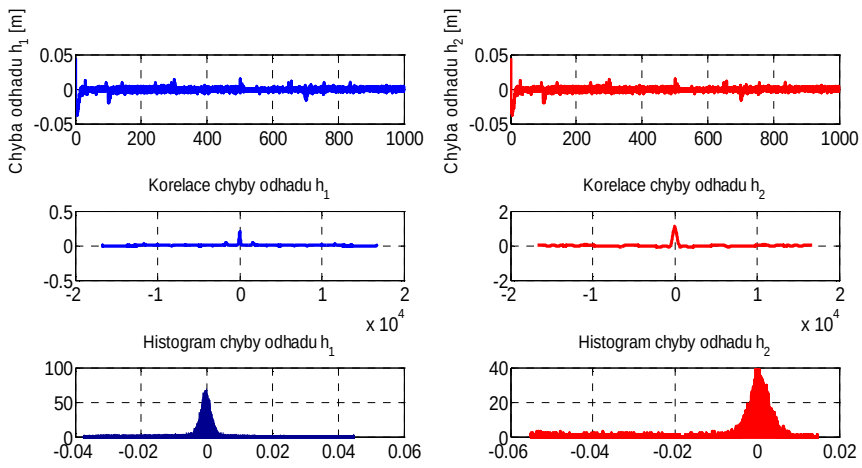


OBRÁZEK 5.12: *Regulace výšky hladin pomocí LQG regulátoru, při působící poruše, interakce mezi kanály, bez zapojeného BF – Odezva*

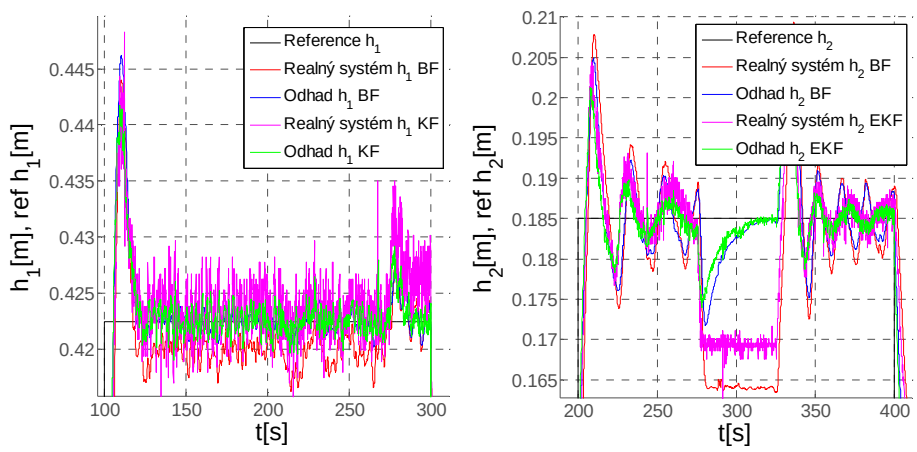


OBRÁZEK 5.13: *Regulace výšky hladin pomocí LQG regulátoru, při působící poruše, interakce mezi kanály, bez zapojeného BF – Akční zásahy*

V první části obrázku (Obr. 5.12) je regulace do pracovního bodu a dále regulace okolo pracovního bodu. Je vidět, že při regulaci do pracovního bodu dojde k překmitu, což je způsobeno tím, že lineární model vodárny je modelem odchylkovým. Byla provedena lokální linearizace v pracovním bodě a pro tento model byl navrhnut regulátor. Při regulaci okolo pracovního bodu je vidět, že již nedochází k tak velkému překmitu. Z obrázku (Obr. 5.13) dále vidíme, že amplituda akčních zásahu je v předepsaných mezích. Dále je možné si všimnout, že rozkmit hladiny ve druhé nádrži koresponduje s průběhem signálu odpovídajícímu výpustnímu ventilu u_2. Z obrázku (Obr. 5.12) je vidět, že se podařilo odstranit trvalou regulační odchylku (oproti regulaci PIDf regulátorem), která byla způsobena tím, že do druhé nádrže přitékalo více vody, než stačilo vytékat. Dále je patrné, že k regulaci pomocí LQG regulátoru je potřeba menších akčních zásahů. Z obrázku (Obr. 5.14) je patrné, že KF pracuje v optimálním režimu, chyba odhadu stavu je bílý šum, jak je vidět z autokorelační funkce chyby odhadu. Histogram chyby odhadu má normální rozdělení. Jak bylo zmíněno v kapitole 2, model systému spojených nádob obsahuje softwarový Butterworthův filtr (BF), který filtruje výstupy ze senzorů v systému Simulink. Při měření na modelu jsme také zkoumali vliv datového kroku KF, kdy jsme odstranili tento zapojený filtr a k filtraci dat ze senzorů byl použit KF. Výsledky experimentu jsou vidět na obrázku (Obr. 5.15). Je vidět, že datový krok KF funguje dle očekávání, dochází k filtraci zašuměného signálu ze snímačů výšky hladin. Další odezvy systému spojených nádob při regulaci LQG regulátorem je možné nalézt v příloze C, která je součástí tohoto textu a je umístěna na přiloženém CD.



OBRÁZEK 5.14: *Statistické parametry navrženého KF, BF nezapojen*



OBRÁZEK 5.15: *Porovnání filtračních vlastností navržených filtrů*

5.3 Návrh regulátorů s eliminací interakcí

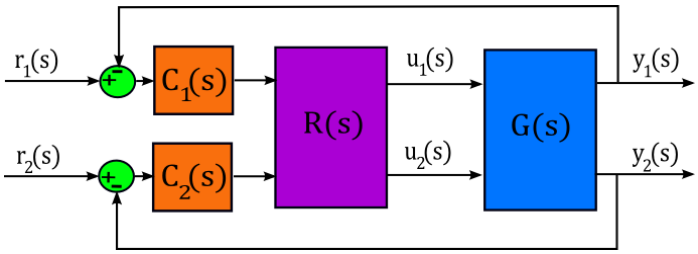
V této podkapitole provedeme návrh rozvazbovacího regulátoru (prekompenzátoru), který by měl docílit diagonální matici přenosů řízeného systému před vlastním návrhem smyčkových regulátorů. Prekompenzátorem odstraníme mimodiagonální prvky v matici přenosů a tím pádem eliminujeme interakce v MIMO systému. Principiálně budeme uvažovat o dvou přístupech [19]:

- návrh dynamického rozvazbovacího regulátoru,
- návrh stavového rozvazbovacího regulátoru.

V prvním případě se při návrhu vychází z vnějšího popisu MIMO systému, ve druhém případě z vnitřního popisu.

5.3.1 Návrh dynamického rozvazbovacího regulátoru

V kapitole 5.1 jsme navrhli decentralizované regulátory jen pro izolovaný systém. Pro návrh jsme uvažovali pouze diagonální prvky matice přenosů. Nediagonální přenosy $g_{12}(s)$ a $g_{21}(s)$ jsme nebrali v úvahu, proto jsme na příslušných odezvách mohli pozorovat interakce, vazby mezi $u_1 \to y_2$ a $u_2 \to y_1$. V této podkapitole si ukážeme, jak je možné navrhnout rozvazbující prekompenzátor $R(s)$, pomocí něhož dosáhneme diagonální matice přenosů řízeného systému. Dojde k tzv. rozvazbení (decoupling) MIMO systému. Na obrázku (5.16) je schématicky znázorněn zmíněný problém.



OBRÁZEK 5.16: *Schématické znázornění dynamického rozvazbujícího regulátoru*

Postup při návrhu takového regulátoru se skládá ze třech kroků:

- výběr vhodného párování vstupů a výstupů, volba se nejčastěji děje podle RGA faktoru,
- návrh kompenzátoru $R(s)$,
- návrh jednotlivých regulátorů $C(s)$ pro příslušné SISO systémy.

Párování podle RGA faktoru bylo zvolené v předcházející kapitole, v této části se budeme věnovat návrhu prekompenzátoru $R(s)$.

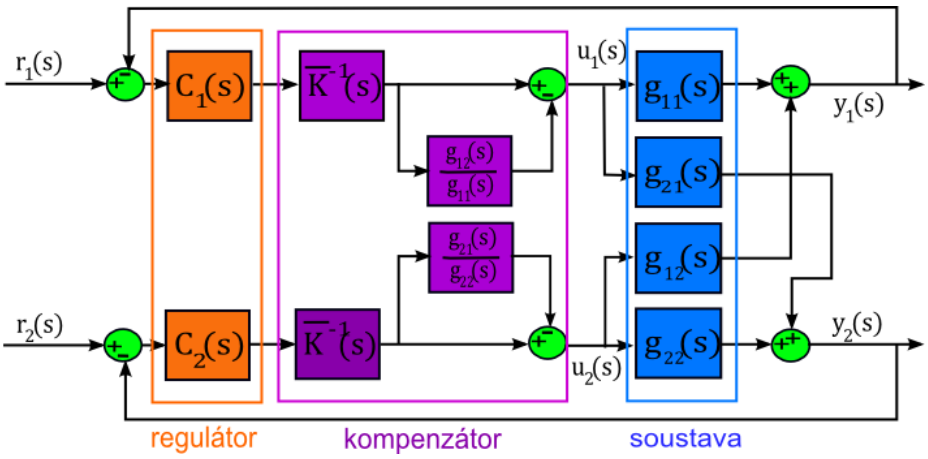
V kapitole 5.1 jsme zjistili, že diagonální struktura smyčkových regulátorů $C_{1,2}(s)$ nemůže zajistit rozvazbení našeho MIMO sytému a bude nutné uvažovat o návrhu prekompenzátoru $R(s)$, který by měl docílit diagonální matici přenosů řízeného systému před vlastním návrhem smyčkových regulátorů. Připomeňme, že pro rozvazbení stačí navrhnout diagonální matici přenosů otevřené smyčky

$$F_{OL}(s) = G(s)R(s) = D(s), \tag{5.33}$$

kde $D(s) = diag\{d_{ii}(s)\}$ je nějaká vhodně zvolená diagonální matice. Prozatím nenavržené smyčkové regulátory $C_{1,2}(s)$ jsou reprezentovány diagonální maticí přenosů a požadovanou diagonalitu $F_{OL}(s)$ neovlivní. Přenosová matice rozvazbovacího regulátoru $R(s)$ by pak mohla být určena jako

$$R(s) = \left[G(s)\right]^{-1} D(s). \tag{5.34}$$

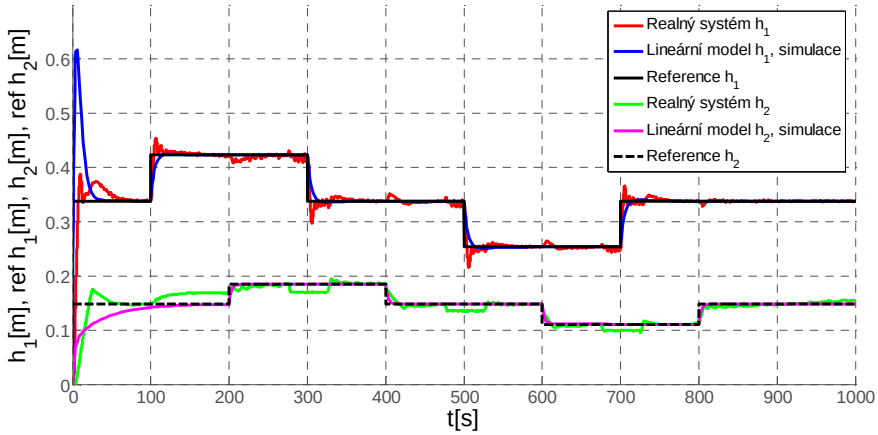
Postup návrhu je možné nalézt v [19] nebo [28], kde je probrán přehledně postup návrhu na vzorovém příkladu. Není možné v rozsahu této práce prozkoumat všechny části návrhu nějakým hlubším způsobem. Uvedeme zde pouze výsledné vztahy. Má-li být výsledný prekompenzátor $R(s)$ realizovatelný, musí být realizovatelné přenosy $\bar{K}^{-1}(s)$, $\frac{g_{12}(s)}{g_{11}(s)}$ a $\frac{g_{21}(s)}{g_{22}(s)}$, kde $\bar{K}(s) = 1 - K(s) = \frac{g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)}$ a $K(s) = \frac{g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)}$ je vazební činitel. Schématické znázornění takto navrženého rozvazbovacího regulátoru je zobrazeno na obrázku (Obr. 5.17).



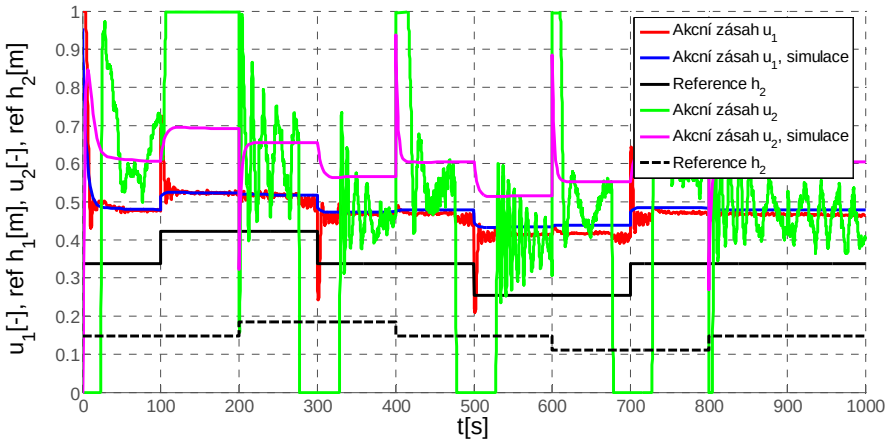
OBRÁZEK 5.17: *Blokové schéma dynamického rozvazbovacího regulátoru pro systém spojených nádob*

Parametry jednotlivých smyčkových PIDf regulátorů zůstávají stejné jako v případě decentralizovaného PIDf řízení, které bylo navrženo v podkapitole 5.1. Na následujících obrázcích jsou zobrazeny odezvy systému spojených nádob na referenční signál při působící poruše. Jak je vidět z detailu na obrázku (Obr. 5.20) interakce při řízení výšek hladin na reálném modelu se nám nepodařilo odstranit. Při simulaci řízení výšek hladin na lineárním modelu v programu

Simulink se nám podařilo dosáhnout rozvazbení mezi jednotlivými kanály. U simulace je vidět, že přidáním rozvazbovacího kompenzátoru mezi regulátor a soustavu, jsou interakce mezi $u_1 \rightarrow y_2$ a $u_2 \rightarrow y_1$ úspěšně odstraněny. U reálné soustavy jsme v podstatě ani nemohli očekávat, že se nám podaří interakce odstranit. Soustava spojených nádob je značně nelineární, je potřeba si uvědomit, že při změně reference na jednom kanálu se nutně změní výška hladiny i na druhém kanálu než si regulátor ‚uvědomí', že vznikla regulační odchylka, kterou je nutné snížit k nule. A právě tento čas, než dojde k odstranění odchylky, nemůže být na reálném modelu nulový, musí se přenastavit čerpadlo nebo výpustní ventil a celá soustava má také svou vnitřní dynamiku.



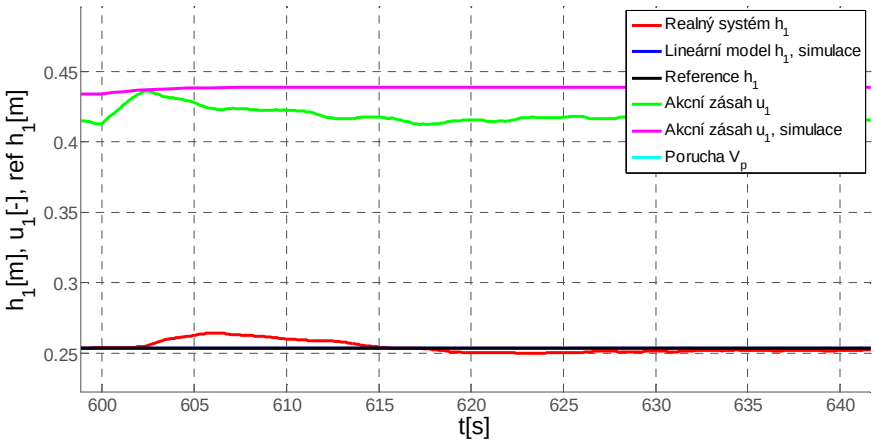
OBRÁZEK 5.18: *Regulace výšky hladin pomocí dynamického rozvazbovacího regulátoru, při působící poruše, interakce mezi kanály – Odezva*



OBRÁZEK 5.19: *Regulace výšky hladin pomocí dynamického rozvazbovacího regulátoru, při působící poruše, interakce mezi kanály – Akční zásahy*

Tyto aspekty se pak projeví právě v interakci mezi kanály, jak je vidět v detailu na obrázku (Obr. 5.20). Podařilo se nám dokázat, že ne vždy aplikaci teorie řízení na lineární model v

počítači lze přenést se stejnými účinky na reálný systém. Další obrázky z řízení výšek hladin spojených nádob dynamickým rozvazovacím regulátorem lze najít v příloze D, která je součástí tohoto textu a je umístěná na přiloženém CD. Při porovnání s decentralizovaným PIDf řízení se nám podařilo zlepšit kvalitu regulace, interakce se podařilo z části eliminovat, nikoliv však zcela odstranit.



OBRÁZEK 5.20: *Detail interakcí mezi kanály při řízení výšky hladiny v první nádrži dynamickým rozvazovacím regulátorem,* $ref_{h_2}(t = 600s) \,|\, 0{,}148 \rightarrow 0{,}111[m]$

5.3.2 Návrh stavového rozvazbovacího regulátoru

V této kapitole navrhneme stavový rozvazbovací regulátor s cílem dosáhnout předem zvoleného tvaru diagonální přenosové matice řízeného systému, čímž bude zajištěna neinteraktivnost řízení. Nejprve však budeme analyzovat podmínky řešitelnosti této úlohy. Nutnou a postačující podmínkou řešitelnosti úlohy udává následující věta [19] (Falb-Wolovichova věta):

Řiditelný systém může být převeden lineárním stavovým regulátorem na uzavřený systém s diagonální maticí přenosů právě tehdy a jen tehdy, když

$$\det W = \det \begin{bmatrix} c_1^T A^{k_1} B \\ \vdots \\ c_r^T A^{k_r} B \end{bmatrix} \neq 0\,, \tag{5.35}$$

kde c_i^T je i-tá řádka matice C, $i = 1,\ldots,r\,; k_i = \min k, k \in [0,\ldots,n-1] : c_i^T A^k B \neq 0, i = 0,1,\ldots,n-1$.

V tomto případě je $\det W = -0{,}0203$ a podmínka řešitelnosti je splněna a my můžeme pokračovat v návrhu stavového rozvazbovacího regulátoru. Postup návrhu je uveden v publikaci [19] nebo [28], kde je probrán přehledně postup návrhu na vzorovém příkladu. Stejně jako

v předchozím případě zde pouze uvedeme výsledné parametry navrženého regulačního obvodu. Následující parametry mají za následek vznik diagonální matice přenosových funkcí a může se přistoupit k návrhu regulátorů pro jednotlivé regulační smyčky

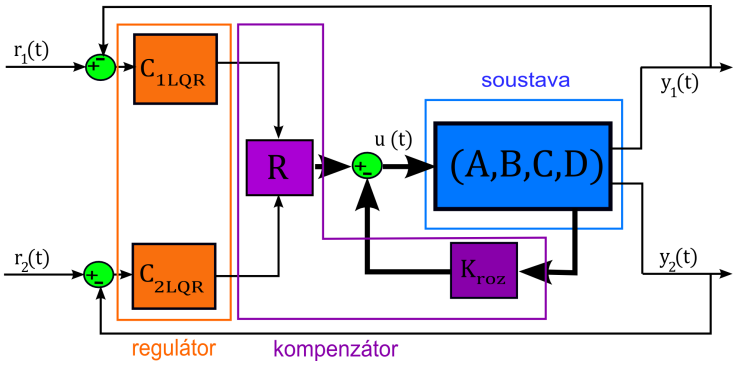
$$K_{roz} = \begin{bmatrix} 1,2445 & 0,1291 \\ -0,9808 & -4,2817 \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} 1,7711 & -0,0016 \\ 0,0592 & -5,2817 \end{bmatrix}.$$

K rozvazbenému systému lze nyní navrhnout dva nezávislé smyčkové regulátory metodami pro SISO systémy. V tomto případě jsme navrhli dva kvadraticky optimální regulátory pro asymptotické sledování reference se sumátorem regulační odchylky. Postup návrhu byl pro MIMO systém odvozen v kapitole 5.2.2. Váhové matice jsou v tomto případě pro první regulační smyčku $u_1 \to y_1$

$$Q_e = [50], \quad Q_{se} = [0,5], \quad R = [5], \tag{5.36}$$

pro druhou regulační smyčku $u_2 \to y_2$ jsme volili následující váhové matice:

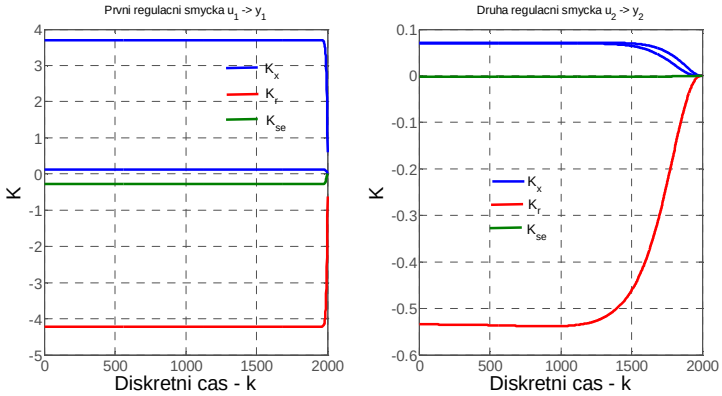
$$Q_e = [0,1], \quad Q_{se} = [0,001], \quad R = [200]. \tag{5.37}$$



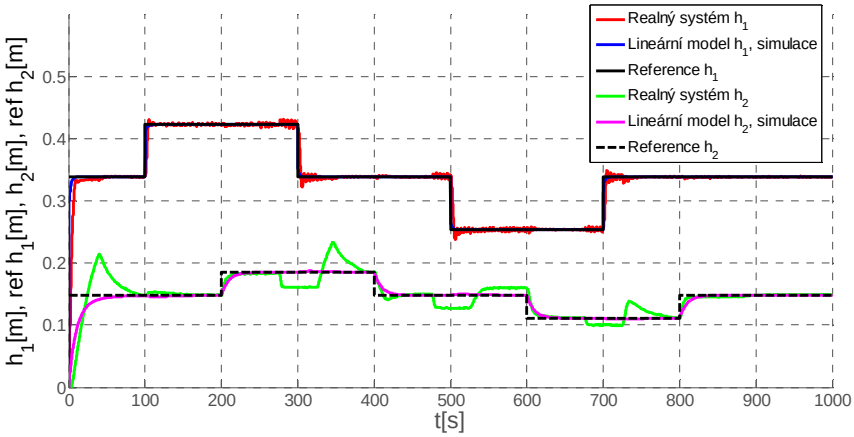
OBRÁZEK 5.21: *Blokové schéma stavového rozvazbovacího regulátoru pro systém spojených nádob*

Při volbě váhových matic bylo respektováno především omezení na řídící vstup $u_1, u_2 \in (0,1)$. Na následujícím obrázku (Obr. 5.22) je znázorněn průběh Kalmanova zesílení při řešení Riccatiho rovnice. Na obrázcích (Obr. 5.23, 5.24) jsou znázorněny odezvy systému spojených nádob na referenční signál při působící poruše. Z obrázků je vidět, že se nám u regulace na reálném systému nepodařilo odstranit interakce. Při srovnání následujících odezev s odezvami při regulaci LQG regulátorem se nám podařilo potlačit interakce a zároveň kvalita regulačního pochodu je značně lepší. Podařilo se nám odstranit jev kmitání okolo referenčního signálu při regulaci výšky hladiny v druhé nádrži. Při simulaci na lineárním modelu v Simulinku se nám podařilo opět odstranit interakce. Další obrázky z řízení výšek hladin

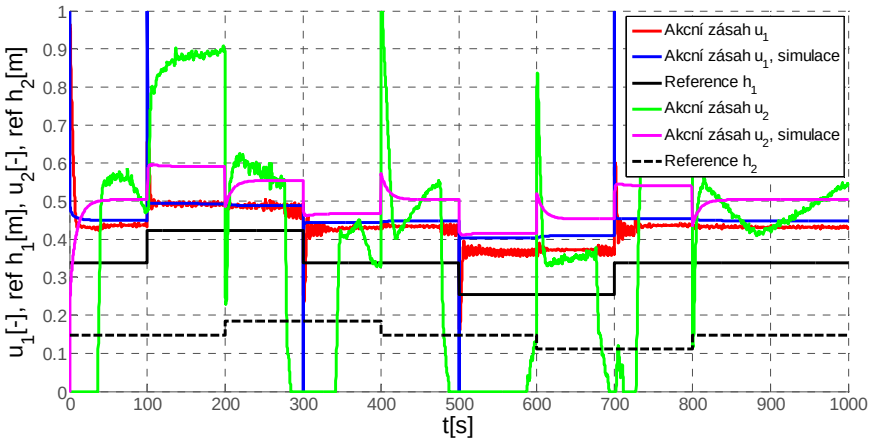
spojených nádob stavovým rozvazovacím regulátorem lze najít v příloze E, která je součástí tohoto textu a je umístěna na přiloženém CD.



OBRÁZEK 5.22: *Průběh Kalmanova zesílení* $K(k)$



OBRÁZEK 5.23: *Regulace výšky hladin pomocí stavového rozvazbovacího regulátoru, při působící poruše, interakce mezi kanály – Odezva*



OBRÁZEK 5.24: *Regulace výšky hladin pomocí stavového rozvazbovacího regulátoru, při působící poruše, interakce mezi kanály – Akční zásahy*

5.4 Robustní metody návrhu regulátoru

Až doposud jsme při návrhu regulátorů předpokládali, že námi identifikovaný model zcela přesně popisuje reálný systém spojených nádob. V této kapitole při návrhu regulátorů zohledníme neurčitosti dynamického systému, které se zcela jistě v našem systému vyskytují. Robustní řízení představuje sadu metod pro návrh řízení, které se snaží brát v úvahu nepřesnosti v modelování dynamických systémů. Návrh regulátorů se děje ve frekvenční oblasti za použití $\mathcal{H}_\infty$ optimalizace. V této časti bude nejprve stručně vysvětleno, jak budeme neurčitost matematicky modelovat, bude definována $\mathcal{H}_\infty$ norma pro MIMO systémy a v neposlední řadě si ukážeme jak lze provést test robustní stability a robustní kvality řízení za použití zobecněného systému a strukturovaného singulárního čísla.

Robustní řízení se řadí mezi postmoderní metody návrhu regulátorů a stále se rozvíjí. Metody návrhu robustního řízení explicitně berou v úvahu neurčitosti v modelech dynamických systémů. Neurčitost lze definovat jako nesouhlas mezi matematickým modelem a reálným systémem. Neurčitosti můžeme rozdělit na několik druhů:

- parametrické neurčitosti – model je přesný až na hodnoty (1 nebo více) parametrů, které v okamžiku návrhu neznáme (fyzikální parametry modelu jsou změřeny nepřesně, tolerance součástek, atd.),
- nestrukturované dynamické neurčitosti,
- strukturované dynamické neurčitosti.

O strukturované neurčitosti mluvíme tehdy, pokud se některé parametry modelu reálného systému pohybují v určitých známých intervalech. Modely neurčitostí tohoto typu se však vzhledem k častému nedostatku informací o reálném systému příliš nepoužívají. V této práci se budeme zabývat především nestrukturovanou dynamickou neurčitostí. Soustava je neurčitá, ale nevíme přesně kde, tj. nedokážeme nebo nechceme neurčitost přiřadit jednotlivým parametrům. Příkladem nestrukturované neurčitosti potom může být např. zanedbaná dynamika systému na vyšších frekvencích. Důvodem pro neurčitosti v modelech je několik:

- zanedbání rozložených parametrů,
- zanedbání nelinearity (linearizace v pracovním bodě),
- zanedbání dynamiky vyššího řádu,
- přítomnost vnější poruchy, o které toho moc nevíme (např. neznáme typický tvar, frekvenci apod.),

- zanedbání některých fyzikálních jevů – úmyslné (aby byl model jednodušší), - neúmyslné (neznalost).

Pro náš případ spojených nádob může být neurčitostí hned několik, zjednodušení matematického modelu, časová nestálost výkonu čerpadla, znovu nastavitelnost výpustního ventilu a také několik vnějších jevů jako je nestálost teploty v laboratoři aj. Popis nestrukturované neurčitosti se provádí pomocí norem systému.

Při návrhu robustního regulátoru si nejprve musíme definovat, jak budeme neurčitosti modelovat. V našem případě jsme zvolili multiplikativní model neurčitosti, který je definován následovně

$$G_P(s) = G_0(s)\left[1 + W_I(s)\Delta_I(s)\right], \quad \left\|\Delta_I(s)\right\|_\infty \le 1, \tag{5.38}$$

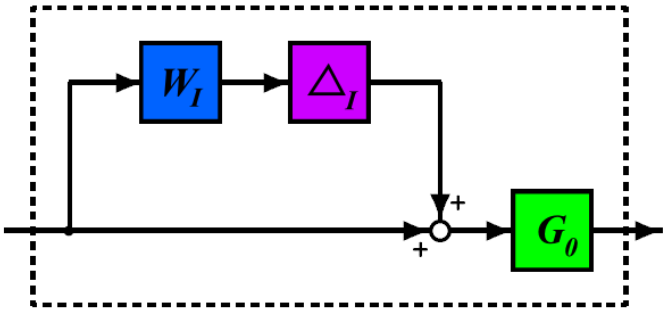
kde

$G_0(s)$ nominální model,

$G_P(s)$ perturbovaný model,

$W_I(s)$ pevná váhová funkce (profil neurčitosti, frekvenčně závislá),

$\Delta_I(s)$ neznámá informace o skutečné hodnotě a fázi perturbace, zároveň musí platit $\left\|\Delta_I(s)\right\|_\infty \le 1, \left|\Delta_I(j\omega)\right| \le 1 \, \forall \omega$.



OBRÁZEK 5.25: *Multiplikativní model neurčitosti*

Neurčitost $\Delta_I(s)$ je libovolná stabilní matice splňující uvedenou nerovnost, nemusí být ani racionální. Pevná váhová matice $W_I(s)$ reprezentuje dynamiku neurčitosti, tj. její rozložení podle frekvence. Typicky je malá pro nízké frekvence (tam známe model velmi přesně) a velká pro vyšší frekvence (kde jsou parazitní a nemodelované jevy). Předpokládejme, že $W_I(s)$ je stabilní a takové, že v součinu (5.38) nedochází ke krácení nestabilních nul/pólů, všechny tyto předpoklady jsou pomocné a jen zajišťují to, že všechny perturbované soustavy

mají stejný počet nestabilních pólů a nul pro všechny $\Delta_I(s)$. Tento požadavek je trochu umělý, ale kritický, neboť bez něj většina nástrojů teorie neplatí. Váhová funkce v (5.38) je vlastně normalizovaná perturbace přenosu, platí

$$\left|\frac{G_P(j\omega)}{G_0(j\omega)}-1\right| \le \left|W_I(j\omega)\right| \quad \forall\omega. \tag{5.39}$$

Pro další výklad potřebujeme nadefinovat $\mathcal{H}_\infty$ normu. Je důležité rozlišovat mezi definicí pro SISO a MIMO systémy. Nejprve bude norma definována pro SISO systémy a následně bude přikročeno k definici pro MIMO systémy. Pokud má racionální funkce $R(s)=R(j\omega)$ na imaginární ose omezenou velikost, existuje konstanta $c \ge 0$ taková, že $\left|R(j\omega)\right| \le c \quad \forall\omega \in R$. Nejmenší takové c se označuje $\|R\|_\infty$ a je to norma $\mathcal{H}_\infty$. Podle definice je $\mathcal{H}_\infty$ norma nejvyšší hodnota (přesněji supremum) amplitudové frekvenční charakteristiky (Bodeho grafu) funkce. V Nyquistově charakteristice odpovídá $\mathcal{H}_\infty$ norma nejvzdálenějšímu bodu od počátku. $\mathcal{H}_\infty$ norma popisuje nejhorší směr pro nejhorší frekvenci zkoumaného systému, minimalizací $\mathcal{H}_\infty$ normy minimalizujeme nejhorší případ (špičku maximálního singulárního čísla). Jak víme z kapitoly pojednávající o analýze systému, singulární čísla se u MIMO systému používají k popisu zesílení. Minimalizací $\mathcal{H}_\infty$ normy tedy minimalizujeme nejhorší možné zesílení systému $G(j\omega)$. $\mathcal{H}_\infty$ norma dobře reprezentuje nestrukturovanou neurčitost a má inženýrskou interpretaci na frekvenční charakteristice. Následující formální zápis je jedna z definic $\mathcal{H}_\infty$ normy s využitím singulárního čísla pro MIMO systémy

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega\in R}\bar{\sigma}\left(G(j\omega)\right), \tag{5.40}$$

kde $\bar{\sigma}\left[G(j\omega)\right]$ označuje maximální singulární číslo matice $G(j\omega)$.

Velice důležitým vztahem v robustním řízení je věta o malém zesílení, kterou definujeme pomocí spektrálního poloměru. Spektrální poloměr konstantní čtvercové matice A je velikost vlastního čísla s největší absolutní hodnotou $\rho(A)=\max_i\left|\lambda_i(A)\right|$. Spektrální poloměr není norma (nesplňuje multiplikativnost ani trojúhelníkovou nerovnost), ale je dolní mezí pro všechny maticové normy. Fyzikální interpretace je následující, vlastní číslo udává ‘zesílení’ matice jen v jistém směru (vlastní vektor), takže musí být menší než norma, která zahrnuje všechny směry a udává maximální zesílení. Pro stabilní MIMO přenos otevřené smyčky $L(s)$ je uzavřená smyčka stabilní, když $\rho(j\omega)<1 \quad \forall\omega$. Je-li zesílení <1 ve všech směrech (pro

všechna vlastní čísla) a na všech frekvencích, pak všechny odchylky signálů postupně vymizí a tedy systém je stabilní. Podmínka plyne z Nyquistova kritéria, ale je konzervativnější, protože nebere ohled na fázi. To nám ale v robustním řízení nevadí, jelikož fáze je neurčitá. V robustním řízení se předchozí podmínka používá v jiné formulaci jako tzv. věta o malém zesílení (SGT). Pro stabilní přenos otevřené smyčky $L(s)$ je uzavřená smyčka stabilní, když $\|L(j\omega)\| < 1 \quad \forall\omega$. Speciálně při použití spektrální normy (maximální singulární číslo) můžeme podmínku přepsat pomocí normy $\mathcal{H}_\infty$ jako

$$\|L(s)\|_\infty < 1. \tag{5.41}$$

Pomocí SGT jsme přiblížili definici a význam $\mathcal{H}_\infty$ normy.

Pro další pokračování nám zbývá vysvětlit, z jakého důvodu při návrhu a analýze robustnosti používáme váhové funkce (matice). Z tohoto důvodu nadefinujeme citlivost a komplementární citlivost. Dále budeme používat tuto (klasickou) terminologii a značení:

$L(s) = G(s)K(s)$ přenos otevřené smyčky,

$S(s) = \left[I + L(s)\right]^{-1}$ citlivost,

$T(s) = L(s)\left[I + L(s)\right]^{-1}$ komplementární citlivost.

$S(s)$ vyjadřuje redukci citlivosti, kterou dosáhneme pomocí ZV. Podle Bodeho je $S(s)$ citlivost relativní změny CL přenosu $T(s)$ na relativní změnu (chybu) modelu soustavy. Z přenosů uzavřené smyčky je vidět, že vliv poruchy bude malý pro malé $S(s)$ a vliv šumu měření bude malý pro malé $T(s)$. Ideální návrh by tedy byl zajistit malé $S(s)$ a současně malé $T(s)$. Zajistit malé $S(s)$ a současně i malé $T(s)$ bohužel nejde, jelikož platí identita $S(s) + T(s) = I$. To je vážné omezení pro návrh regulátoru, který má zaručit současně stabilitu, chování a robustnost. Musíme zvolit priority pro jednotlivé frekvenční rozsahy. Tomu se říká tvarování frekvenční charakteristiky. A k tomuto tvarování nám budou právě sloužit váhovací filtry. Klasické tvarování frekvenční charakteristiky tvaruje přenos otevřené smyčky. Protože je zřejmé, jak změna $K(s)$ ovlivňuje $L(s)$ a naopak, je takový způsob návrhu transparentní. Zásadní nevýhodou ale je, že takový postup nebere přímo v úvahu výsledné přenosy uzavřené smyčky. Citlivost $S(s)$ je velmi dobrým indikátorem chování uzavřené smyčky. Protože ideálně chceme $S(s)$ malé, stačí se zabývat amplitudou a fáze nás nemusí

zajímat. Čím je větší citlivost, tím blíže je OL bodu nestability. Typické specifikace na $S(s)$ předepisují šířku pásma, maximální odchylku sledování na vybraných frekvencích, maximální odchylku sledování v ustáleném stavu, tvar $S(s)$ na vybraných frekvencích a špičku M_S. Cílem nominálního sledování je zajistit malou regulační odchylku pro nominální soustavu. Naším cílem tedy je zajistit malou nominální citlivost. Protože to není obecně v celém frekvenčním pásmu možné, snažíme se zajistit malou váženou citlivost. Vliv poruchy na výstup potlačíme, když uděláme citlivost co nejmenší na frekvencích, kde na tom nejvíce záleží, a nebo kde je porucha nejsilnější. Typicky pro nízké frekvence. Tyto požadavky matematicky nejlépe popíšeme pomocí váhové funkce W_P (index je od performance - chování), tak, že horní mez $|S(j\omega)|$ vyjádříme jako $1/|W_P(j\omega)|$. Váhová funkce musí být stabilní racionální funkce, její typický průběh můžeme reprezentovat stabilní přenosovou funkcí (5.42), asymptotický průběh horní meze $1/|W_P(j\omega)|$ je zobrazen na obrázku (Obr. 5.26).

$$W_P(s) = \frac{s/M + \omega_B^*}{s + \omega_B^* A} \tag{5.42}$$

Výběrem váhy ve tvaru $\|W_P(j\omega)S(j\omega)\|_\infty < 1$ můžeme specifikovat mnoho důležitých vlastností, především chování uzavřené zpětnovazební smyčky. Jiné vlastnosti jako je robustní stabilita specifikujeme obdobně, ale pomocí horní meze $1/|W_I(j\omega)|$ velikosti komplementární citlivosti.

$$W_I = \frac{\tau s + r_0}{(\tau / r_\infty)s + 1}, \tag{5.43}$$

kde

r_0 nejistota v rovnovážném stavu,

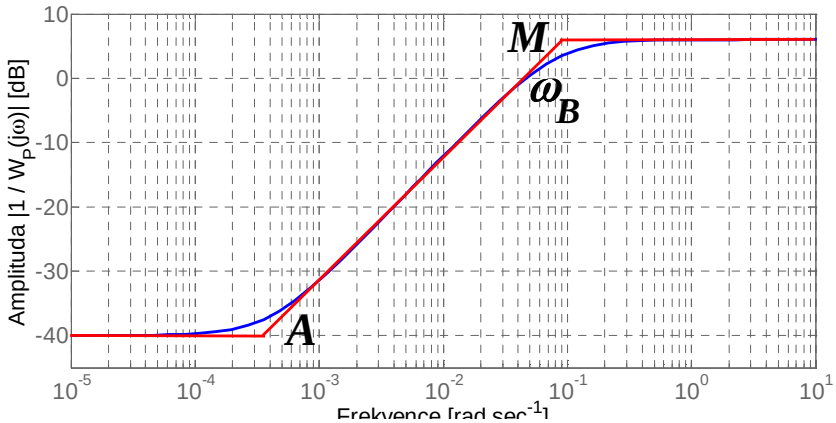
$1/\tau$ frekvence, kde je relativní nejistota 100%,

r_∞ relativní neurčitost na vysokých frekvencích.

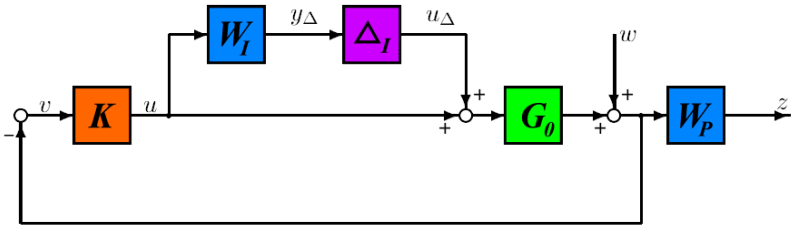
5.4.1 Analýza robustnosti

V této části definujeme pojmy jako robustní stabilita a robustní kvalita řízení, které budeme dále využívat při analýze vlastností navržených regulačních obvodů. Robustní stabilitu lze definovat jako stabilitu uzavřené regulační smyčky s daným regulátorem, která je garanto-

vaná pro všechny přípustné odchylky modelu od skutečného systému, tj. pro všechny perturbované systémy. Obdobně můžeme definovat robustní kvalitu řízení. Robustní kvalita řízení je kvalita řízení uzavřené regulační smyčky s daným regulátorem, která je garantovaná pro všechny přípustné odchylky modelu od skutečného systému.



OBRÁZEK 5.26: *Asymptotický průběh horní meze* $1/\left|W_P\left(j\omega\right)\right|$



OBRÁZEK 5.27: $\mathcal{H}_\infty$ *optimální stabilizace, váhovací filtry*

Kritérium robustní stability si ukážeme pomocí SGT. Regulátor $K\left(s\right)$, který stabilizuje nominální soustavu $G_0\left(s\right)$, stabilizuje robustně také rodinu

$$\mathcal{S} \equiv \left\{G_0\left(s\right)\left[I + W_I\left(s\right)\Delta\left(s\right)\right] \quad \left\|\Delta\right\|_\infty \le 1\right\}, \tag{5.44}$$

právě tehdy, když platí

$$\left\|W_I\left(s\right)T_0\left(s\right)\right\|_\infty < 1. \tag{5.45}$$

Odvození je možné nalézt v [23]. Úpravou kritéria (5.45) odvodíme grafickou interpretaci robustní stability.

$$RS \Leftrightarrow \left\|W_I\left(s\right)T_0\left(s\right)\right\|_\infty < 1$$

$$\Leftrightarrow \left|T_0\left(j\omega\right)\right| < 1/\left|W_I\left(j\omega\right)\right|, \quad \forall\omega$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{W_I(j\omega)L_0(j\omega)}{1+L_0(j\omega)}\right| < 1, \quad \forall\omega$$
$$\Leftrightarrow \left|W_I(j\omega)L_0(j\omega)\right| < \left|1+L_0(j\omega)\right|, \quad \forall\omega \tag{5.46}$$

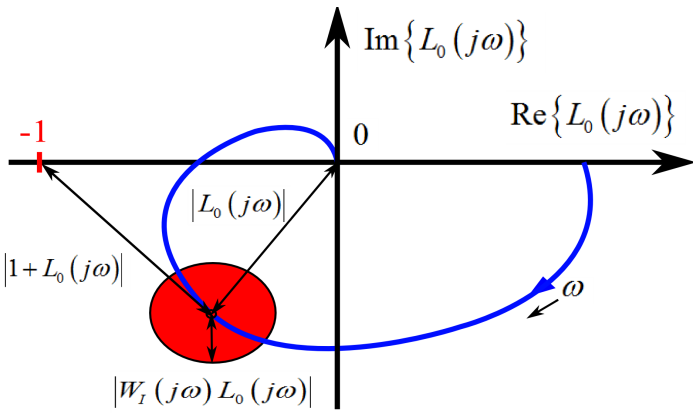
Nutná a postačující podmínka robustní kvality řízení je potom pro multiplikativní model neurčitosti dána jako součet nominální kvality řízení a podmínky robustní stability. Formální zápis je

$$\left\|W_P(s)S_0(s)\right\|_\infty + \left\|W_I(s)T_0(s)\right\|_\infty < 1. \tag{5.47}$$

Odvození je opět možné nalézt v [23]. Úpravou kritéria (5.47) odvodíme grafickou interpretaci robustní kvality řízení.

$$\begin{aligned}
RP &\Leftrightarrow \left|W_P(j\omega)S(j\omega)\right| < 1, \quad \forall S, \forall\omega \\
&\Leftrightarrow \left|W_P(j\omega)\right| < \left|I+L(j\omega)\right|, \quad \forall L, \forall\omega \\
&\Leftrightarrow L(j\omega) = G_0(j\omega)K(j\omega)\left(I+W_I(j\omega)\Delta(j\omega)\right) = \\
&= L_0(j\omega)+W_I(j\omega)L_0(j\omega)\Delta(j\omega), \quad \left|\Delta(j\omega)\right| \le 1, \forall\omega \\
&\Leftrightarrow \left|W_P(j\omega)\right| < \left|1+L_0(j\omega)+W_I(j\omega)L_0(j\omega)\Delta(j\omega)\right|, \quad \forall\omega \\
&\Leftrightarrow \left|1+L_0(j\omega)\right| > \left|W_P(j\omega)\right| + \left|W_I(j\omega)L_0(j\omega)\right|, \quad \forall\omega \\
&\Leftrightarrow \left|W_P(j\omega)S(j\omega)\right| + \left|W_I(j\omega)T(j\omega)\right| < 1, \quad \forall\omega
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Grafická interpretace kritéria robustní kvality řízení podle (5.48, Obr. 5.29) nám říká, že pro každé ω musí být vzdálenost $L_0(j\omega)$ od bodu -1 větší než součet poloměrů kruhů a nesmí se tedy oba kruhy pro žádné ω protínat ani dotýkat přitom se oba poloměry mění s ω.



OBRÁZEK 5.28: *Grafická interpretace robustní stability – multiplikativní model neurčitosti*

V této práci budeme provádět analýzu pomocí vytvořeného zobecněného systému a $\mu-$analýzy (analýza pomocí strukturovaného singulárního čísla). Zobecněný systém se vytvoří podle (Obr. 5.30), kdy se delta bloky “vyvedou“ mimo systém. Více o tvorbě zobecně-

ných systémů je možné nalézt v [23]. V našem případě podle schématu (Obr. 5.27, 5.30) dostaneme pro vstup $\begin{bmatrix} u_\Delta & w & u \end{bmatrix}^T$ a výstup $\begin{bmatrix} y_\Delta & z & v \end{bmatrix}^T$ zobecněný systém ve tvaru

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & W_I \\ W_P G & W_P & W_P G \\ -G & -I & -G \end{bmatrix}.$$

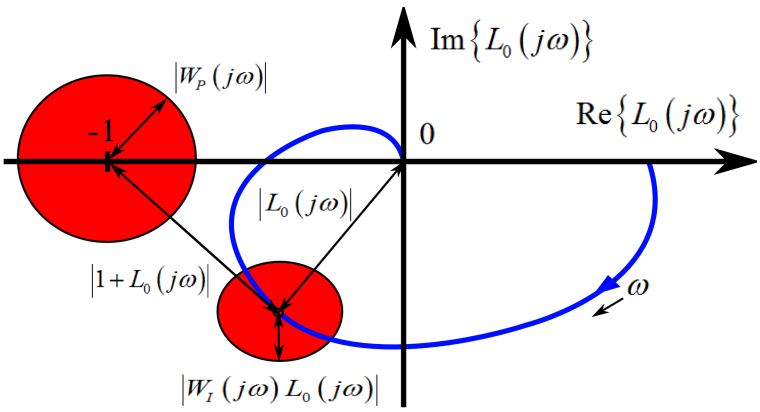
Všimněme si, že přenosová funkce z u_Δ na y_Δ (levý horní element v matici P) je 0, protože u_Δ nemá žádný přímý vliv na y_Δ (s výjimkou spojení přes K). Dále chceme odvodit matici N, která by korespondovala s (Obr. 5.30), N-Δ struktura pro analýzu robustního chování. Za prvé rozdělíme matici P podle matice K, tj.

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ W_P G & W_P \end{bmatrix}, P_{12} = \begin{bmatrix} W_I \\ W_P G \end{bmatrix}, P_{21} = \begin{bmatrix} -G & -I \end{bmatrix}, P_{22} = -G,$$

nyní nalezneme matici N podle vztahu $N = F_l(P,K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}$:

$$N = \begin{bmatrix} -W_I KG(I+KG)^{-1} & -W_I K(I+KG)^{-1} \\ W_P G(I+KG)^{-1} & W_P(I+KG)^{-1} \end{bmatrix}, \tag{5.49}$$

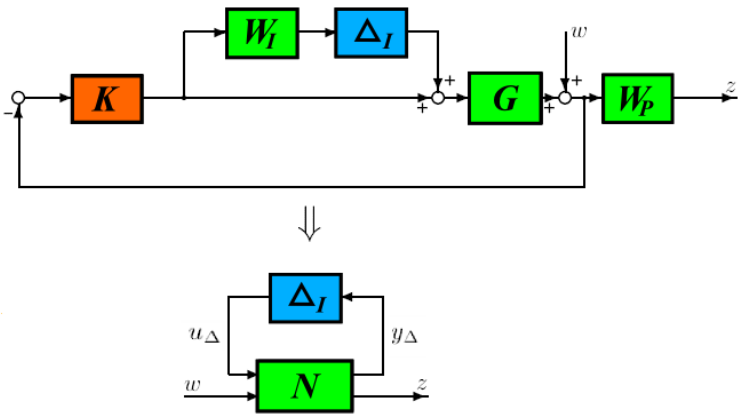
kde N souvisí s maticí P a K podle spodní lineární frakční transformace. Matici N jsme mohly alternativně odvodit přímo z (Obr. 5.30) vyhodnocením přenosové maticové funkce uzavřené smyčky ze vstupu $\begin{bmatrix} u_\Delta & w \end{bmatrix}^T$ na výstup $\begin{bmatrix} y_\Delta & z \end{bmatrix}^T$ (bez přerušení smyčky před a za maticí K)



OBRÁZEK 5.29: *Grafická interpretace robustní kvality řízení – multiplikativní model neurčitosti*

Robustní kvalitu budeme zkoumat coby robustní stabilitu se strukturovanou neurčitostí. Druhý delta blok je zapojen s filtrem W_P. V $M\Delta$ konfiguraci [23] má delta blok diagonální strukturu

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}, \quad \|\Delta_i\|_\infty \le 1, i = 1, 2 . \tag{5.50}$$



OBRÁZEK 5.30: *Zobecněný systém*

Strukturované singulární číslo (označení SSV, μ) je funkce, která poskytuje zobecněný popis singulárního čísla $\bar{\sigma}$ a spektrálního poloměru ρ. Zobecňuje RS podmínku $\bar{\sigma}(M) \le 1, \forall \omega$ pro případ, kdy delta blok má strukturu. Definice SSV pro neznámou strukturu Δ

$$\mu(M) = \max_{\mu} \left\{ \mu \,|\, \det\left(I - \frac{1}{\mu} M\Delta \right) = 0, \bar{\sigma}(\Delta) \le 1 \right\}. \tag{5.51}$$

Je důležité poznamenat, že hodnota $\mu(M)$ závisí také na struktuře Δ. To je někdy explicitně zapsáno pomocí notace $\mu_\Delta(M)$. Hodnota $\mu = 1$ znamená, že existuje perturbace s $\bar{\sigma}(\Delta) = 1$, která je tak dostatečně velká na to, aby bylo $I - M\Delta$ singulární. Větší hodnota μ je také špatná, to znamená, že menší perturbace udělají $I - M\Delta$ singulární, zatímco menší hodnota μ je dobrá. Kombinací (5.45, 5.47) s definicí μ (5.51) můžeme definovat nutné a postačující podmínky pro RS a RP za použití μ-analýzy. Odvození a důkaz je možné nalézt v [23]. Uspořádáním nejistoty systému do $N\Delta$ struktury (Obr. 5.30), kde blokově diagonální perturbace musí splňovat podmínku $\|\Delta\|_\infty \le 1$, můžeme zavést

$$F = F_u(N, \Delta) = N_{22} + N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1} N_{12} \tag{5.52}$$

a požadavek na robustní kvalitu řízení je $\|F\|_\infty \le 1$ pro všechny přípustné perturbace. Pak si můžeme dovolit psát:

$$
\begin{aligned}
&NS \Leftrightarrow N \text{ vnitřně stabilní} \\
&\text{NP} \Leftrightarrow \bar{\sigma}\left(N_{22}\right) < 1, \quad \forall \omega, NS \\
&RS \Leftrightarrow \mu_{\Delta}\left(N_{11}\right) < 1, \quad \forall \omega, NS \\
&RP \Leftrightarrow \mu_{\tilde{\Delta}}\left(N\right) < 1, \quad \forall \omega, NS, \tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_I & 0 \\ 0 & \Delta_P \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{5.53}
$$

Zde je Δ_I blokově diagonální matice (její detailní struktura závisí na struktuře, kterou reprezentuje), zatímco Δ_P je plná komplexní matice. Je vhodné ještě poznamenat, že nominální stabilitu (NS) je nutné testovat samostatně ve všech případech. Použití nestrukturované neurčitosti a podmínky $\bar{\sigma}\left(xx\right) < 1$ je mnohdy příliš konzervativní, a proto se přistupuje k $\mu-$analýze. Všechny tyto získané poznatky budeme využívat v následujících dvou podkapitolách.

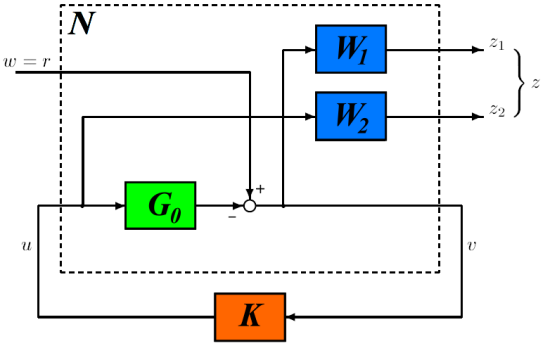
5.4.2 Metoda minimalizace $\mathcal{H}_\infty$ normy smíšené citlivostní funkce

Návrhová metoda založená na minimalizaci smíšené citlivostní funkce pomocí minimalizace $\mathcal{H}_\infty$ normy systému je vyložena v kapitole 9.3.5 [23]. Dalším užitečným zdrojem je manuál k Robust Control Toolboxu pro Matlab, konkrétně k funkci `mixsyn`. Podmínku robustního chování aproximujeme pro účely návrhu robustního regulátoru často smíšenou citlivostní funkcí. To umožňuje zajistit robustní chování návrhem $\mathcal{H}_\infty$ optimalizace smíšené citlivostní funkce. Metoda minimalizace $\mathcal{H}_\infty$ normy smíšené citlivostní funkce spočívá v nalezení takového regulátoru, který v uzavřené smyčce minimalizuje smíšenou citlivostní funkci

$$
\min_{K_{\text{stabilní}}} \left\| \begin{bmatrix} W_P S \\ W_I T \end{bmatrix} \right\|_\infty . \tag{5.54}
$$

Smíšený požadavek je matematicky výhodný, neboť umožňuje jednodušší syntézu. To je hlavní důvod, proč ho volíme. Pro výpočet regulátoru je potřeba navrhnout dva váhovací filtry. Je potřeba si uvědomit, že váhovací filtry jsou v tomto případě jen ‘ladící knoflíky’, kterými ‘točíme’ než dosáhneme uspokojivého výsledku (filtr W_I charakterizuje neurčitost v soustavě, pokud bychom jí znali tak s filtrem hýbat nemůžeme). Vrácené hodnoty S, T by měli splňovat následující nerovnosti:

$$
\begin{aligned}
\bar{\sigma}\left(S\left(j\omega\right)\right) &\le \gamma \underline{\sigma}\left(W_P^{-1}\left(j\omega\right)\right) \\
\bar{\sigma}\left(T\left(j\omega\right)\right) &\le \gamma \underline{\sigma}\left(W_I^{-1}\left(j\omega\right)\right)
\end{aligned}
\tag{5.55}
$$



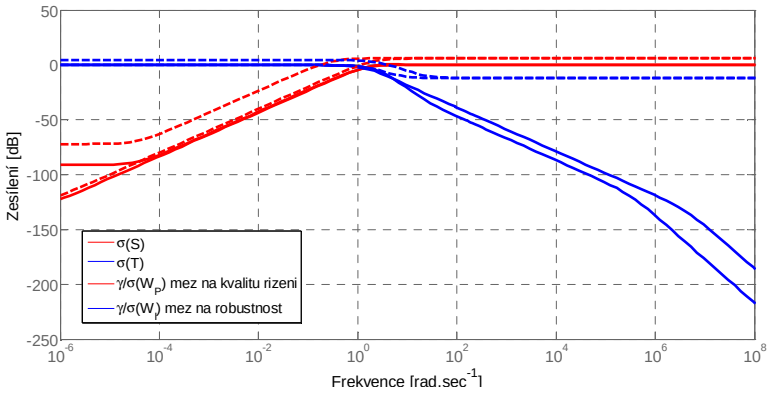
OBRÁZEK 5.31: *Schématické znázornění minimalizace smíšené citlivostní funkce ve standardní formě pro sledování*

V našem případě mají filtry podobu diagonální matice pro každý kanál zvlášť. Neurčitost byla modelována jako multiplikativní na každém vstupu asi 20% na nízkých frekvencích a 100% na frekvenci $1[rad/\sec]$.

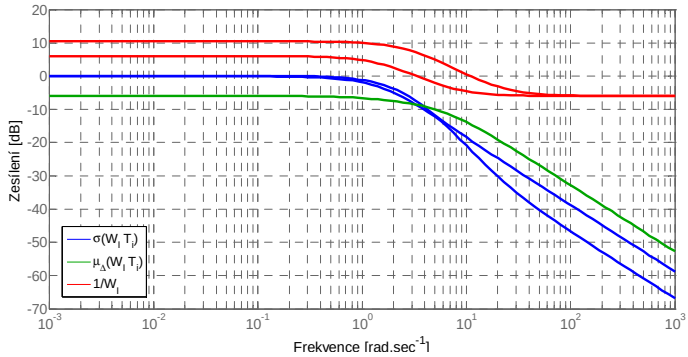
$$W_P = \begin{bmatrix} w_{p1} & 0 \\ 0 & w_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{0,25s+0,075}{s+3,75.10^{-5}} & 0 \\ 0 & \dfrac{0,25s+0,5}{s+0,5.10^{-7}} \end{bmatrix},$$

$$W_I = \begin{bmatrix} w_{i1} & 0 \\ 0 & w_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{0,3s+0,5}{0,15s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{0,1s+0,3}{0,05s+1} \end{bmatrix}. \tag{5.56}$$

Pro takto zvolené váhové matice jsme spočetli regulátor K, který minimalizuje smíšenou citlivostní funkci (5.54). Na obrázku (Obr. 5.32) jsou zobrazeny meze na kvalitu řízení a na robustnost, jak je vidět, podařilo se nám splnit nerovnost (5.55). Takto navrhnutý regulační obvod metodou minimalizace smíšené citlivostní funkce splňuje podmínky robustní stability a robustní kvality řízení podle podmínky (5.53).

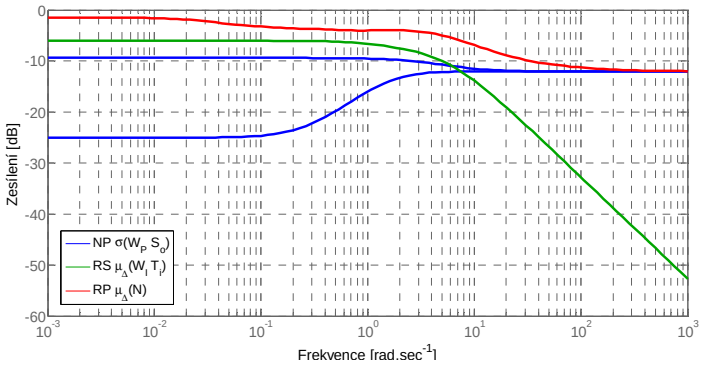


OBRÁZEK 5.32: *Meze na kvalitu řízení a robustnost*

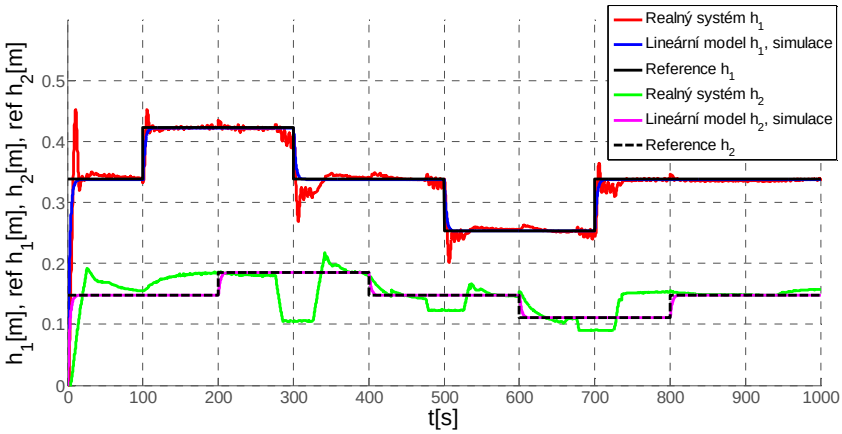


OBRÁZEK 5.33: *Robustní stabilita - minimalizace $\mathcal{H}_\infty$ normy smíšené citlivostní funkce*

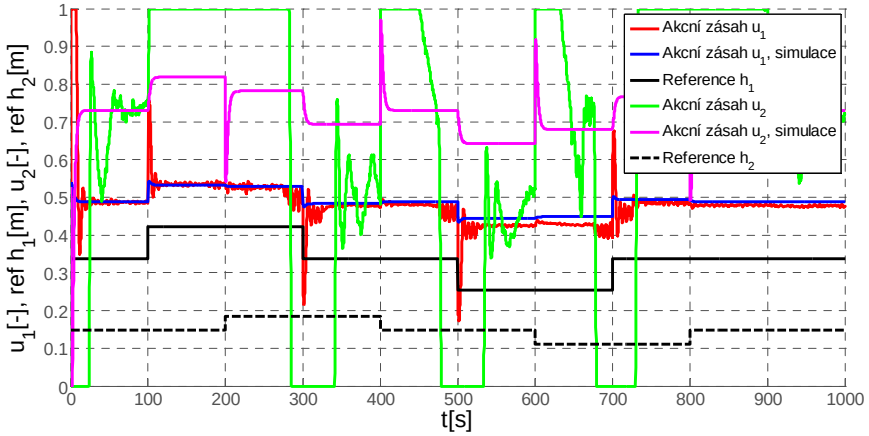
Jak se zlepšila kvalita řízení systému spojených nádob s poruchou, je možné vidět na obrázcích (Obr. 5.35, 5.36), kde jsou zobrazeny odezvy systému na průběh referenčního signálu. Z obrázků je vidět, že se nám u regulace na reálném systému podařilo částečně potlačit interakce systému. Další obrázky z řízení výšek hladin spojených nádob minimalizací $\mathcal{H}_\infty$ normy smíšené citlivostní funkce lze najít v příloze F, která je součástí tohoto textu a je umístěná na přiloženém CD.



OBRÁZEK 5.34: *Robustní kvalita řízení - minimalizace $\mathcal{H}_\infty$ normy smíšené citlivostní funkce*



OBRÁZEK 5.35: *Regulace výšky hladin pomocí minimalizace $\mathcal{H}_\infty$ normy smíšené citlivostní funkce, při působící poruše – Odezva*



OBRÁZEK 5.36: *Regulace výšky hladin pomocí minimalizace $\mathcal{H}_\infty$ normy smíšené citlivostní funkce, při působící poruše – Akční zásahy*

5.4.3 Metoda robustního tvarování frekvenční charakteristiky minimalizací $\mathcal{H}_\infty$ normy (Loop-shaping $\mathcal{H}_\infty$)

Detaily této metody je možno nalézt v [6]. Dalším užitečným zdrojem je manuál k Robust Control Toolboxu pro Matlab, konkrétně k funkci `ncfsyn`. Zde prezentovaná metoda návrhu robustního regulátoru je na uživatelské úrovni velice dobře vysvětlena v kapitole [23, 9.4]. Dále v této části bude uveden jen stručný výklad této metody. Cílem je navrhnout robustní regulátor pro zkoumaný systém tak, aby se dosáhlo požadovaného tvaru frekvenční charakteristiky otevřené smyčky. Tvar OL frekvenční charakteristiky určuje chování, ustálenou odchylku a dynamickou odezvu řízeného systému.

Každý stabilní přenos můžeme rozložit na dva stabilní přenosy pomocí normalizované levé soudělné faktorizace $\tilde{G}(s) = M_L^{-1} N_L$. Perturbovaný model soustavy $G_p(s)$ můžeme zapsat jako

$$G_p(s) = (M + \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N), \tag{5.57}$$

kde Δ_M, Δ_N jsou stabilní neznámé přenosové funkce, které představují nejistoty v nominálním modelu soustavy. Cílem robustního řízení je stabilizovat nejen nominální model G_0, ale také celou rodinu perturbovaných systému, které jsou definovány jako

$$G_p(s) = \left\{ (M + \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N) : \left\| \Delta_M \quad \Delta_N \right\|_\infty < \varepsilon \right\}, \tag{5.58}$$

kde $\varepsilon > 0$ je parametr návrhu. Maximalizace tohoto parametru je problém robustní stabilizace normalizovaného soudělného přenosu, který byl popsán a vyřešen v [6]. Pro perturbovanou zpětnou vazbu z (5.57) platí, že systém bude pro každé $\left\| \Delta_M \quad \Delta_N \right\|_\infty < \varepsilon$ robustně stabilní právě tehdy, když nominální zpětná vazba bude stabilní a zároveň bude splněna věta o malém zesílení (SGT)

$$\gamma \hat{=} \left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} \left(I + G_s K \right)^{-1} M_l^{-1} \right\|_\infty < 1/\varepsilon , \tag{5.59}$$

kde γ je $\mathcal{H}_\infty$ norma systému z ϕ na $\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}$ (viz. Obr. 5.37) a $\left(I + G_s K \right)^{-1}$ je citlivostní funkce. Nejmenší možná dosažená hodnota parametru γ koresponduje s maximální hodnotou parametru ε a je dáná jako

$$\gamma_{\min} = \varepsilon_{\max}^{-1} = \left\{ 1 - \left\| \left[N \quad M \right] \right\|_H^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + \rho\left(XZ \right) \right)^{\frac{1}{2}} , \tag{5.60}$$

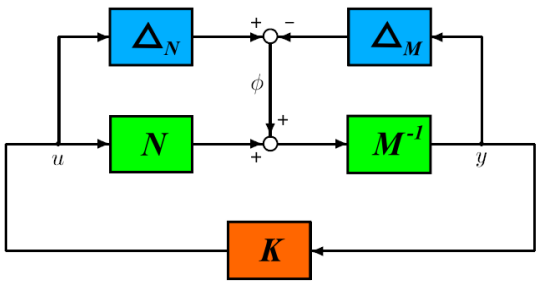
kde $\| \cdot \|_H$ označuje Hankelovu normu, ρ označuje spektrální rádius (maximální vlastní číslo).

Výše uvedený $\mathcal{H}_\infty$ optimalizační problém je možné řešit analyticky. Pro minimální stavovou realizaci $\left(A, B, C, D, \right)$ systému $G(s)$ platí, že Z je jediné pozitivně definitní řešení algebraické Riccattiho rovnice

$$\left(A - BS^{-1}D^T C \right) Z + Z \left(A - BS^{-1}D^T C \right)^T - ZC^T R^{-1} CZ + BS^{-1}B^T = 0 , \tag{5.61}$$

kde $R = I + DD^T$, $S = I + D^T D$. A X je jediné pozitivně definitní řešení následující algebraické Riccatiho rovnice

$$\left(A - BS^{-1}D^T C \right)^T X + X \left(A - BS^{-1}D^T C \right) - XBS^{-1}B^T X + C^T R^{-1} C = 0 . \tag{5.62}$$



OBRÁZEK 5.37: *Problém $\mathcal{H}_\infty$ optimální stabilizace*

Můžeme si všimnout, že algebraické Riccatiho rovnice se nám značně zjednoduší pro striktně ryzí systémy, tj., když $D = 0$, což je i náš případ. Regulátor, který nám garantuje (SGT 5.59) pro určitou hodnotu $\gamma > \gamma_{\min}$, je pak dán

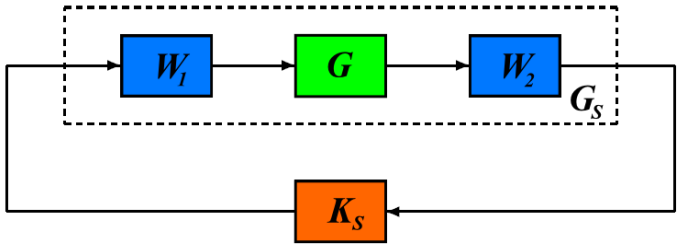
$$
\begin{aligned}
K &= \begin{bmatrix} A+BF+\gamma^2\left(L^T\right)^{-1}ZC^T\left(C+DF\right) & \gamma^2\left(L^T\right)^{-1}ZC^T \\ B^TX & -D^T \end{bmatrix} \\
F &= -S^{-1}\left(D^TC+B^TX\right) \\
L &= \left(1-\gamma^2\right)I+XZ.
\end{aligned}
\tag{5.63}
$$

V praktických aplikacích stačí splnit $\gamma \geq 1{,}1\gamma_{\min}$ aby se zabránilo singularitě L.

Robustní stabilizace tak, jak byla definována na předchozích řádcích, nemá sama o sobě moc využití v praxi a to z jednoho prostého důvodu, návrhář regulačního obvodu není schopen při návrhu specifikovat požadavky na kvalitu řízení. Za tímto účelem byla vyvinuta metoda, kdy se nejdříve pomocí tzv. prekompenzátoru $W_1(s)$ a postkompenzátoru $W_2(s)$ vytvaruje frekvenční charakteristika otevřené smyčky dle požadavků. Vytvarovaná soustava je pak složena z původního systému, prekompenzátoru a postkompenzátoru, jak je ukázáno na obrázku (Obr. 5.38).

$$G_s(s) = W_2(s)G_0(s)W_1(s) \tag{5.64}$$

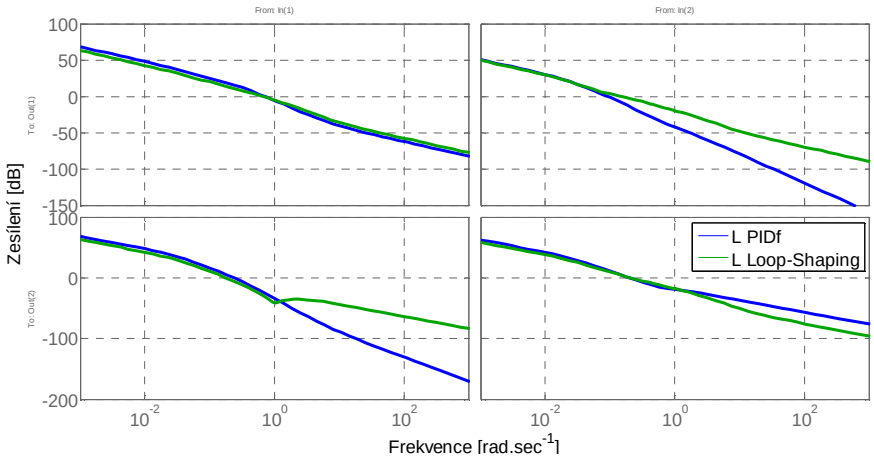
Pro tuto vytvarovanou soustavu najdeme stabilizující robustní regulátor K_s řešením $\mathcal{H}_\infty$ optimalizačního problému pro tvarovaný systém $G_s(s)$. Výsledný zpětnovazební regulátor pro soustavu $G(s)$ je pak dán vztahem $K = W_1K_sW_2$.



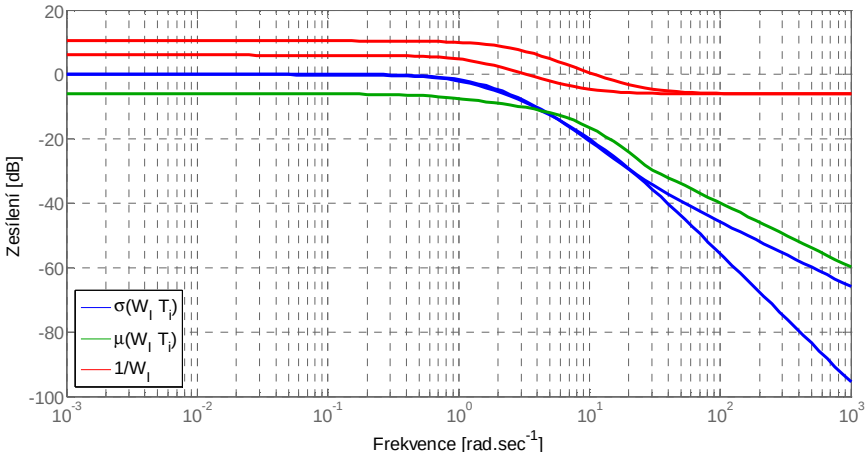
OBRÁZEK 5.38: *Tvarovaná soustava a regulátor*

V praxi se nejčastěji metoda aplikuje tak, že k již navrženému regulátoru v tomto případě jsme použili decentralizovaný PIDf regulátor, jehož parametry byly navrhnuty v kapitole 5.1 přidá další, který nebude ovlivňovat parametry již navrženého obvodu, ale dodá další vlastnost například robustní stabilitu. Uvedený postup jsme aplikovali tak, že jako filtr $W_2(s)$ byla použita diagonální matice regulátorů (5.1, s parametry 5.2 a 5.3), filtr $W_1(s)$ byl zvolen jako jednotková matice příslušné dimenze. Výše uvedený postup obsahuje všechny podstatné složky klasického tvarování frekvenční charakteristiky jen s tím rozdílem, že výsledný regulační obvod splňuje podmínky robustní stability a robustní kvality řízení.

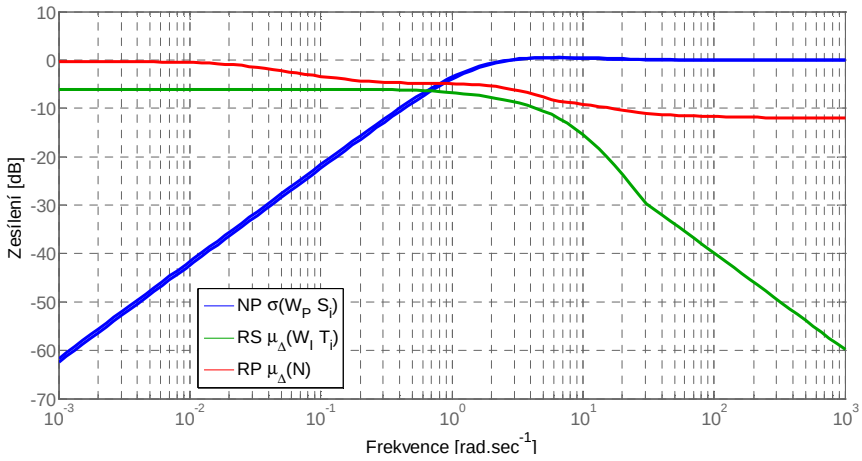
Vytvarovaná frekvenční charakteristika otevřené smyčky je zobrazena na obrázku (Obr. 5.39). Takto upravený regulační obvod metodou robustního tvarování frekvenční charakteristiky splňuje podmínky robustní stability a robustní kvality řízení podle podmínky (5.53). Samotný návrh decentralizovaného regulátoru PIDf nesplňoval ani jednu podmínku, byla splněna pouze podmínka nominální kvality řízení a nominální stability. Z obrázku (Obr. 5.39) je vidět, že došlo ke zvětšení šířky pásma oproti decentralizovanému PIDf regulátoru, což znamená rychlejší odezvu navrženého regulačního obvodu.



OBRÁZEK 5.39: *Frekvenční charakteristika otevřené smyčky systému s $\mathcal{H}_\infty$ optimálním regulátorem*

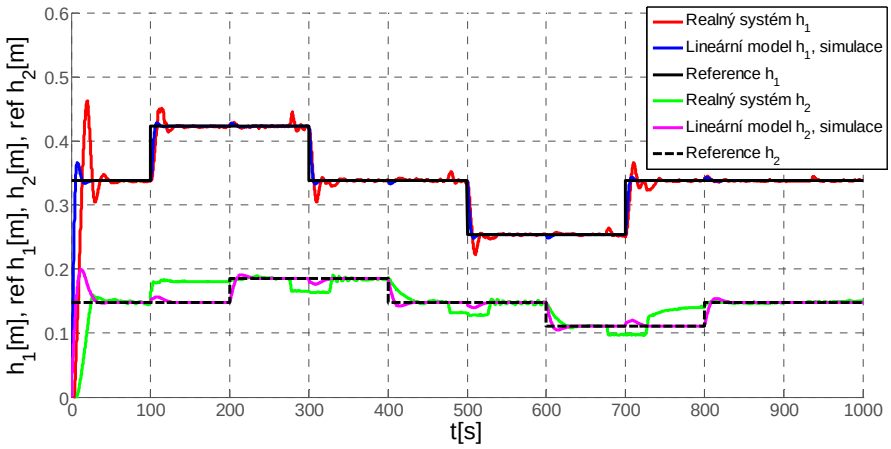


OBRÁZEK 5.40: *Robustní stabilita $\mathcal{H}_\infty$ Loop-Shaping*

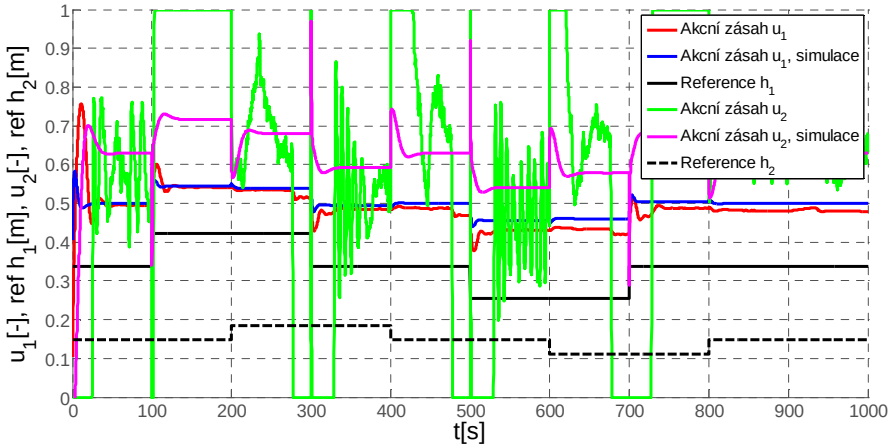


OBRÁZEK 5.41: *Robustní kvalita řízení $\mathcal{H}_\infty$ Loop-Shaping*

Jak se zlepšila kvalita řízení systému spojených nádob s poruchou, je možné vidět na následujících dvou obrázcích (Obr. 5.42, 5.43), kde jsou zobrazeny odezvy systému na referenční signál. Z obrázků je vidět, že se nám u regulace na reálném systému nepodařilo opět odstranit interakce. Při srovnání následujících odezev s odezvami při regulaci decentralizovaným PIDf regulátorem se nám podařilo potlačit interakce a zároveň kvalita regulačního pochodu je značně lepší. Další obrázky z řízení výšek hladin spojených nádob $\mathcal{H}_\infty$ Loop-Shaping lze najít v příloze G, která je součástí tohoto textu a je umístěná na přiloženém CD.



OBRÁZEK 5.42: *Regulace výšky hladin pomocí $\mathcal{H}_\infty$ Loop-Shaping regulátoru, při působící poruše – Odezva*



OBRÁZEK 5.43: *Regulace výšky hladin pomocí $\mathcal{H}_\infty$ Loop-Shaping regulátoru, při působící poruše – Akční zásahy*

Kapitola 6

Závěr

V práci se podařilo splnit všechny vytyčené cíle a body ze zadání. V rámci této práce byl proveden popis systému modelu spojených nádrží, který je umístěn v laboratoři K23 Katedry řídicí techniky. Na základě popisu systému byl odvozen nelineární matematický model, který byl ve vhodně zvoleném pracovním bodě linearizován. S tímto lineárním modelem, který věrohodně popisuje chování modelu spojených nádrží v okolí zvoleného pracovního bodu, byla provedena důkladná analýza systému, ze které bylo zjištěno, že nemusíme očekávat žádné problémy s řízením výšek hladin v obou nádržích. Následovně pro linearizovaný model bylo navrženo šest typů regulátorů.

Při testování modelu se přišlo na několik nedostatků. Jedním z problémů je citlivost hladinových snímačů na vibrace, které se šíří kapalinou. Zdrojem je samotné čerpadlo, ale projevují se i otřesy způsobené vně modelu (např. bouchnutím do stolu, vibrace v podlaze atd.). Dojde k rozhoupání hladiny, což se projeví jako šum měření a je nutné tento signál filtrovat. Filtrace se děje po změření signálu v programu Simulink. Byl zde navrhnut Butterworthův filtr druhého řádu typu dolní propust. Dalším problémem bylo zjištění nestálost čerpání čerpadla v čase. Tento problém byl odstraněn tak, že při každém měření se po zapnutí modelu čekalo na zahřátí čerpadla. Dalším zjištěným nedostatkem byla znovunastavitelnost výpustního ventilu, kdy jsme přišli na to, že maximální hodnoty zjištěné z katalogového listu pro tuto vlastnost byly překročeny zhruba o 10%. Tento nedostatek se nedal odstranit, byl způsoben výběrem výpustního čerpadla při návrhu systému. Posledním nedostatkem byl malý průřez výpustního potrubí, kdy nastával problém při řízení výšek hladin v nádržích, když se regulo-

valo ve druhé nádrži s určitou regulační odchylkou. Tato odchylka byla způsobena tím, že do druhé nádrže přitékalo více vody než stačilo odtéct při maximálně otevřeném výpustním ventilu. Velikost regulační odchylky byla vždy daná směrem změny referenčního signálu. Tento problém by se dal elegantně vyřešit zvolením jiného pracovního bodu, kdy by výšky hladin v obou nádržích byly blíže k sobě. Tím pádem by při změně referenčního signálu nedocházelo k tak velkým skokům a řídicí signál pro výpustní ventil by se nedostával tak často do saturace. Námi zvolený pracovní bod má za následek v některých případěch, že pro určité směry změn referenčního signálu přestává být linearizovaný model lineárním v okolí pracovního bodu vlivem saturace akčního členu.

Matematický model spojených nádrží představuje soustavu dvou nelineárních diferenciálních rovnic. V modelu není uvažována dynamika čerpadla a výpustního ventilu. Toto zanedbání je možné provést z důvodu, že dynamika celého systému je řádově pomalejší. Jediný problém zkoumaného systému je ten, že jeho matice přenosových funkcí není diagonální a tudíž při řízení jsou viditelné interakce mezi kanály.

Pro systém spojených nádrží bylo navrženo šest regulátorů, které měly za úkol sledovat změny referenčního signálu v obou nádržích. Řízení výšek hladin je provedeno decentralizovaným PIDf regulátorem, LQG, dynamickým rozvazbovacím regulátorem, stavovým rozvazbovacím regulátorem, regulátorem založeným na minimalizaci $\mathcal{H}_\infty$ normy smíšené citlivostní funkce a $\mathcal{H}_\infty$ Loop-Shaping.

Kvalita řízení výšek hladin je pro všechny typů regulátorů velice dobrá. Řídicí veličina se pohybuje v rozmezí maximálního vstupního signálu systému. Na kvalitu řízení měl dosti velký vliv směr vstupního signálu, v tomto případě pořadí změn v referenčním signálu, Kdy docházelo k jevu, že regulátor při řízení výšky v druhé nádrži sledoval referenční signál s trvalou regulační odchylkou. Jak již bylo zmíněno, tento problém byl způsobený tím, že plocha výpustního ventilu neodpovídala výkonu celého systému. Do druhé nádrže pak přitékalo více vody, než stačilo vytékat při maximálním otevření výpustního ventilu. Tento problém se dal částečně odstranit přivedením poruchového signálu v podobě vypnutí přepouštěcího ventilu a nebo jinou volbou pracovního bodu, kdy by se zmenšil rozdíl výšek hladin mezi nádržemi. První možnost nemá co dočinění s teorií řízení, byla zde spíše ilustrována jako možný způsob eliminace našeho problému. Druhá možnost v jiné volbě výšky pracovních hladin byl ilustrován u několika odezev. Všechny zde navržené typy regulátorů se s přítomným poruchovým signálem dokázaly velice kvalitně vyrovnat a po uplynutí přechodového děje opět zajistili sledování referenčního signálu.

Dále byl v této práci odladěn Kalmanův filtr, který odhaduje stavy v optimálním režimu tak, jak bylo dokázáno testem bělosti chyby odhadu. Kalmanův filtr byl také podroben experimentu, kdy se zkoumal jeho datový krok pro filtraci signálů v systému, kdy byl odpojen Butterworthův filtr

Na zobrazených průbězích jsou vidět interakce mezi jednotlivými kanály, kdy se změna referenčního signálu pro jednu nádrž negativně projeví překývnutím hladiny ve druhé nádrži. Tento problém nebyl vyřešen na reálném modelu ani návrhem regulátoru, který měl za úkol eliminovat interakce. Eliminace interakcí se podařila pouze u simulace na lineárním modelu. Na reálném systému se podařilo v některých případech interakce potlačit.

Porovnáme-li všechny typy regulátorů a všechny dosažené výsledky simulací, zjistíme, že nelze tak snadno rozhodnout, který typ regulátoru s daným nastavením je při řízení výšek hladin v systému spojených nádrží nejlepší. Kvalita sledování referenčních signálů obou výstupních veličin je velice dobrá při regulaci LQG regulátorem, stavovým rozvazbovacím regulátorem, a nebo také pomocí $\mathcal{H}_\infty$ Loop-Shapingu. Můžeme si také všimnout, že použitím zcela odlišných přístupů návrhu regulátorů jsme nakonec dospěli ve všech případech k podobným výsledkům. Při porovnání regulací pomocí $\mathcal{H}_\infty$ optimalizace, kdy se návrh děje ve frekvenční oblasti a regulace pomocí LQG, kdy kvalitu regulace zadáváme pomocí váhových matic Q a R, vidíme, že jejich algoritmy řízení dospěly zcela odlišnými cestami k téměř shodné kvalitě řízení. Dále bylo také dokázáno, že ne vždy lze tak snadno aplikovat teorii řízení na řízení reálného systému. Další zpracované odezvy z jednotlivých měření jsou zobrazeny v příloze, která je umístěna na CD, které je součástí tohoto textu

Tato diplomová práce byla vytvořena v prostředí [33]. Regulátory byly spočteny pomocí vytvořených skriptů v programu [32], výsledné simulace navržených regulačních obvodů byly prováděny pomocí programu [34]. Všechny schématické obrázky byly vytvořeny v programu [31], výsledky z jednotlivých měření byly zpracovány v programu [32].

Literatura

A Knižní publikace a elektronické materiály

[1] ANTSAKLIS, P.J., MICHEL, A.N. *A Linear Systems Primer*. Birkhauser, 2007. ISBN-13: 978-0-8176-4460-4.

[2] ASCO JOUCOMATIC. *Katalogový list – digitální ventil SCG262A264* . [online]. Dostupné z WWW:⟨http://www.ascojoucomatic.cz/data/dokumenty/V225-0003cz.pdf⟩. [cit. 18-01-2010].

[3] ASCO JOUCOMATIC. *Katalogový list – proporcionální ventil SCG202A057V*. [on-line]. Dostupné z WWW:⟨http://www.asconumatics.de/images/site/upload/_de/pdf1/AMT_en_103.pdf⟩. [cit. 18-01-2010].

[4] ČELIKOVSKÝ, S. *Nelineární systémy*. ČVUT 2005. ISBN 80-01-03435-6

[5] FRANKLIN, G.F., POWELL, J.D., EMANI-NAEINI, A. *Feedback control of dynamic systems*. Prentice Hall, 2006. ISBN 0-13-149930-0

[6] GLOVER, K., MCFARLANE, D. *Robust stabilization of normalized coprime factor plant description with $\mathcal{H}_\infty$-bounded uncertainty*. IEEE Transaction on Automatic Control, 1989 [online]. Dostupné z WWW:⟨ http://support.dce.felk.cvut.cz/e-kurzy/fil.php/2/clanky/Glover_1989.pdf⟩. [cit. 09-08-2010].

[7] GREEN, M., LIMEBEER, D., J., N. *Linear robust control*. Prentice Hall 1994. [on-line]. Dostupné z WWW:⟨ http://www3.imperial.ac.uk/portal/pls/portallive/docs/1/7287085.PDF⟩. [cit. 05-08-2010].

[8] HANZLÍK, J. (2008) *Distribuovaný řídicí systém s automaty Rockwell Automation – Diplomová práce.* ČVUT v Praze, Fakulta elektrotechnická. [online]. Dostupné z WWW:⟨http://dce.felk.cvut.cz/dolezilkova/diplomky/2008/DP_2008_hanzlik_jiri⟩. [cit. 10-05-2009].

[9] HAVLENA, V. *Odhadování a filtrace: doplňkové skriptum.* ČVUT Praha 2002. ISBN: 80-01-02587-X.

[10] HAVLENA, V., ŠTECHA, J. *Moderní teorie řízení.* ČVUT Praha 1999. ISBN: 80-01-02095-9.

[11] HAVLENA, V. *Moderní teorie řízení, slajdy z přednášek.* ČVUT v Praze, Fakulta elektrotechnická. [online]. Dostupné z WWW:⟨http://support.dce.felk.cvut.cz/e-kurzy/file.php/15/prednasky/mtr_old.pdf⟩. [cit. 16-03-2010]

[12] HURÁK, Z. *Studijní materiály z předmětu X35ROR.* ČVUT v Praze, Fakulta e-lektrotechnická. [online]. Dostupné z WWW:⟨http://support.dce.felk.cvut.cz/e-kurzy/mod/ressource/index.php?id=2⟩. [cit. 05-06-2010].

[13] JOHNSON PUMP. *Katalogový list – čerpadlo CM10P7-1* . [online]. Dostupné z WWW:⟨http://www.dc-pump.cz/pdf/IB_CM10_30.pdf⟩. [cit. 18-01-2010].

[14] KATAYANA, T. *Subspace methods for systems identification.* Springer 2005. ISBN-10 1-85233-981-0.

[15] KONOPA, M. (2009) *Řízení výukových modelů typu Spojené nádoby – Bakalářská práce.* ČVUT v Praze, Fakulta elektrotechnická. [online]. Dostupné z WWW:⟨http://support.dce.felk.cvut.cz/mediawiki/images/0/05/Bp_2009_konopa_miroslav⟩. [cit. 12-02-2010].

[16] KRAJNÍK, E. *Základy maticového počtu.* ČVUT Praha 2006. ISBN: 80-01-03376-7.

[17] LJUNG, L. *System Identification: Theory for the user, Second Edition.* Prentice Hall 1999. ISBN 0-13-656695-2.

[18] MATISKO, P. (2009) *Odhad kovariančních matic šumu lineárního stochastického systému – Diplomová práce.* ČVUT v Praze, Fakulta elektrotechnická. [online]. Dostupné z

WWW:⟨http://support.dce.felk.cvut.cz/mediawiki/images/f/f6/Dp_2009_matisko_peter⟩. [cit. 23-04-2010].

[19] MELICHAR, J. *Decentralizované a hierarchické řízení: Učební text.* ZČU FAV Plzeň 2008. [online]. Dostupné z WWW:⟨http://www.kky.zcu.cz/uploads/courses/dhr/DHR%20Ucebni%20texty%202009.pdf⟩. [cit. 21-04-2010]

[20] NOSKIEVIČ, P. *Modelování a identifikace systémů.* Montanex 1999. ISBN: 80-7225-030-2.

[21] ROUBAL, J., PEKAŘ, J., PACHNER, D., HAVLENA, V. *Moderní teorie řízení – cvičení.* ČVUT 2005. ISBN 80-01-03208-6

[22] SIMON, D. *Optimal state estimation: Kalman, H infinity and nonlinear approaches.*. Wiley 2006. ISBN: 0-471-70858-5.

[23] SKOGESTAD, S., POSTLETHWAITE, I. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design, Second Edition* . Wiley, Chichester, UK 2005. ISBN 0-470-01168-8.

[24] SMARIS. *Katalogový list – tlakový senzor LMP 331* . [online]. Dostupné z WWW:⟨http://www.smaris.cz/eshop/2008052415643.pdf⟩. [cit. 18-01-2010].

[25] ŠTECHA, J. *Optimální rozhodování a řízení.* ČVUT Praha 2000. ISBN: 80-01-02083-5.

[26] TRNKA, P. *Metody subspace identification: Doctoral thesis.* ČVUT v Praze, Fakulta elektrotechnická, 2007.

[27] ZAKNICH, A. *Principles of Adaptive Filters and Self – learning System.* Springer 2005. ISBN-10 1-85233-984-5.

[28] ZAKUCIA, J. (2008) *Řízení čtyřválcové vodárny – Diplomová práce.* ČVUT v Praze Fakulta elektrotechnická.

B Internetové stránky

[29] THE MATHWORKS, INC. *Nápověda k produktům Matlab a Simulink.* [online]. Dostupné z WWW:⟨ http://www.mathworks/products⟩.

C Seznam použitého software

[30] ADOBE ACROBAT. Ver. 7.0.1. Adobe Systems, Inc. 2006.

[31] INKSPACE. Ver. 0.47 r22583. Open Source, 2009.

[32] MATLAB. Ver. 7.1.0.246 (R14) Service pack 3. The MathWorks, Inc. 2005.

[33] MICROSOFT OFFICE 2003. Ver. 10.2627.2625. Microsoft Corporation 2003.

[34] SIMULINK. Ver. 6.3 (R14 SP3). The MathWorks, Inc. 2005.

Příloha A

Obsah přiloženého CD

K této diplomové práci je přiloženo CD, na kterém je uložen vlastní text diplomové práce ve formátu PDF, příloha k tomuto textu se zpracovanými daty z jednotlivých měření při regulaci výšek hladin ve formátu PDF. Dále jsou na CD umístěny schématické obrázky, data z jednotlivých měření, většina vytvořených skriptů pro výpočet regulátorů a mnoho dalšího.

1 Seznam adresářů

- /doc
- /schematicke_obrazky
- /fotodokumentace
- /ident_analyza
- /PIDf_regulace
- /LQG_regulace
- /rozvazbovaci_regulace
- /Hinf_regulace

2 Obsah adresářů

- /doc
    - tento text diplomové práce ve formátu *.pdf
    - příloha k tomuto textu ve formátu *.pdf

- /schematicke_obrazky
    - vytvořené schématické obrázky ve formátu *.png
- /fotodokumentace
    - vytvořené fotky reálného systému ve formátu *.jpg
- /ident_analyza
    - simulační schéma regulačního obvodu ve formátu *.mdl
    - soubor s nastavením ve formátu *.m
    - naměřená data ve formátu *.mat
- /PIDf_regulace
    - simulační schéma regulačního obvodu ve formátu *.mdl
    - soubor s nastavením ve formátu *.m
    - naměřená data ve formátu *.mat
- /LQG_regulace
    - simulační schéma regulačního obvodu ve formátu *.mdl
    - soubor s nastavením ve formátu *.m
    - naměřená data ve formátu *.mat
- /rozvazbovaci_regulace
    - simulační schéma regulačního obvodu ve formátu *.mdl
    - soubor s nastavením ve formátu *.m
    - naměřená data ve formátu *.mat
- /Hinf_regulace
    - simulační schéma regulačního obvodu ve formátu *.mdl
    - soubor s nastavením ve formátu *.m
    - naměřená data ve formátu *.mat