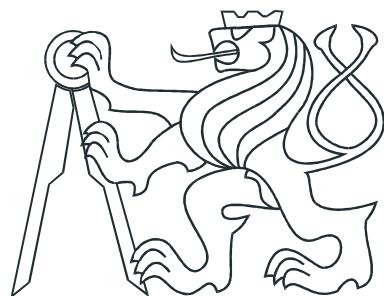


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ



**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Příklady pro identifikaci dynamických  
systémů

Praha, 2008

Autor: Jan Šíba

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou ( bakalářskou) práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady ( literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne

---

podpis

## **Poděkování**

Děkuji především vedoucímu bakalářské práce Ing. Jiřímu Roubalovi Ph.D. za velkou podporu, trpělivost, cenné rady a čas který mi věnoval při psaní této práce.

# **Abstrakt**

Tato bakalářská práce byla sepsána za účelem podpory výuky na Katedře řídicí techniky Fakulty elektrotechnické Českého vysokého učení technického v Praze. Práce se skládá ze dvou částí. První část se zabývá příklady idetifikace dynamických systému se soustředěnými parametry. Metody identifikace jsou demonstrovány na typových řešených příkladech a dále jsou doplněny sadou motivačních neřešených příkladů. K příkladům byly vytvořeny modely v prostředí Matlab Simulink. Druhá část se zabývá sestavením nelineárního modelu soustavy čtyř propojených vodáren, její linearizaci v obecném pracovním bodě a vytvoření modelu v prostředí Matlab Virtual Reality Toolbox.

# **Abstract**

This bachelor thesis was written in order to support the education in the Department of Control Engineering at Czech Technical University in Prague. It consists of two parts. First part deals with examples of identification of dynamic systems with lumped parameters. Methods of identification are demonstrated by typical solved examples and these are complemented by a set of motivational unsolved examples. To examples models in Matlab Simulink were created. Second part deals with creating of a nonlinear model of four interconnected watertanks then its linearization at general operating point and designing a model in Matlab Virtual Reality Toolbox environment.

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta elektrotechnická

Katedra řídicí techniky

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: **Jan Šíba**

Studijní program: Elektrotechnika a informatika (bakalářský), strukturovaný  
Obor: Kybernetika a měření

Název tématu: **Příklady pro identifikaci dynamických systémů**

Pokyny pro vypracování:

1. Připravte sadu řešených a neřešených příkladů, které budou součástí sbírky příkladů k výuce předmětu Systémy a modely a Systémy a řízení.
2. Seznamte se s Virtual Reality Toolboxem v Matlabu.
3. Namodelujte fyzikální model procesu v Simulinku.
4. Připravte k tomuto modelu virtuální realitu.

Seznam odborné literatury:

Dodá vedoucí práce

Vedoucí: Ing. Jiří Roubal, Ph.D.

Platnost zadání: do konce zimního semestru 2008/2009

prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.  
vedoucí katedry



*M. Šebek*  
doc. Ing. Boris Šimák, CSc.  
děkan

V Praze dne 25. 2. 2008

# Obsah

|  |             |
|--|-------------|
| <b>Seznam obrázků</b>                                  | <b>vi</b>   |
| <b>Seznam tabulek</b>                                  | <b>viii</b> |
| <b>1 Úvod</b>  | <b>1</b>    |
| <b>2 Příklady pro identifikaci dynamických systémů</b> | <b>3</b>    |
| 2.1 Řešené příklady . . . . .                          | 3           |
| 2.2 Neřešené příklady . . . . .                        | 33          |
| <b>3 Soustava vodáren</b>                              | <b>38</b>   |
| 3.1 Úvod . . . . .                                     | 38          |
| 3.2 Nelineární model . . . . .                         | 39          |
| 3.3 Linearizace . . . . .                              | 40          |
| 3.4 Virtuální model . . . . .                          | 41          |
| <b>4 Závěr</b>   | <b>42</b>   |
| <b>A Výsledky neřešených příkladů</b>                  | <b>I</b>    |
| <b>B Obsah přiloženého CD</b>                          | <b>II</b>   |

# Seznam obrázků

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.1  | Odezva systému na jednotkový skok (2.1) . . . . .                        | 3  |
| 2.2  | Srovnání zadaného systému (2.1) a modelu (2.2) . . . . .                 | 4  |
| 2.3  | Odezva systému (2.4) . . . . .   | 5  |
| 2.4  | Odečtení časové konstanty systému (2.4) . . . . .                        | 5  |
| 2.5  | Srovnání zadaného systému (2.4) a modelu (2.7) . . . . .                 | 6  |
| 2.6  | Přechodová charakteristika neznámého systému . . . . .                   | 7  |
| 2.7  | Srovnání přechodové charakteristiky neznámeho systému a modelu (2.9) .   | 8  |
| 2.8  | Přechodová charakteristika neznámého systému . . . . .                   | 9  |
| 2.9  | Srovnání přechodové charakteristiky neznámeho systému a modelu (2.11)    | 10 |
| 2.10 | Přechodová charakteristika systému (2.13) pro různá $a$ a $b$ . . . . .  | 11 |
| 2.11 | Odezva neznámého systému na skok vstupní veličiny . . . . .              | 11 |
| 2.12 | Odezva neznámého systému na skok vstupní veličiny . . . . .              | 12 |
| 2.13 | Porovnání zadané a spočtené přechodové charakteristiky . . . . .         | 13 |
| 2.14 | Přechodová charakteristika systému druhého řadu . . . . .                | 14 |
| 2.15 | Srovnání zadané a simulované přechodové charakteristiky . . . . .        | 16 |
| 2.16 | Srovnání zadané a simulované přechodové charakteristiky . . . . .        | 17 |
| 2.17 | Systém vodárna . . . . .   | 18 |
| 2.18 | Převodní charakteristika $u(t) \rightarrow h_1(t)$ . . . . .             | 19 |
| 2.19 | Detail převodní charakteristiky $u(t) \rightarrow h_1(t)$ . . . . .      | 19 |
| 2.20 | Statická převodní charakteristika neznámého motoru . . . . .             | 22 |
| 2.21 | Průběhů napětí a otáček, $\omega = 10 \text{ rads}^{-1}$ . . . . .       | 23 |
| 2.22 | Naměřené hodnoty amplitudy a fáze z tabulky 2.2 . . . . .                | 24 |
| 2.23 | Srovnání frekvenční odezvy přenosu (2.34) a naměřených dat z tabulky 2.2 | 26 |
| 2.24 | Srovnání modelu (2.34) a skutečného systému v časové oblasti . . . . .   | 26 |
| 2.25 | Odezva na posunutý skok vstupní veličiny . . . . .                       | 28 |
| 2.26 | Srovnání odezvy na skok v motoru a modelu (2.43) . . . . .               | 29 |
| 2.27 | Odezva systému na impuls . . . . .                                       | 29 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.28 | Srovnání odezvy na impuls systému a diskrétního modelu (2.44) . . . . .    | 30 |
| 2.29 | Srovnání přechodových charakteristiky systému a modelů . . . . .           | 31 |
| 2.30 | Odezva systému na náhodný signál . . . . .                                 | 31 |
| 2.31 | Srovnání odezvy systému a diskrétních modelu (2.47) . . . . .              | 32 |
| 2.32 | Srovnání frekvenční charakteristiky modelu (2.34) a modelů (2.43) až(2.47) | 33 |
| 2.33 | Přechodová charakteristika systému (2.48) . . . . .                        | 34 |
| 2.34 | Přechodová charakteristika systému (2.49) . . . . .                        | 34 |
| 2.35 | Přechodová charakteristika neznámého systému . . . . .                     | 35 |
| 2.36 | Přechodová charakteristika neznámého systému . . . . .                     | 35 |
| 2.37 | Odezva neznámeho systému . . . . .   | 36 |
| 2.38 | Převodní charakteristika stejnosměrného motoru . . . . .                   | 36 |
| 2.39 | Odezva vodárny na vstupní napětí . . . . .                                 | 37 |
| 3.1  | Nákres soustavy čtyř vodáren . . . . .                                     | 38 |
| 3.2  | Ukázka virtuálního modelu . . . . .  | 41 |

# Seznam tabulek

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Tabulka konstant $\tau_{12}$ . . . . .                 | 15 |
| 2.2 | Tabulka změřeného zesílení a fázového posuvu . . . . . | 24 |

# Kapitola 1

## Úvod

Tato práce má sloužit jako studijní materiál pro studenty Katedry řídicí techniky Fakulty elektrotechnické Českého vysokého učení technického.

V první části této práce se budeme zabývat řešenými příklady identifikace dynamických systémů se soustředěnými parametry. Identifikací se myslí stanovení vnitřního nebo vnějšího popisu dynamického systému. Identifikace se provádí buď na základě znalosti obecného matematikého popisu systému a nebo jen na základě chování systému v časové, nebo frekvenční oblasti. Nejprve ukážeme metody identifikace vnějšího popisu lineárních systémů podle charakteristik v časové oblasti. Pak se zaměříme na identifikaci vnitřního popisu systémů, identifikaci ve frekvenční oblasti a nakonec na identifikaci pomocí ARX modelu.

Neřešené příklady budou svým obsahem do značné míry kopírovat příklady řešené tak, aby čtenář mohl snadno nahlédnout jaká metoda povede ke správnému řešení úlohy. Nejprve budou příklady zaměřeny na identifikaci lineárních systémů prvního a druhého rádu, pak budou následovat systémy nelineární a jako poslední příklad je čtenáři k dispozici model v prostředí Matlab Simulink, který na základě vstupní konstanty mění své vlastnosti. Čtenář tak bez jakékoli znalosti systému musí provést identifikaci na základě identifikačních experimentů. Všechny předkládané příklady jdou vyřešit pomocí metod a postupů ukázaných na řešených příkladech. Čtenář má také k dispozici klíč, aby mohl ověřit zprávnost svých výsledků.

V poslední části této práce se zaměříme na sestavení nelineárního a linearizovaného modelu systému, který se zkládá ze čtyř vodních nadrží do nichž je přiváděna voda pomocí

dvou zubových čerpadel a přítok do jednotlivých nádrží je řízen dvěma proporcionálními ventily. Systém je zajímavý tím, že správnou kombinací větilů vzniknout v systému nestabilní nuly. Tato práce může sloužit jako podklad pro celkovou analýzu tohoto nelineárního MIMO systému. Pro názornost byl sestavem virtuální model v prostředí Matlab Virtual Reality Toolbox pro jednu konkrétní kombinaci parametrů systému.

# Kapitola 2

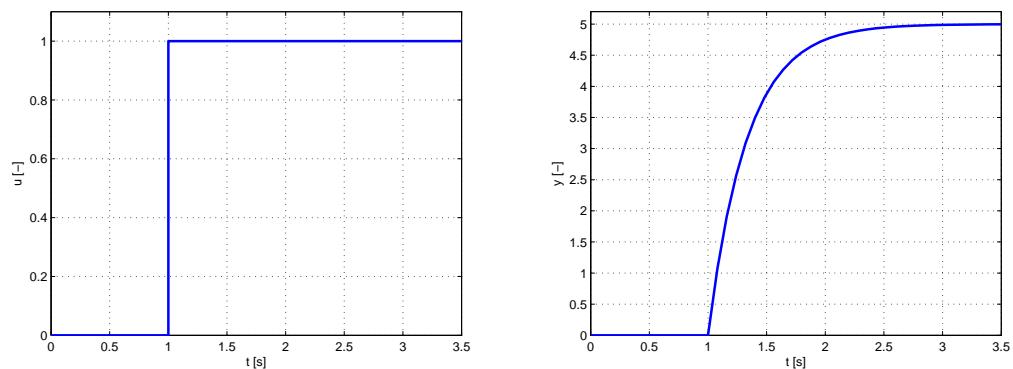
## Příklady pro identifikaci dynamických systémů

V této kapitole se nacházejí řešené a neřešené příklady pro identifikaci dynamických systémů. Tyto příklady mají sloužit čtenáři jako studijní materiál a pomoci mu při samostatném řešení problémů identifikace dynamických systémů se soustředěnými parametry.

### 2.1 Řešené příklady

**Příklad 2.1:** Je dán systém, popsaný odezvou na obrázku 2.1 a přenosem

$$P(s) = \frac{k}{s + 3}. \quad (2.1)$$



Obrázek 2.1: Odezva systému na jednotkový skok (2.1)

Zjistěte neznámou konstantu  $k$ .

*Řešení:* Ustálenou hodnotu odezvy systému (2.1) lze spočítat podle věty o konečné hodnotě (TKADLEC, J., 2005).

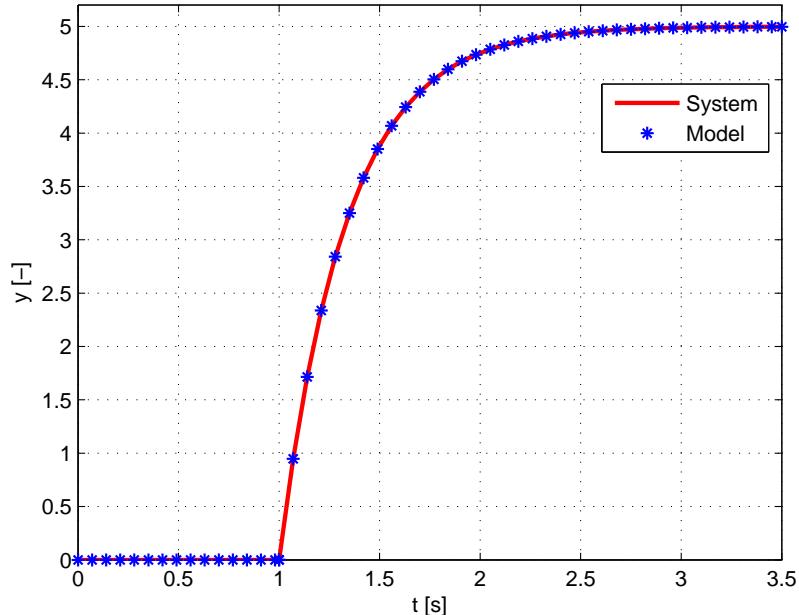
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{1}{s} sP(s) = \frac{k}{0+3} = \frac{k}{3} \quad (2.2)$$

Z obrázku 2.1 lze určit ustálenou hodnotu  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 5$ . Dosazením do vztahu (2.2) získáme vztah pro stanovení hledané konstanty  $k$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{k}{3} \Rightarrow k = 15$$

Systém má přenos

$$P(s) = \frac{15}{s+3}. \quad (2.3)$$



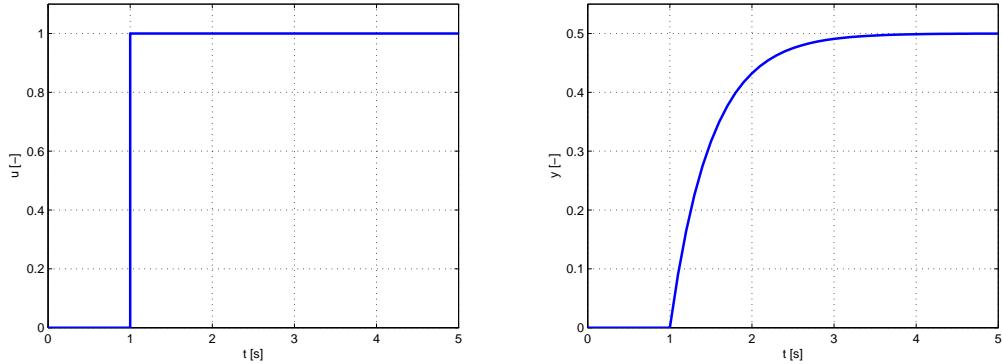
Obrázek 2.2: Srovnání zadaného systému (2.1) a modelu (2.2)

Jak dokazuje obrázek 2.2, sestavený model má stejnou odezvu na vstupní signál jako systém zadaný. Proto lze tvrdit, že přenos (2.4) je hledaným modelem. ✓

**Příklad 2.2:** Je dán systém popsaný přenosem

$$P(s) = \frac{1}{s+a} \quad (2.4)$$

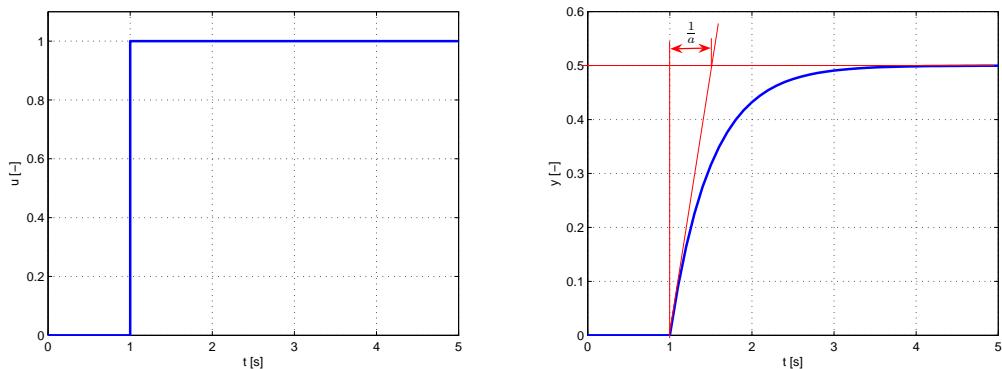
a odezvou na skok vstupní veličiny na obrázku 2.3. Zjistěte polohu pólu systému.



Obrázek 2.3: Odezva systému (2.4)

*Řešení:* Na základě obrázku 2.3 lze usoudit, že systém (2.4) je stabilní. Jeden z možných způsobů řešení je vyjádřit pomocí zpětné Laplaceovy transformace přechodovou charakteristikou systému (2.4) v časové oblasti a pak jí porovnat s naměřeným průběhem (obrázek 2.3). Protože obraz jednotkového skoku v Laplaceově transformaci je  $\frac{1}{s}$  (TKADLEC, J., 2005), lze přechodovou charakteristiku spočítat takto

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1}\{W(s)\} = L^{-1}\{\underline{1}(s) \cdot P(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+a}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+a)}\right\}, \\ h(t) &= L^{-1}\left\{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right)\right\} = \frac{1}{a} \left(L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\}\right), \\ h(t) &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a} e^{-at}. \end{aligned} \quad (2.5)$$



Obrázek 2.4: Odečtení časové konstanty systému (2.4)

Nyní odečteme časovou konstantu ze zadané odezvy, která je jenom posunutou přechodovou charakteristikou a dosadíme do vypočteného vztahu (2.5).

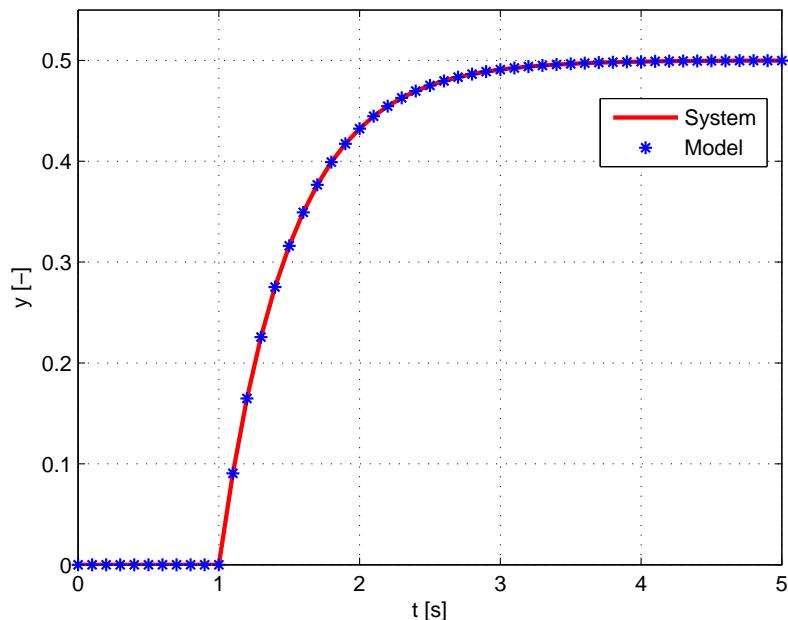
Z obrázku 2.4 odečteme  $\frac{1}{a} = 0,5$ . Celá přechodová charakteristika má předpis :

$$h(t) = 0,5 - 0,5e^{-2t} \quad (2.6)$$

Pokud na rovnici (2.6) zderivujeme podle času (tím získáme impulzní odezvu) a aplikuje Laplaceovu transformaci získáme přenos systému.

Přenos systému je :

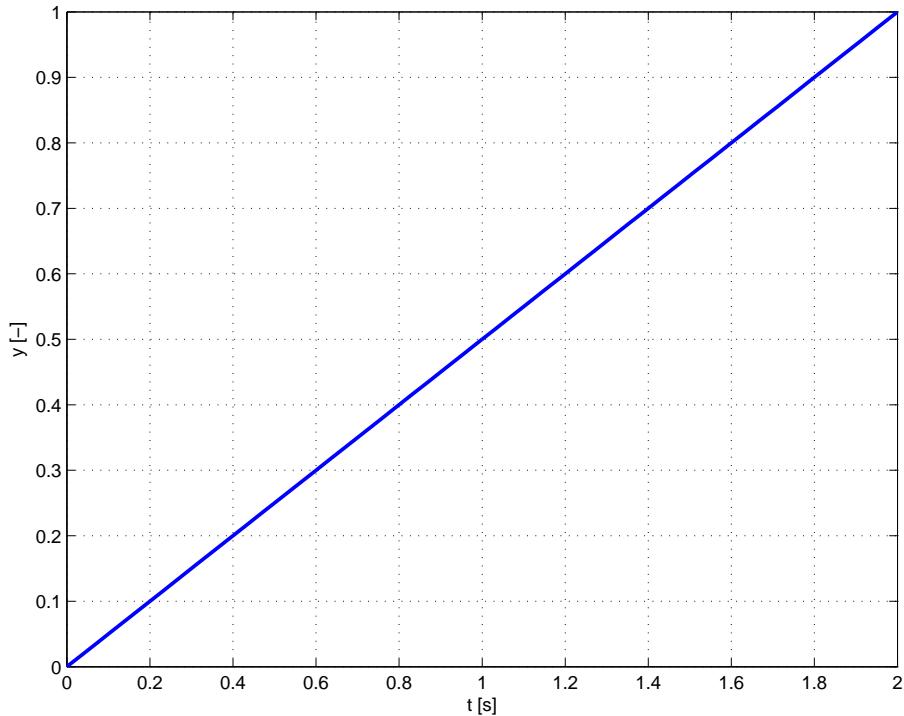
$$P(s) = \frac{1}{s+2} \quad (2.7)$$



Obrázek 2.5: Srovnání zadaného systému (2.4) a modelu (2.7)

Jak dokazuje obrázek 2.5, odpovídá spočtená odezva zadané charakteristice. To potvrzuje, že pól má souřadnice  $(-2, 0)$ . ✓

**Příklad 2.3:** Najdět přenos systému, jehož přechodová charakteristika je zobrazena na obrázku 2.6.



Obrázek 2.6: Přechodová charakteristika neznámého systému

*Řešení:* Jak je zřejmé z obrázku 2.6, jedná se o astabilní systém. Odezva systému na jednotkový skok je rampa, čili systém bude obsahovat pouze jeden astabilní pól (při dvou pólech by odezvou byla parabola, atd.). Předpodkládejme tedy přenos ve tvaru:

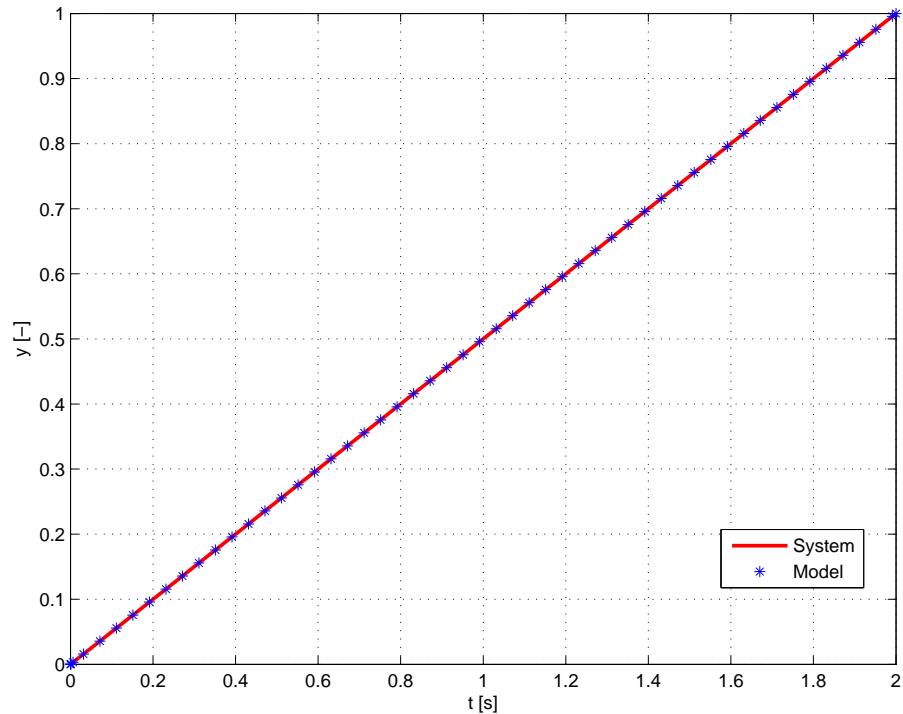
$$P(s) = \frac{k}{s} \quad (2.8)$$

kde  $k$  je zesílení systému. Hledaný systém za jednotku času zvýší svojí amplitudu jen o jednu polovinu. To znamená, že má poloviční zesílení než systém s jednotkovým zesílením.

Přenos systému tedy je

$$P(s) = \frac{1}{2s}. \quad (2.9)$$

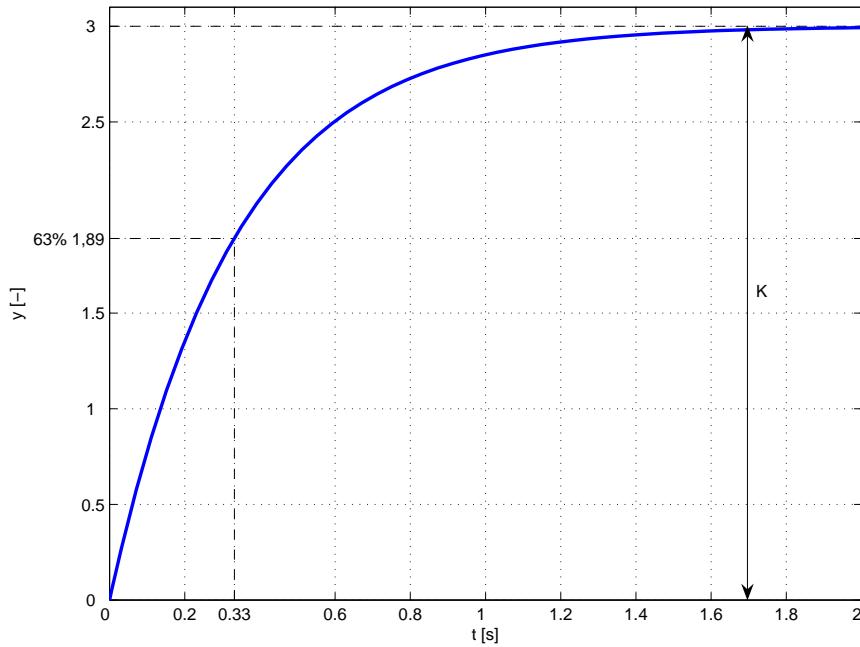
Provedeme srovnání přechodových charakteristik.



Obrázek 2.7: Srovnání přechodové charakteristiky neznámeho systému a modelu (2.9)

Jak je patrné z obrázku 2.14 model (2.9) odpovídá zadané charakteristice. Proto můžeme identifikaci považovat za úspěšnou. ✓

**Příklad 2.4:** Mějme neznámý systém prvního rádu, který je definován jen svou přechodovou charakteristikou na obrázku 2.8. Stanovte jeho přenos.



Obrázek 2.8: Přechodová charakteristika neznámého systému

*Řešení:* Systém prvního řádu může být popsán přenosem ve tvaru

$$P(s) = \frac{k}{\tau s + 1}, \quad (2.10)$$

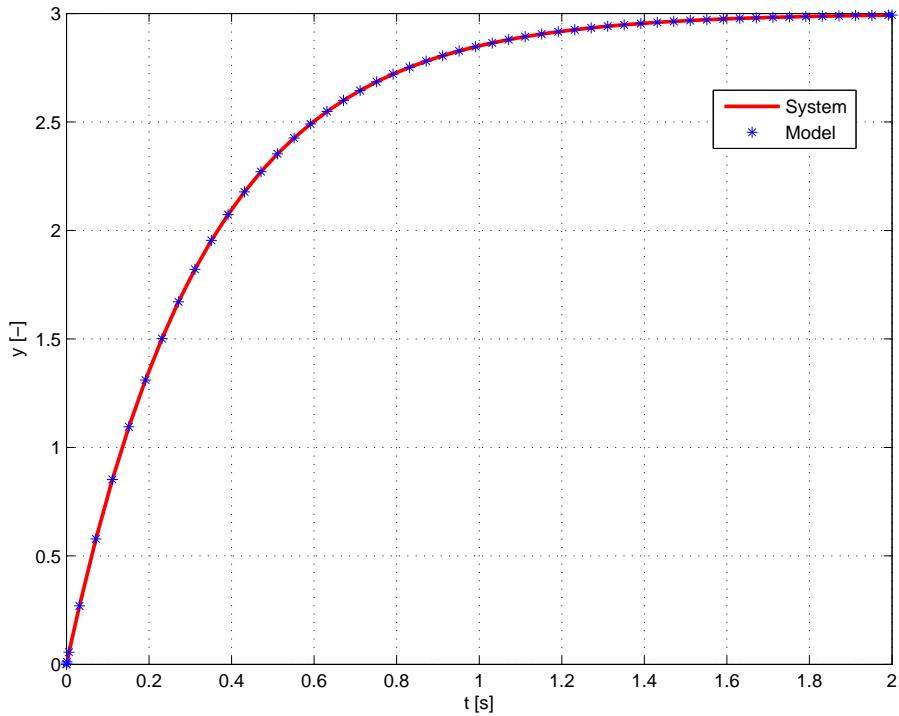
kde  $k$  je zesílení systému (je tedy rovno ustálené hodnotě přechodové charakteristiky) a  $\tau$  je časová konstanta. Ta je rovna času, za který se systém dostane z nuly na 63% své přechodové charakteristiky (FUKA, J.; JOHN, J.; KUTIL, M., 2005). Obě hodnoty lze dečíst z obrázku 2.8.

$$k = 3, \quad \tau = 0,33$$

Přenos systému tedy je:

$$P(s) = \frac{3}{0,33s + 1} = \frac{9}{s + 3} \quad (2.11)$$

Jak je patrné z obrázku 2.9, přechodová charakteristika modelu (2.11) a zadaného systému má stejný průběh. Proto je možné přenos (2.11) prohlásit za správný.



Obrázek 2.9: Srovnání přechodové charakteristiky neznámeho systému a modelu (2.11)

✓

**Příklad 2.5:** Mějme systém prvního řádu popsaný obecnou diferenciální rovnicí

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -ax(t) + u(t), \\ y(t) &= x(t),\end{aligned}$$

kde  $u(t)$  je vstupní signál a  $y(t)$  je výstup systému. Tento stavový model reprezentuje všechny systémy s přenosem :

$$P(s) = \frac{1}{s + a}$$

Nyní uvažujme systém popsaný diferenční rovnicí ve tvaru :

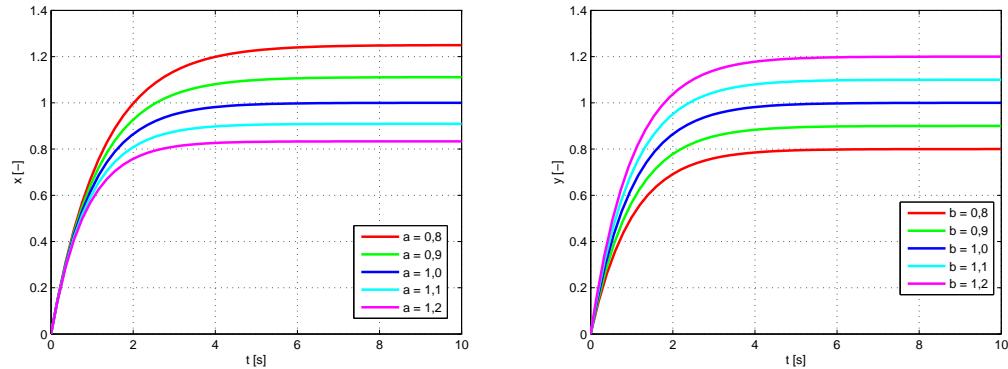
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -x(t) + bu(t), \\ y(t) &= x(t),\end{aligned}$$

kde  $u(t)$  je opět vstupní signál a  $y(t)$  je výstup systému. Tato rovnice reprezentuje všechny

systémy s přenosem

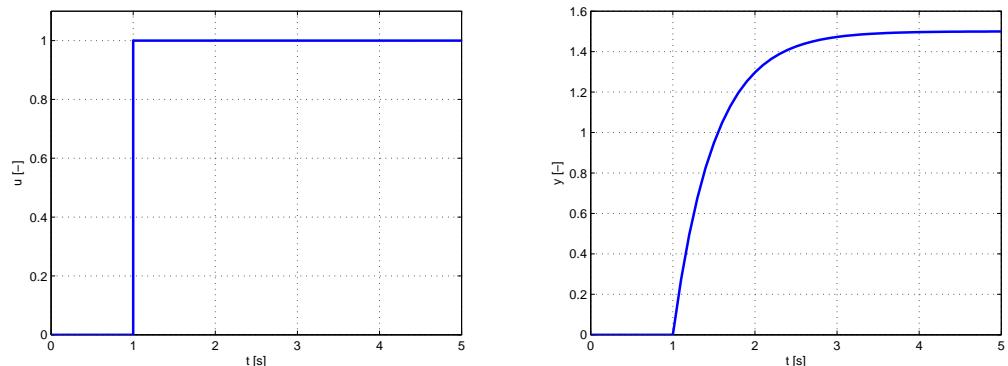
$$P(s) = \frac{b}{s+1}.$$

Vliv konstant  $a$  a  $b$  je ukázán na obrázku 2.10.

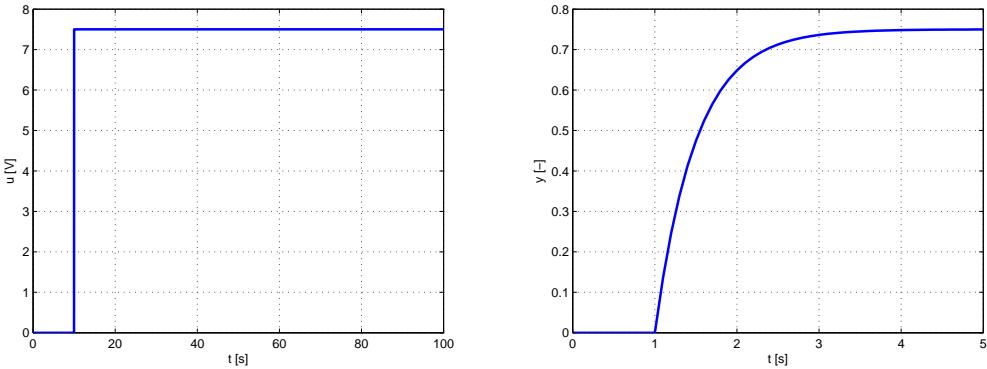


Obrázek 2.10: Přechodová charakteristika systému (2.13) pro různá  $a$  a  $b$

Úkolem je nalézt stavový model systému prvního řádu popsáný charakteristikami na obrázcích (obrázky 2.11 a 2.12).



Obrázek 2.11: Odezva neznámého systému na skok vstupní veličiny



Obrázek 2.12: Odezva neznámého systému na skok vstupní veličiny

*Řešení:* Obecný systém prvního řádu je popsán stavovým modelem

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= ax(t) + bu(t) \\ y &= x(t), \end{aligned} \quad (2.14)$$

což vede na vyjádření přenosu ve tvaru

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{1}{a}s - 1}. \quad (2.15)$$

Jedna z metod řešení je již použita v příkladu 2.2. Grafické řešení však vnáší do řešení chyby, neboť odečtení časové konstanty a změření přechodové charakteristiky není nikdy přesné. Jinou metodou řešení je rozbor stavového popisu neznámého systému. Diferenciální rovnice říká, jak se chová změna (tedy derivace) stavové veličiny  $x(t)$  v čase. Podíváme-li se na obrázek číslo 2.11 a 2.12, zjistíme, že pro dostatečně velké  $t$  se systém ustálí, tedy derivace stavové veličiny  $x(t)$  je nulová. Tím původní rovnice degraduje na rovnici  $0 = ax(t) + bu(t)$ , tedy  $x(t) = -\frac{b}{a}u(t)$ . Nyní stačí jen dosadit za  $u(t)$  a za  $x(t)$  ustálené hodnoty z obrázků 2.11 a 2.12. Tím získáme soustavu dvou algebraických rovnic pro dvě neznámé. Jejím vyřešením získáme hodnotu koeficientů  $a$  a  $b$ .

$$\begin{aligned} 1,5 &= -\frac{b}{a} \cdot 1, \\ 5,68 &= -\frac{b}{a} \cdot 0,5. \end{aligned} \quad (2.16)$$

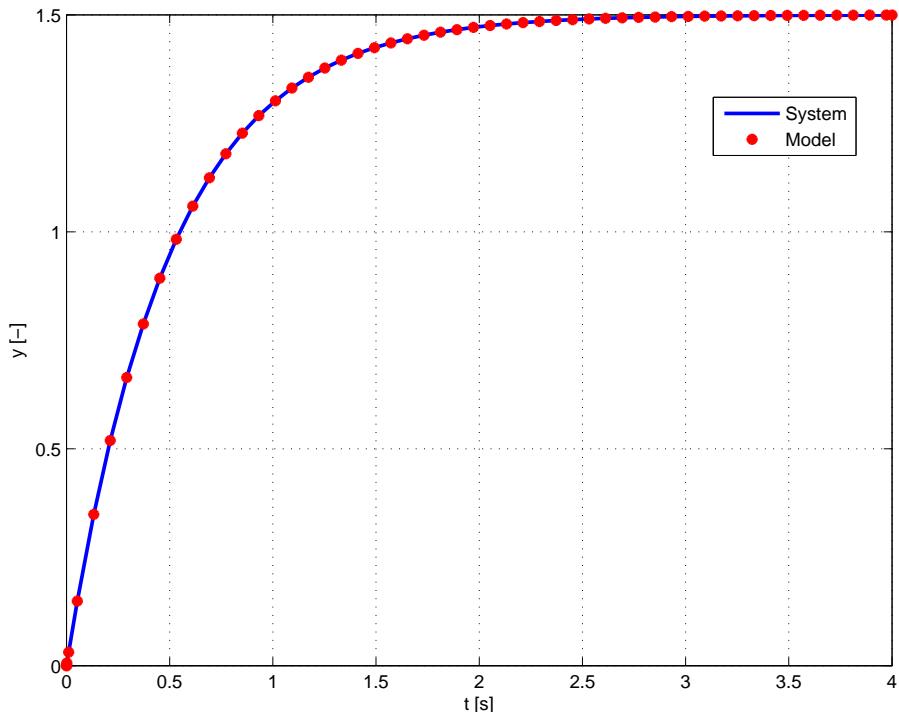
Řešením soustavy (2.16) dospějeme k přenosu

$$P(s) = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{1}{a}s - 1} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}s - 1}, \quad (2.17)$$

který odpovídá stavovému modelu

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -2x(t) + 3u(t) \\ y(t) &= x(t).\end{aligned}\quad (2.18)$$

Správnost modelů (2.17), respektive (2.18) můžeme ověřit srovnáním přechodové charakteristiky se zadaným systémem.



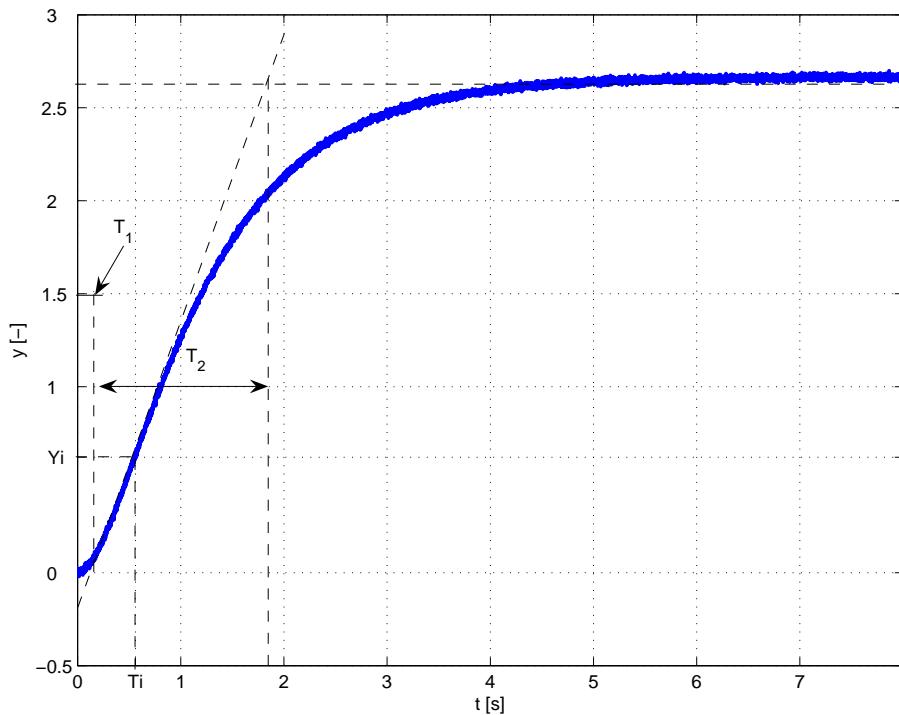
Obrázek 2.13: Porovnání zadané a spočtené přechodové charakteristiky

Jak dokazuje obrázek 2.13, simulovaná charakteristika se shoduje s charakteristikou zadaného systému. Proto můžeme prohlásit, že identifikace byla úspěšná a přenos (2.17) je hledáným přenosem. ✓

**Příklad 2.6:** Mějme systém druhého řádu popsaný obecným přenosem ve tvaru

$$P(s) = \frac{k}{(T_a s + 1)(T_b s + 1)} \quad (2.19)$$

a přechodovou charakteristikou na obrázku 2.14. Nalezněte matematický model systému.



Obrázek 2.14: Přechodová charakteristika systému druhého řadu

*Řešení:* Nejprve určíme zesílení  $k$  obdobně jako v příkladu 2.1. Zesílení je rovno ustálené hodnotě přechodové charakteristiky, kterou odečteme z obrázku 2.14. Charakteristika se ustálí na hodnotě přibližně  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = k = 2,6$ .

Nyní musíme zjistit hodnotu časových konstant  $T_1$  a  $T_2$ . Pro odečtení konstant nejdříve odhadneme polohu inflexního bodu charakteristiky (na obrázku 2.14 má souřadnice  $[T_i, Y_i]$ ) a pak jím vedeme tečnu. Časová vzdálenost mezi průnikem tečny osou času a ustálenou hodnotou charakteristiky je rovna velikosti časové konstanty  $T_2$ . Velikost konstanty  $T_1$  je rovna časové vzdálenosti průniku tečny osou času a osou výstupní veličiny (FUKA, J.; JOHN, J.; KUTIL, M., 2005). Kostanta  $T_1$  se nazývá doba průtahu a konstanta  $T_2$  doba náběhu. Z obrázku 2.14 odečteme přibližné velikosti konstant a vypočteme jejich poměr

$$\begin{aligned} T_1 &= 0,15 \text{ s}, \\ T_2 &= 1,8 \text{ s}, \\ \tau_1 &= \frac{0,15}{1,8} = 0,084. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Nyní odečteme z tabulky 2.1 konstantu  $\tau_2$  (FUKA, J.; JOHN, J.; KUTIL, M., 2005).

Tabulka 2.1: Tabulka konstant  $\tau_{12}$ 

|          |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\tau_1$ | 0,050 | 0,072 | 0,084 | 0,092 | 0,097 | 0,100 | 0,102 | 0,103 | 0,103 | 0,104 |
| $\tau_2$ | 0,1   | 0,2   | 0,3   | 0,4   | 0,5   | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   |

$\tau_2$  je rovno podílu hledaných koeficientů

$$\tau_2 = \frac{T_a}{T_b}, T_a < T_b \quad (2.21)$$

a podle tabulky 2.1 je rovna  $\tau_2 = 0,3$ . To nám dává jednu rovnici pro dvě neznáme. Druhou rovnici získáme podle vzorce (FUKA, J.; JOHN, J.; KUTIL, M., 2005)

$$T_a + T_b = \frac{t_1}{1,2564}, \quad (2.22)$$

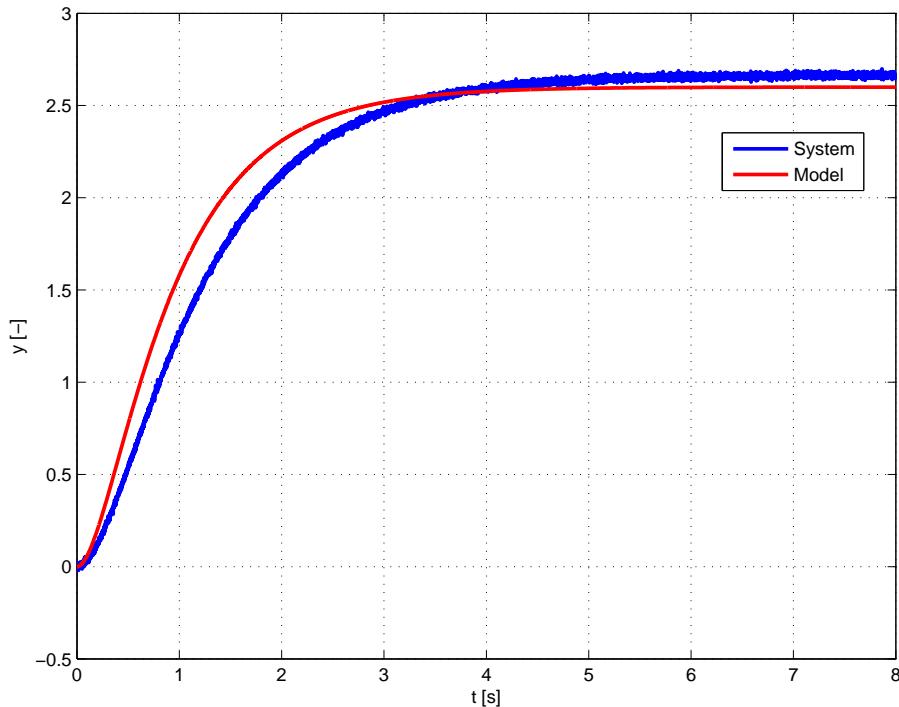
kde  $t_1$  je čas ve kterém přechodová charakteristika nabývá hodnoty  $h(t_1) = 0,720k$  ( $k$  je zesílení systému). Z přechodové charakteristiky odečteme hodnoru  $t_1 \doteq 1,5$  s. Pak spojením rovnic (2.21) a (2.22) získáme soustavu, jejímž vyřešením je dvojice hledaných koeficientu  $T_a$  a  $T_b$ .

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{T_a}{T_b} \\ T_a + T_b &= \frac{t_1}{1,2564} \\ T_a &\doteq 0,23 \\ T_b &\doteq 0,79 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Přenos má tvar

$$P(s) = \frac{2,6}{(0,23s + 1)(0,79s + 1)}. \quad (2.24)$$

Jeho zprávnost ověříme srovnáním přechodové charakteristiky se zadaným průběhem.



Obrázek 2.15: Srovnání zadané a simulované přechodové charakteristiky

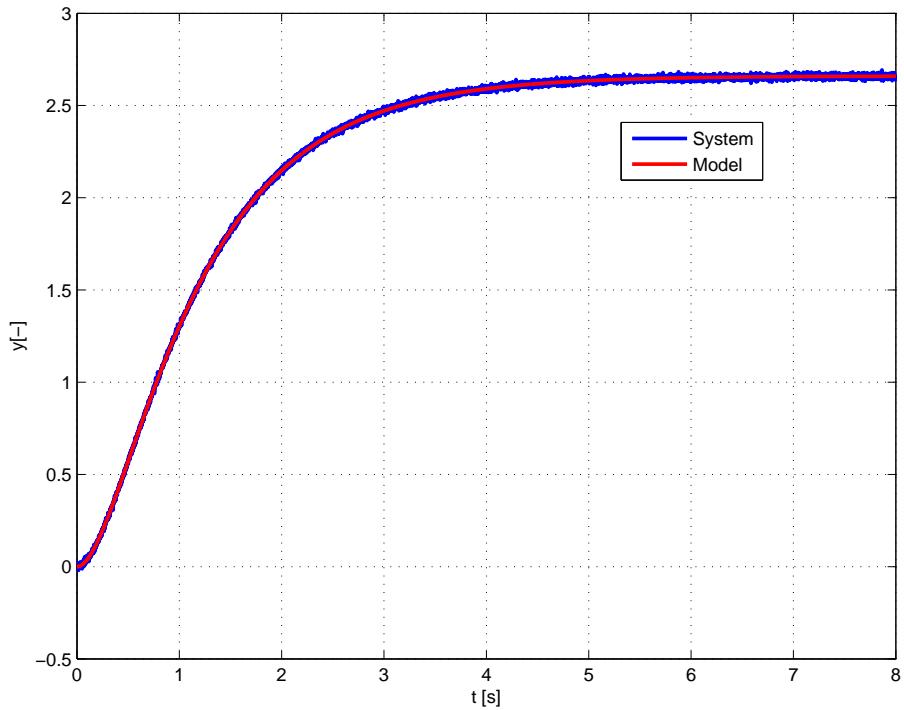
Jak je patrné z obrázku 2.15, není odečtení konstant přesné. Odečtení koeficientu  $\tau_2$  z tabulky 2.1 je přibližné (odečtená hodnota je nejbližší hodnotě spočtené) a i naměřené doby náběhu, průtahu a zesílení nejsou přesné z důvodu šumu při měření přechodové charakteristiky.

Nyní se pokusíme nalezené časové konstanty vylepšit tak, aby lépe odpovídaly našemu systému. Bud' můžeme provést celou identifikaci znova jinou metodou s tím, že již máme představu o přibližné velikosti časových konstant, a nebo ručně konstatně optimalizujeme až přenos odpovídá hledanému systému.

Pomocí druhé možnosti získáme přenos

$$P(s) = \frac{2,66}{(s+1)(0,3s+1)}. \quad (2.25)$$

Podle obrázku 2.16 je nalezený přenos (2.25) hledaným modelem.



Obrázek 2.16: Srovnání zadané a simulované přechodové charakteristiky

✓

**Příklad 2.7:** Mějme systém složený z odstředivého čerpadla, jež čerpá kapalinu z nádrže do prvního válce. Kapalina proudí přes potrubí s ventilem  $V_1$  do druhého válce a přes další potrubí s ventilem  $V_2$  volně vytéká. Oba válce mají stejný průřez a čerpanou kapalinou je voda. Systém je popsán soustavou diferenciálních rovnic (ROUBAL, J.; HUŠEK, P., 2008)

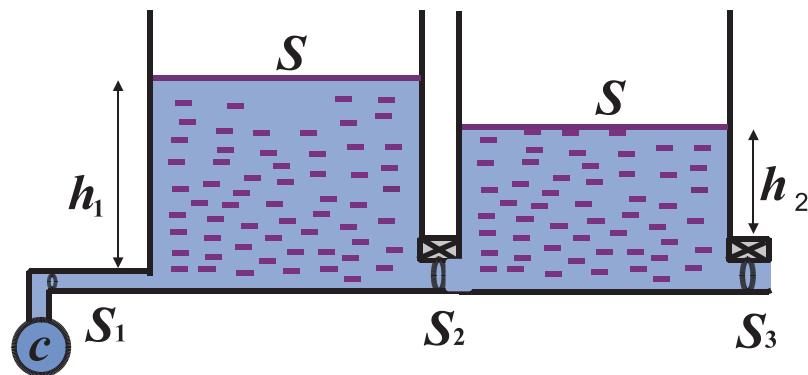
$$\begin{aligned} \frac{dh_1(t)}{dt} &= \text{sign} \left( \frac{k_u(t)^2}{\rho} - gh_1(t) \right) \frac{S_1}{S} \sqrt{\left| \frac{ku(t)^2}{\rho} - gh_1(t) \right|} - \\ &\quad - V_1 \left[ \text{sign}(h_1(t) - h_2(t)) \frac{S_2}{S} \sqrt{|2g(h_1(t) - h_2(t))|} \right] \\ \frac{dh_2(t)}{dt} &= V_1 \left[ \text{sign}(h_1(t) - h_2(t)) \frac{S_2}{S} \sqrt{|2g(h_1(t) - h_2(t))|} \right] - \\ &\quad - V_2 \left[ \frac{S_3}{S} \sqrt{2gh_2(t)} \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

kde  $h_1(t)$  je výška hladiny v prvním válci,  $h_2(t)$  je výška hladiny ve druhém válci,  $u(t)$  je napětí přiváděné na čerpadlo,  $S$  je průřez nádrže,  $S_1$  je průřez přítokového potrubí,  $S_2$  je průřez potrubí mezi nádržemi,  $S_3$  je průřez odtokového potrubí,  $k$  je konstanta

čerpadla,  $V_1$  (respektive  $V_2$ ) jsou logické proměnné říkající, zda je ventil  $V_1$  (respektive  $V_2$ ) otevřen či uzavřen ( $V_1 = 1 \dots$  otevřen,  $V_1 = 0 \dots$  uzavřen),  $g$  je těžové zrychlení a  $\rho$  je hustota kapaliny. Vstupem do systému je napětí na čerpadlo  $u(t)$  a poloha ventilů  $V_1$  a  $V_2$ . Stavem je výška hladiny v jednotlivých válcích  $h_1(t)$  a  $h_2(t)$ . Výstupem je výška hladiny v druhém válci  $h_2(t)$ .

Naším úkolem je ověřit platnost matematického popisu (2.26) a navrhnut experimenty ze kterých zjistíme velikost průřezů potrubí, velikost průřezu válců a velikost konstanty čerpadla.

Systém se nachází v souboru „WatherTankRotary.mdl“ a je naznačen na obrázku 2.17.

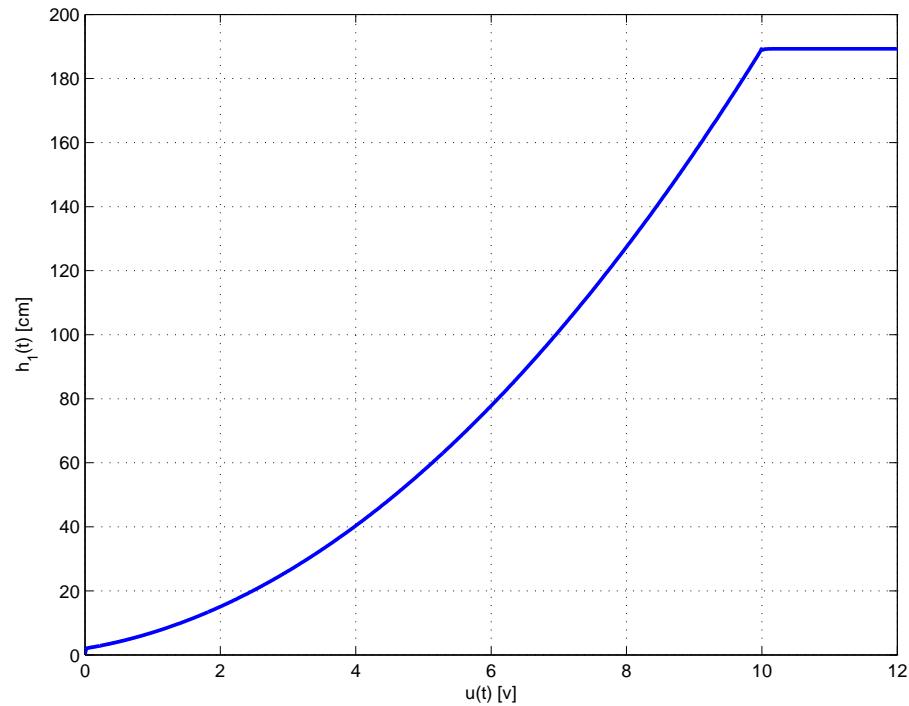


Obrázek 2.17: Systém vodárna

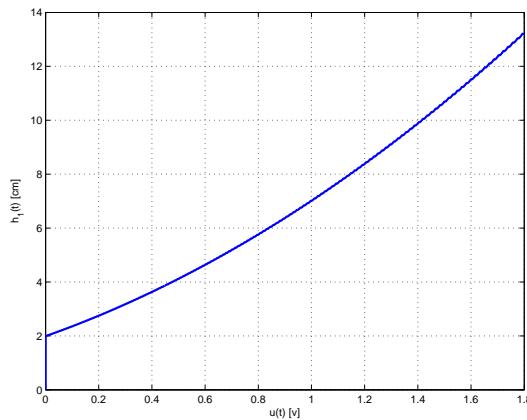
*Řešení:* Nejprve ověříme první část rovnice (2.26) popisující přítok vody do prvního válce. Uzavřeme-li první ventil soustava (2.26) se zjednotuje na soustavu

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{S_1}{S} \sqrt{\frac{ku^2(t)}{\rho} - gh_1(t)}. \quad (2.27)$$

Pro ověření správnosti tohoto vztahu změříme statickou převodní charakteristiku ( $u(t) \rightarrow h_1(t)$ ). Na vstup připojíme signál typu rampa s dostatečně malou směrnicí, aby převodní charakteristika nebyla ovlivněna přechodovými jevy.

Obrázek 2.18: Převodní charakteristika  $u(t) \rightarrow h_1(t)$ 

Jak je patrné z obrázku 2.18, sestavená diferenciální rovnice neodpovídá změřené charakteristice. Celá charakteristika je posunutá směrem vzhůru ve směru osy hladiny  $h_1(t)$ . Pro přesnější stanovení posunu změříme charakteristiku ještě jednou, ale puze její spodní část.

Obrázek 2.19: Detail převodní charakteristiky  $u(t) \rightarrow h_1(t)$

Obrázek 2.19 ukazuje, že se jedná o posun přibližně  $h_{10} = 2$  cm. To je způsobeno offsetem vstupního napětí. Dále si lze povšimout omezení velikosti vstupního signálu. Pro napětí vyšší než přibližně 10 V hladina přestane stoupat.

Aby rovnice odpovídala naměřené převodní charakteristice, musíme ji upravit tím, že ji doplníme o příslušné offsety.

Konstantu  $k$  stanovýme z převodní charakteristiky (obrázek 2.18). Vzhledem k tomu, že se jedná o statickou charakteristiku, je časová derivace hladiny rovna nule a proto můžeme psat

$$\begin{aligned}\frac{dh_1(t)}{dt} &= \frac{S_1}{S} \sqrt{\frac{k(u(t) + u_0)^2}{\rho} - g(h_1(t) - h_{10})}, \\ 0 &= \frac{k(u(t) + u_0)^2}{\rho} - g(h_1(t) - h_{10}), \\ k &= \frac{\rho g(h_1(t) - h_{10})}{(u(t) + u_0)^2},\end{aligned}\tag{2.28}$$

kde  $u_0$  a  $h_{10}$  jsou výše zmíněné offsety. Z převodní charakteristiky (obrázek 2.18) dokážeme odečíst hodnoty  $u(t)$ ,  $h_1(t)$  a  $h_{10}$ . Hodnoty  $g$  a  $\rho$  jsou konstanty, které odečteme z tabulek. Vypočítat musíme dva parametry  $k$  a  $u_0$ . Proto z charakteristiky odečteme dva body, nejlépe na hranicích rozsahu vstupního napětí. Tím získáme soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé a vyřešíme ji. První bod má souřadnice  $u(t) = 2$  V,  $h_1(t) = 15,9$  cm a  $h_{10} = 2$  cm. Druhý volíme  $u(t) = 9$  V,  $h_1(t) = 157,5$  cm a  $h_{10} = 2$  cm. Tím získáme soustavu

$$\begin{aligned}k &= \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot (15,9 - 2)}{(2 + u_0)^2}, \\ k &= \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot (157,5 - 2)}{(9 + u_0)^2}\end{aligned}\tag{2.29}$$

Řešením soustavy (2.29) jsou parametry velikosti přibližně  $k = 15000$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-2</sup>V<sup>-2</sup> a  $u_0 = 1,1$  V

Nyní zbývá dopočítat ostatní konstanty. Navrhněte pokus, při kterém se hledaná konstanta projeví, a na základě změřené charakteristiky ji pak spočtěte. Konstantu  $k_1$  spočítat nelze, musí být stanovena ručně (postupným upravováním její hodnoty), zbývající konstanty lze spočítat a není nutné je odhadovat.

Při správné identifikaci bychom dospěli k těmto hodnotám:  $k_0 = 1,5291$ ,  $k_1 = 0,090$ ,  $k_2 = 0,0225$  a  $k_3 = 0,04$ . Tyto hodnoty odpovídají průřezům  $S = 400$  cm<sup>2</sup>,  $S_1 = 36$  cm<sup>2</sup>,

$$S_2 = 9 \text{ cm}^2, S_3 = 16 \text{ cm}^2.$$

Možným rozšířením úlohy je definovat míru otevření obou ventilů jako poruchu (z logických konstant  $V_1$  a  $V_2$  se stanou funkce  $V_1(t)$  a  $V_2(t)$ ). Pak nemá systém jenom jeden vstup  $u(t)$ , ale vstupem je i propustnost ventilů. Vše můžeme ověřit či vyzkoušet na přiloženém modelu. ✓

**Příklad 2.8:** V předchozích příkladech jsme se zabývali identifikací pomocí charakteristik v časové oblasti. Nyní ukážeme příklad, kdy provedeme identifikaci pomocí frekvenční charakteristiky a získáme přenos systému. Představme si, že máme stejnosměrný motor s cizím buzením. Změřte frekvenční charakteristiku motoru a na základě jejího tvaru odvodte přenos.

*Řešení:* Stavový model pro stejnosměrný motor s cizím buzením má tvar (VOŽENÍLEK, P., JANOUŠEK, J., 2006)

$$\begin{aligned}\frac{di(t)}{dt} &= -\frac{R}{L}i(t) - \frac{k_e}{L}\omega(t) + \frac{1}{L}u(t), \\ \frac{d\omega(t)}{dt} &= \frac{k_m}{J}i(t) - \frac{b}{J}\omega(t), \\ y &= \omega(t),\end{aligned}\tag{2.30}$$

kde  $u$  [V] je vstupní napětí,  $i$  [A] je proud motoru,  $\omega$  [rad s<sup>-1</sup>] je úhlová rychlosť hřídele motoru,  $R$  [ $\Omega$ ] je odpor motoru,  $L$  [H] je indukčnosť motoru,  $J$  [kg m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>] je moment setrvačnosti motoru,  $b$  [kg m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>] je konstanta tření motoru,  $k_e$  [sV<sup>-1</sup>] je elektrická konstanta motoru a  $k_m$  [kg m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>] je mechanická konstanta motoru.

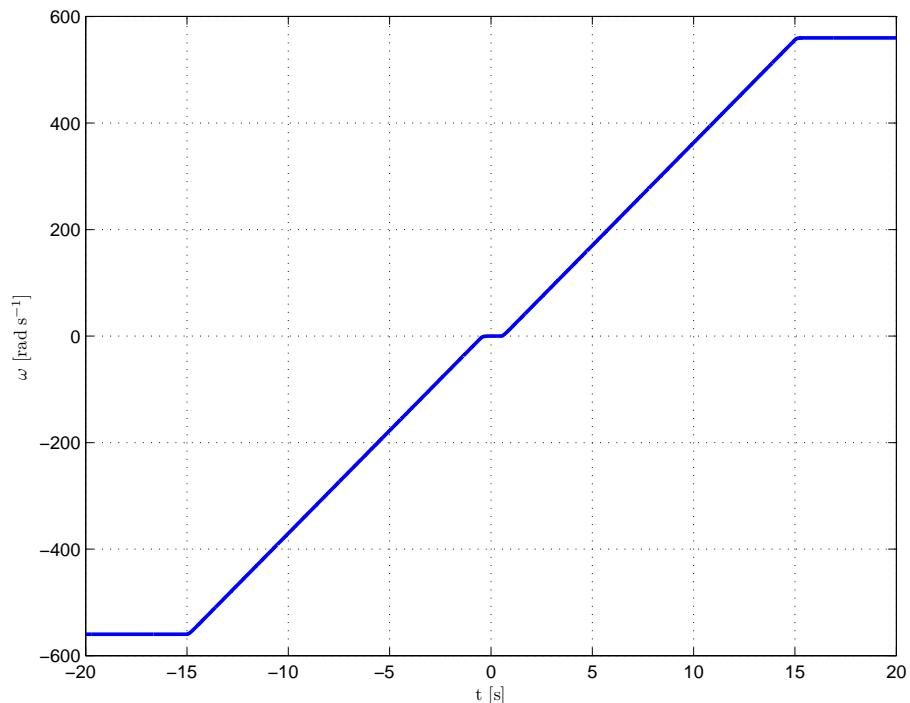
Je zřejmé, že se jedná o soustavu lineárních diferenciálních rovnic. Systém lze popsat přenosem a použít frekvenční charakteristiku k jeho identifikaci. Za vstup budeme považovat elektrické napětí  $u(t)$  a za výstup úhlovou rychlosť  $\omega(t)$ . Přenos má tvar

$$P(s) = \frac{\frac{k_m}{LJ}}{s^2 + s(\frac{b}{J} + \frac{R}{L}) + \frac{Rb + k_e k_m}{JL}}.\tag{2.31}$$

Jak je patrne z přenosu (2.31) systém neobsahuje žádné nuly a má právě dva póly. To znamená, že předpokládáme frekvenční charakteristiku, která má nestoupající amplitudu. Nejprve bude konstantní, pak se sklonem 20 dB/dek a nakonec se sklonem 40 dB/dek. Fázová charakteristika bude začínat v 0° a končit v -180°.

Než začneme frekvenční charakteristiku měřít ověříme linearitu. Změříme statickou převodní charakteristiku systému (tedy závislost výstupních otáček  $\omega(t)$  na velikosti vstupního napětí  $u(t)$ ). Pokud by totiž systém lineární nebyl, nebylo by vůbec možné hovořit o přenosu, či frekvenční charakteristikce. Převodní charakteristiku změříme tak, že na vstup systému připojíme signál typu rampa s dostatečně malou směrnicí (aby se neprojevovali přechodové jevy) a snímáme výstupní signál.

Z obrázku 2.20 je patrné, že motor není lineární systém – alespoň ne v celém rozsahu své převodní charakteristiky. Každý reálný motor obsahuje nelinearitu typu saturace (není možné, aby dosahoval nekonečných otáček) a nelinearitu typu necitlivost (určitě existuje nějaké dostatečně malé napětí, které nedokáže hřídel roztočit). Budeme-li se však pohybovat v lineární oblasti (to znamená, že hodnota vstupního napětí bude menší než saturační napětí a zároveň větší než pásmo necitlivosti), pak lze náš systém považovat za lineární.



Obrázek 2.20: Statická převodní charakteristika neznámého motoru

Nyní začneme měřít frekvenční charakteristiku. Systém budíme harmonickým signálem

o průběhu

$$u(t) = U_0 + U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

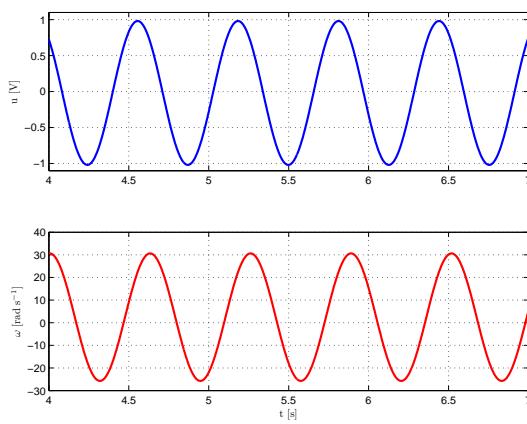
a na výstupu měříme úhlovou rychlosť o předpokládaném průběhu

$$\omega(t) = \Omega_0 + \Omega_m \sin(\omega t + \varphi_\omega),$$

kde  $U_0$  je stejnosměrná složka napětí  $u(t)$ ,  $U_m$  je amplituda napětí  $u(t)$ ,  $\varphi_u$  je fáze napětí  $u(t)$ ,  $\Omega_0$  je stejnosměrná složka úhlové rychlosti  $\omega(t)$ ,  $\Omega_m$  je amplituda úhlové rychlosti  $\omega(t)$ ,  $\varphi_\omega$  je fáze úhlové rychlosti  $\omega(t)$  a  $\omega$  je frekvence vstupního napětí  $u(t)$  i výstupní úhlové rychlosti  $\omega(t)$ .

Ještě jednou si všimněme stejně hodnoty proměnné frekvence  $\omega$  ve vstupním i výstupním signálu. To je důsledek linearity. Stejnosměrná složka  $U_0$  je na vstup přiváděna pouze proto, abychom se dostali do lineární části převodní charakteristiky, tedy nad pásmo necitlivosti. Na samotné měření nemá vliv a dále budeme pro názornost uvádět průběhy s odečtenou stejnosměrnou složkou. Hodnotu amplitudy a fáze odečítat až po odeznění všech přechodových jevů, tj. po ustálení reákce na skok způsobené stejnosměrnou složkou a po ustálení reakce na harmonický vstup.

Nyní budeme motor budit výše popsaným signálem pro různé hodnoty  $\omega$ . Podle změřené výstupní amplitudy a fáze zkonstruujeme amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku. Pak se pokusíme najít přenos, který by této charakteristice odpovídal. Z obrázku 2.21 je patrné, jakým způsobem jsme odečítali hodnoty zesílení a fázového posuvu na jednotlivých frekvencích.

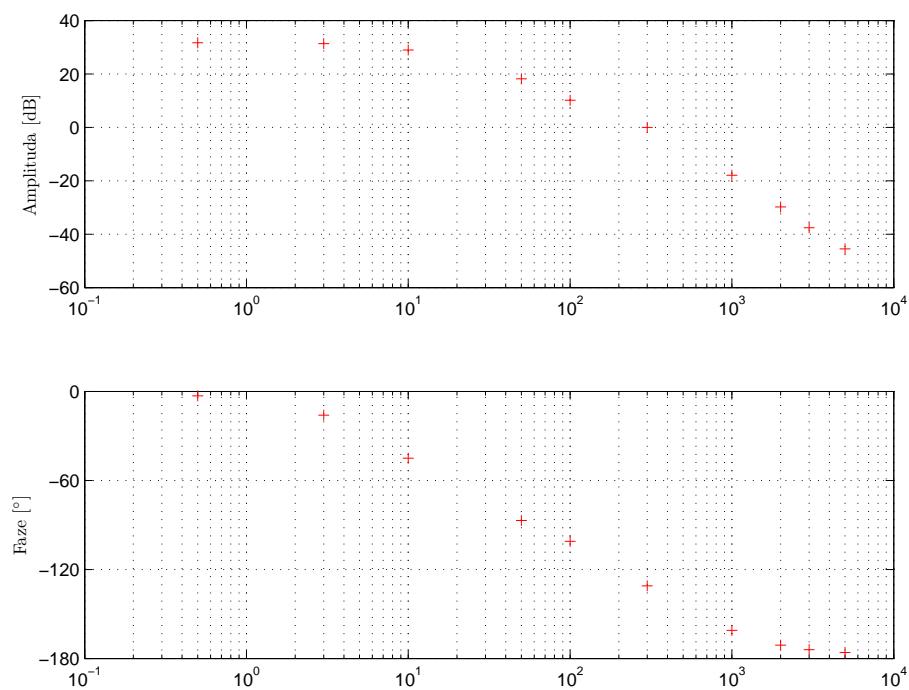


Obrázek 2.21: Průběhů napětí a otáček,  $\omega = 10 \text{ rads}^{-1}$

Z následující tabulky je patrné jaké hodnoty zesílení a fázového posuvu jsme odečetli.

Tabulka 2.2: Tabulka změřeného zesílení a fázového posuvu

| Frekvence $\omega$ [rad s <sup>-1</sup> ] | Amplituda [dB] | Fázový posuv [°] |
|---|----------------|------------------|
| 0,5                                       | 31,7           | -3               |
| 3,0                                       | 31,4           | -16              |
| 10,0                                      | 29,0           | -45              |
| 50,0                                      | 18,2           | -87              |
| 100,0                                     | 10,2           | -101             |
| 300,0                                     | 0,02           | -131             |
| 1000,0                                    | -17,9          | -161             |
| 2000,0                                    | -29,8          | -171             |
| 3000,0                                    | -37,6          | -174             |
| 5000,0                                    | -45,5          | -176             |



Obrázek 2.22: Naměřené hodnoty amplitudy a fáze z tabulky 2.2

Na obrázku 2.22 jsou vyneseny naměřené hodnoty v logaritmických souřadnicích. Nyní se pokusíme zjistit, kterému systému odpovídá frekvenční charakteristika obsahující tyto hodnoty. Při prozkoumání obrázku 2.22 zjistíme, že amplitudová charakteristika se až do frekvence přibližně 10 rad s<sup>-1</sup> konstantní, a pak začne klesat se sklonem 20 dB/dek. Navíc má na této frekvenci fázový posuv  $-45^\circ$ . To naznačuje, že se jedná o jednonásobný pól. Další změna sklonu se nachází v okolí frekvence 300 rad s<sup>-1</sup>, od které amplitudová charakteristika začne klesat se sklonem 40 dB/dek. Fáze dál klesá se sklonem  $45^\circ/\text{dek}$ , což je způsobeno tím, že vliv prvního pólu již odezněl a uplatňuje se již jen pól druhý. Fáze se ustálí na frekvenci okolo 3000 rad s<sup>-1</sup>, to polohu pólu v hodnotě 300 potvrzuje. To vede na přenos ve tvaru

$$P(s) = \frac{\frac{k_m}{LJ}}{s^2 + s\left(\frac{b}{J} + \frac{R}{L}\right) + \frac{Rb+k_e k_m}{JL}} = \frac{\frac{k_m}{LJ}}{s^2 + 310s + 3000}. \quad (2.32)$$

Pro nízké frekvence má amplitudová charakteristika hodnotu 31,7 dB. To odpovídá zesílení 38,4. Podle věty o hodnotě v koncovém bodě (TKADLEC, J., 2005), dopočítáme jmenovatele přenosu (2.32).

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{1}{s} sP(s) = \frac{\frac{k_m}{LJ}}{0 + 0 + 3000} = 38,4 \\ \frac{k_m}{LJ} &= 1,1538 \cdot 10^5. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Spojením vztahů (2.32) a (2.33) nám výjde výsledný přenos systému

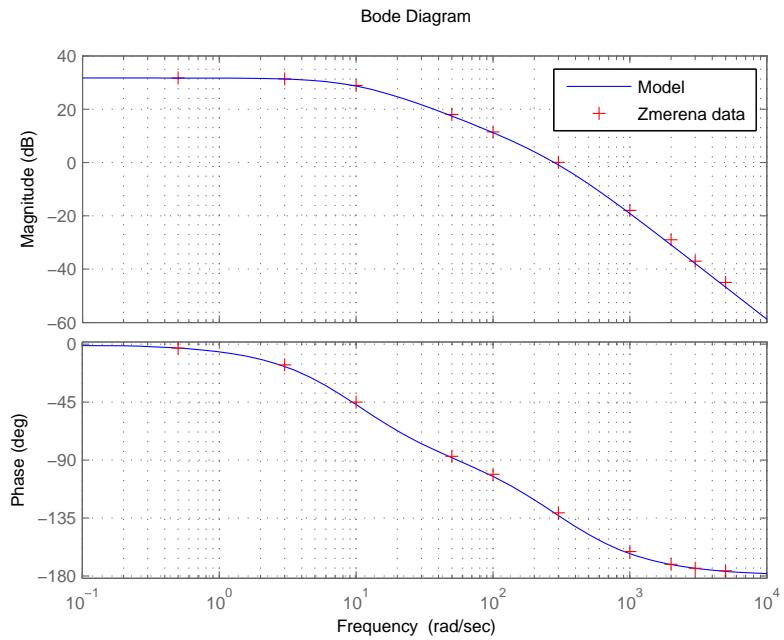
$$P(s) = \frac{1,1538 \cdot 10^5}{(s + 10)(s + 300)} = \frac{1,1538 \cdot 10^5}{s^2 + 310s + 3000}. \quad (2.34)$$

Nyní zkontrolujeme zda-li spočtený přenos opravdu odpovídá hledanému systému. Nejdříve provedeme srovnání ve frekvenční oblasti. Tím ověříme, zda byla poloha pólů a velikost zesílení zprávně vypočtena z naměřených hodnot.

Pak provedeme srovnání v časové oblasti. Aby toto srovnání dopadlo dobře je nejdůležitější správně určit velikost zesílení a polohu dominantního pólu (tj. pólu blíže imaginární osy).

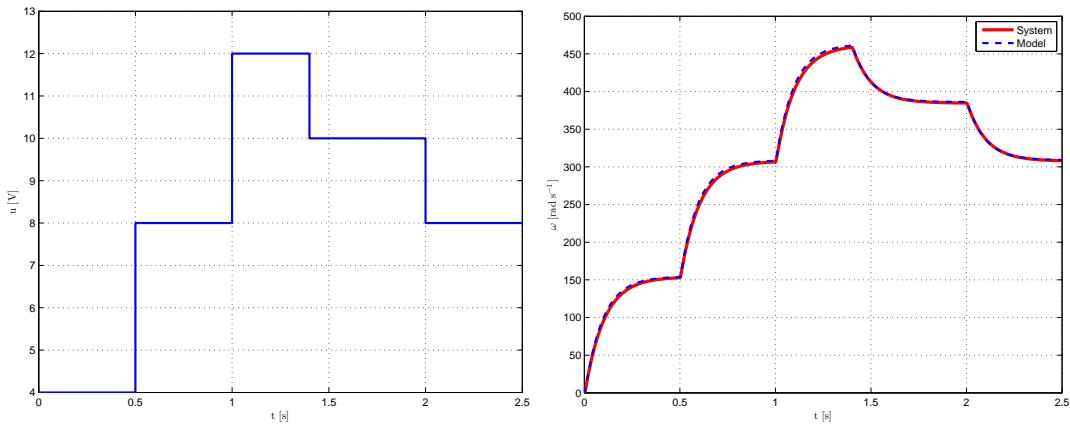
Vzhledem k tomu, že dominantní pól je přibližně třicetkrát blíže počátku než druhý pól, bude jeho vliv daleko větší než vliv pólu v hodnotě 300.

Z obrázku 2.23 je patrné srovnání ve frekvenční oblasti



Obrázek 2.23: Srovnání frekvenční odezvy přenosu (2.34) a naměřených dat z tabulky 2.2

Nakonec srovnáme náš model se systémem v časové oblasti.



Obrázek 2.24: Srovnání modelu (2.34) a skutečného systému v časové oblasti

Jak je patrné z obrázku 2.23, sestavený přenos odpovídá změřeným hodnotám frekvenční charakteristiky velmi dobře. Na obrázku 2.24 je vidět, že identifikace není dokonalá (to v praxi není nikdy), ale odchylky od skutečného systému jsou natolik malé, že ji lze

považovat za dostačující. ✓

**Příklad 2.9 (ARX):** Metoda identifikace modelem ARX se používá pro identifikaci lineárních systémů na základě zjištění diskrétního přenosu (ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B., 1995). Identifikujte systém motor z příkladu 2.8 pomocí metody ARX.

*Řešení:* Každý lineární diskrétní systém lze popsat přenosem ve tvaru

$$G(z^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \dots b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \dots a_n z^{-n}} = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})}. \quad (2.35)$$

Tento přenos (2.35) převedeme na soustavu diferenčních rovnic

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n). \quad (2.36)$$

Pokud provedeme  $m$  měření, získáme soustavu  $m$  diferenčních rovnic pro  $2n$  neznámých koeficientů

$$\begin{aligned} y(k) &= -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + \dots + b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + e(k), \\ y(k+1) &= -a_1 y(k) + \dots + b_0 u(k+1) + b_1 u(k) + \dots + e(k+1), \\ &\vdots \\ y(k+m-1) &= -a_1 y(k+m-2) + \dots + b_0 u(k+m-1) + \dots + e(k+m-1), \end{aligned} \quad (2.37)$$

kde vektor  $e$  je předpokládaný vektor šumu měření.

Vyjádříme-li soustavu (2.37) maticově získáme rovnici

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ \vdots \\ y(k+m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(k-1) & \dots & u(k) & \dots \\ \vdots & & \vdots & \\ -y(k+m-2) & \dots & u(k+m-1) & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(k) \\ \vdots \\ e(k+m-1) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Nazveme matici rovnice (2.38) maticí  $Z$  a matici koeficientů maticí  $\Theta$ . Pak můžeme soustavu (2.38) přepsat do tvaru

$$\mathbf{y} = Z\Theta + e \quad (2.39)$$

Metoda nejmenších čtverců se snaží minimalizovat kvadrát chyby. Proto lze vyjádřit kdvadrát vektoru  $\mathbf{e}$  a nazveme jej  $J$ . Pak lze vyjádřit

$$J = \mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{y} - \mathbf{Z}\Theta)^T (\mathbf{y} - \mathbf{Z}\Theta) \quad (2.40)$$

Vzhledem k tomu, že hledanou matici je matice  $\Theta$ , celou rovnici zderivujeme podle  $\Theta$ . Tím získáme vztah pro výpočet koeficientu s minimálním vlivem kvadratu šumu.

$$\Theta^* = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} (\mathbf{Z}^T \mathbf{y}) \quad (2.41)$$

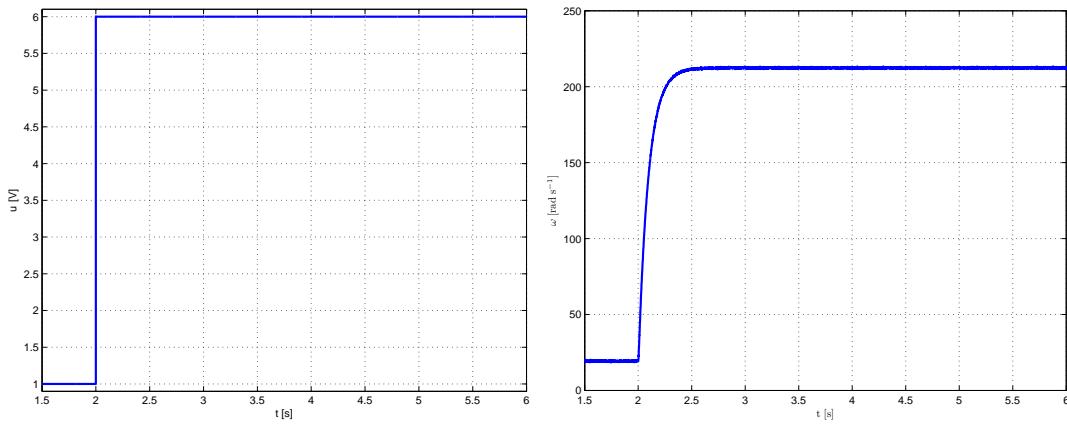
Nyní provedeme příslušná měření a spočteme ARX model stejnosměrného motoru.

Linearitu systému jsme již ověřili v příkladu 2.8 a víme, že přenos mezi napětím  $u(t)$  a úhlovou rychlostí  $\omega(t)$  je druhého rádu. Předpokládáme diskrétní přenos ve tvaru

$$P(z^{-1}) = \frac{\Omega(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}. \quad (2.42)$$

Nyní musíme změřit příslušné posloupnosti dat, abychom mohli sestavit vektory  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{y}$  a vypočítat matici  $\Theta^*$ . V souboru „arxid.m“ je k dispozici funkce která celý výpočet provádí.

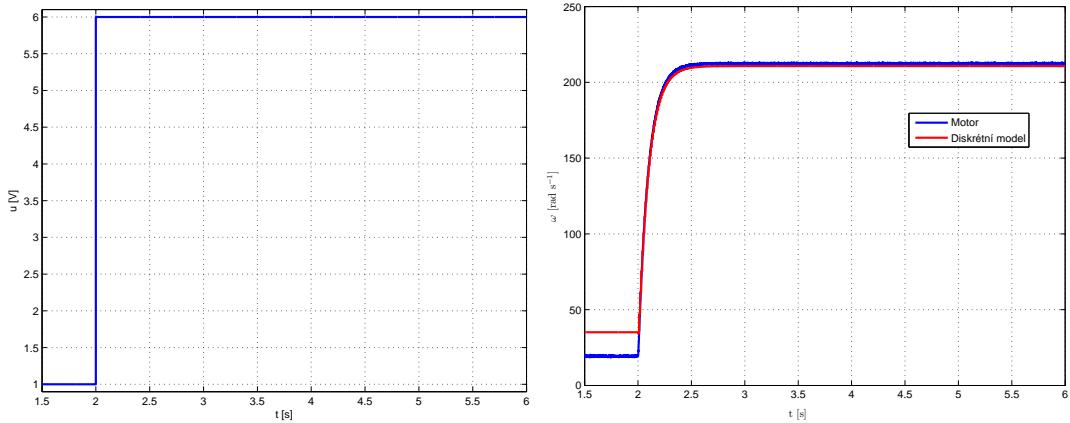
- Identifikace pomocí odezvy na skok vstupní veličiny: Protože motor obsahuje nelineárnu typu necitlivost nemůžeme použít přechodovou charakteristiku. Pro identifikaci použijeme skok vstupní veličiny který bude celý posunut nad toho pásmo. Na obrázku 2.25 je zobrazena odezva na skok se superponovaným šumem  $\mathbf{e}$  ze které budeme identifikaci provádět.



Obrázek 2.25: Odezva na posunutý skok vstupní veličiny

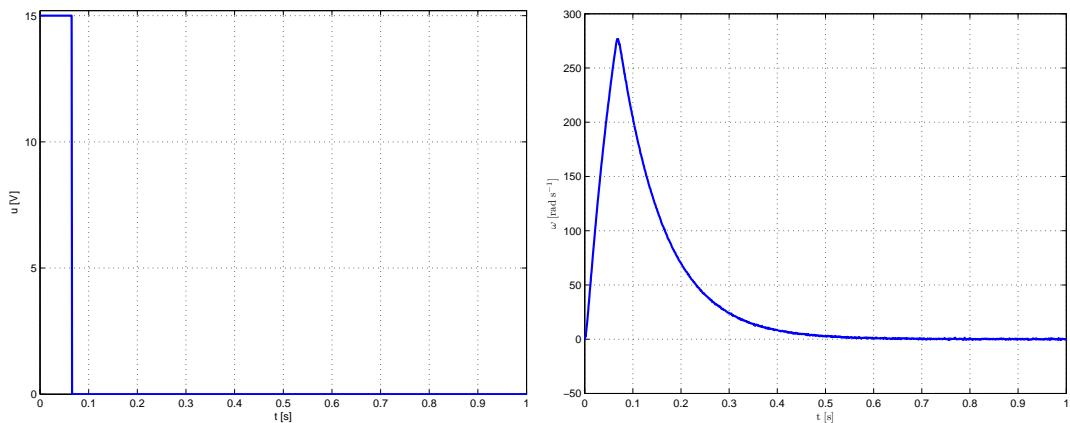
Odezvu 2.25 navzorkujeme s periodou  $T_s = 0,01$  s a příslušné posloupnosti dat použijeme k výpočtu diskrétního přenosu. Výsledkem je diskrétní přenos ve tvaru

$$G(z) = \frac{-0,1736z^2 + 2,762z - 0,3866}{z^2 - 1,264z + 0,3267}. \quad (2.43)$$



Obrázek 2.26: Srovnání odezvy na skok v motoru a modelu (2.43)

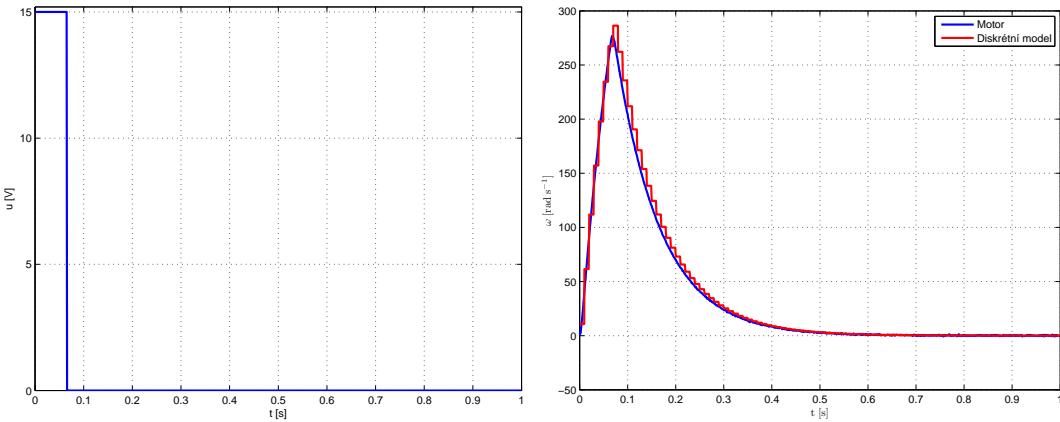
- Identifikace pomocí impulsní odezvy Nyní provedeme identifikaci pomocí impusní odezvy. Vzhledem k tomu, že diracův impuls není možné v praxi generovat. Budeme identifikaci provádět na základě odezvy systému na generovatelný impuls nenulové šířky a konečné amplitudy. Vzhledem k vysoké amplitudě můžeme pásmo necitlivosti zanedbat, ale naopak nesmíme zapomenout, že amplituda je omezena saturací. Odezva systému je zobrazena na obrázku 2.27.



Obrázek 2.27: Odezva systému na impuls

Po navzorkovaní s periodou  $T_s = 0,01$  s provedeme výpočet a získáme přenos ve tvaru

$$G(z) = \frac{0,7139z^2 + 2,731z + 0,2763}{z^2 - 0,9132z + 0,01278}. \quad (2.44)$$



Obrázek 2.28: Srovnání odezvy na impuls systému a diskrétního modelu

(2.44)

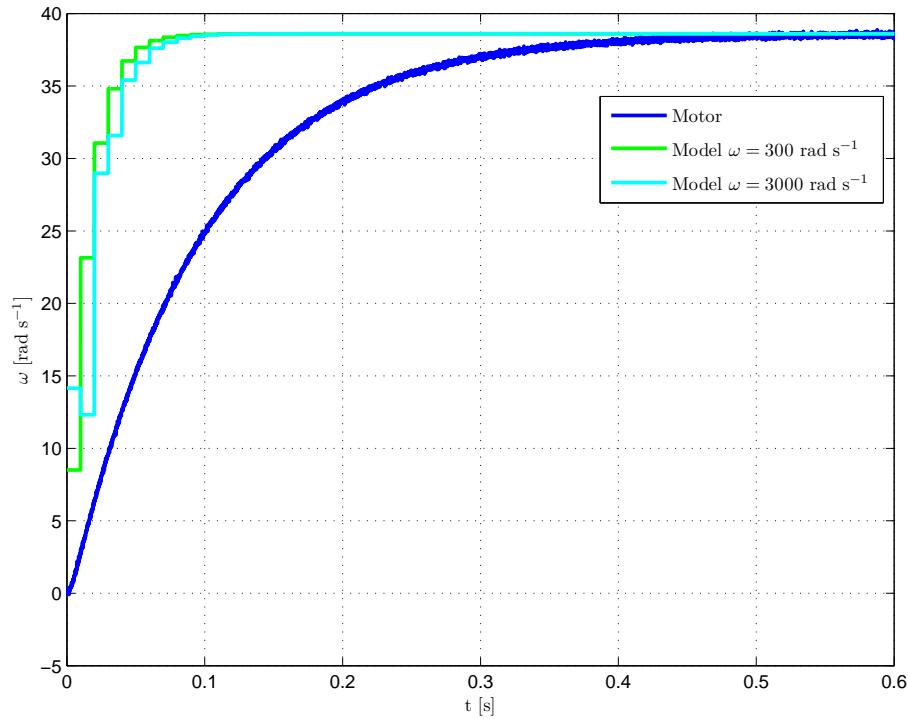
- Identifikace pomocí odezvy na harmonický vstupní signál Identifikaci provedeme stejně jako v předchozích případech. Identifikace provedme dvě, první pro vstupní singál o frekvenci  $\omega = 300$  rad  $s^{-1}$  a druhou pro vstupní singál o frekvencí  $\omega = 3000$  rad  $s^{-1}$ . Amplitudu nastavíme na  $U_m = 1$  V. Abychom se stále pohybovali nad pásmem necitlivosti (tj. v lineární oblasti) nastavíme stejnosměrnou složku vstupního signálu na  $U_{ss} = 5$  V. Periodu vzorkování nastavíme na  $T_s = 0,01$  s.

Pro  $\omega = 300$  rad  $s^{-1}$  je přenos

$$G(z) = \frac{8,502z^2 + 12,79z + 3,558}{z^2 - 0,2172z - 0,139} \quad (2.45)$$

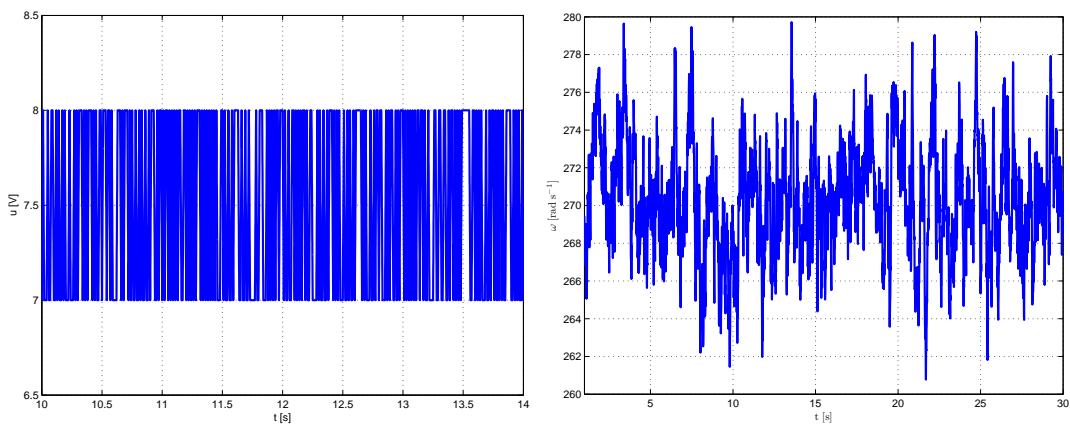
a pro  $\omega = 3000$  rad  $s^{-1}$  je přenos

$$G(z) = \frac{14,15z^2 - 4,365z + 14,14}{z^2 - 0,1785z - 0,2018}. \quad (2.46)$$



Obrázek 2.29: Srovnání přechodových charakteristiky systému a diskrétních modelů (2.45) a (2.46)

- Identifikace na základě odezvy na signál s proměnnou střídou Poslením identifikačním pokusem bude buzení systému obdélníkovým signálem, který náhodně mění střidu. Fungce pro generování tohoto signálu je k dispozici v souboru „gen.m“. Odezva systému je zobrazena na obrázku 2.30.

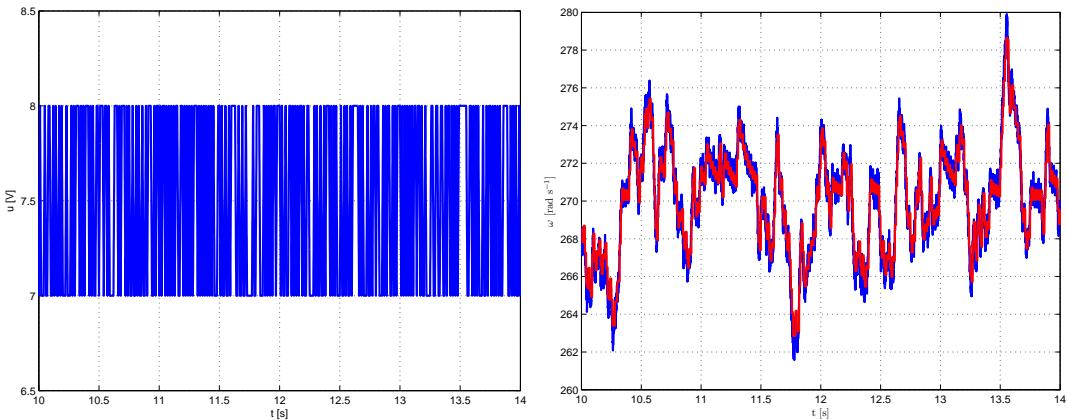


Obrázek 2.30: Odezva systému na náhodný signál (průběh napětí je zobrazen v detailu kvůli přehlednosti)

Odezvu 2.30 jsme navzorkovali s periodou  $T_s = 0,01$  s. Po dosazení do vztahu (2.41) vyjde přenos

$$G(z) = \frac{1,068z^2 + 2,807z + 1,168}{z^2 - 0,5098z - 0,3502}. \quad (2.47)$$

Nyní srovnáme přechodovou charakteristiku modelu (2.47) a zadaného systému.

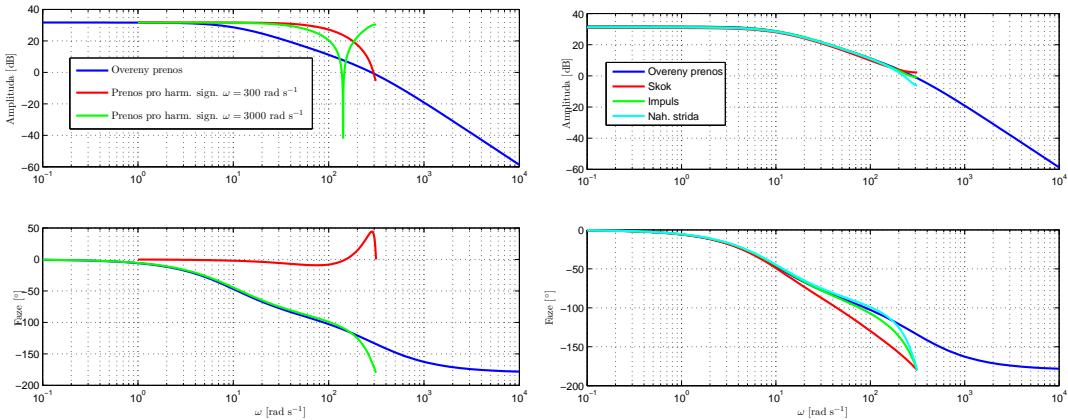


Obrázek 2.31: Srovnání odezvy systému a diskrétních modelu (2.47)

Na zavěr srovnáme všechny získané přenosy. Z obrázku 2.25 až 2.31 je patrné, že nejhůře dopadla identifikace pomocí odezvy na harmonický signál. Pokud porovnáme na frekvenční charakteristiky přenosů, zjistíme proč tomu tak je. Jako vzor bereme přenos (2.34), jehož správnost jsme ověřili v příkladu 2.8.

Jak vyplývá z obrázku 2.32, přenosy (2.45) a (2.46) odpovídají reálnému systému jen pro nízké frekvence. Proto se shoduje pouze ustálená hodnota přechodové charakteristiky. Důvod je ten, že harmonický signál obsahuje jen jednu frekvenci. Pro správnou identifikaci je třeba, aby vstupní signál měl co nejširší spektrum a identifikace tak mohla probíhat v co nejširším frekvenčním intervalu. Samozřejmě frekvenční rozsah je omezen periodou vzorkování.

Zbylé tři vypočtené přenosy v časové oblasti odpovídaly skutečnému systému. Všechny vstupní signály (skok, impuls i náhodný signál) mají široké frekvenční spektrum a lze proto předpokládat, že se budou s modelem (2.34) shodovat. Tato skutečnost je patrná z obrázku 2.32.



Obrázek 2.32: Srovnání frekvenční charakteristiky modelu (2.34) a modelů (2.43) až(2.47)

Nejlépe systému odpovídá přenos (2.46) získáný z identifikace pomocí odezvy na signál s náhodnou střídou. To je způsobeno tím, že tento singál má nejširší spekturn a budí tak systém na nejširším spektru.

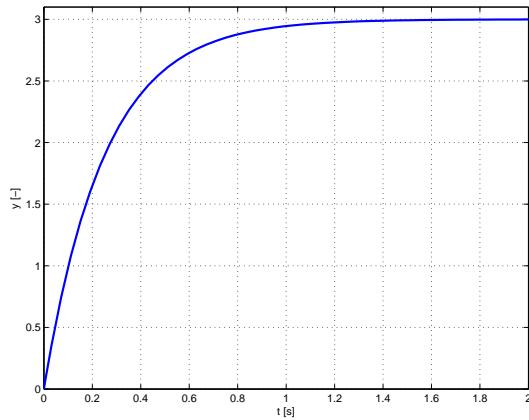
Závěrem můžeme prohlásit, že metoda nejmenších čtverců dáva nejlepší výsledek pro vstupní signál s co nejširším frekvenčním spektrem. Nejhodněji se jeví identifikace na základě odezvy na singál s náhodnou střídou. ✓

## 2.2 Neřešené příklady

**Příklad 2.10:** Zjistěte neznámou konstantu  $k$  systému popsánoho přenosem

$$P(s) = \frac{k}{s+4} \quad (2.48)$$

a přechodovou charakteristikou zobrazenou na obrázku 2.33.

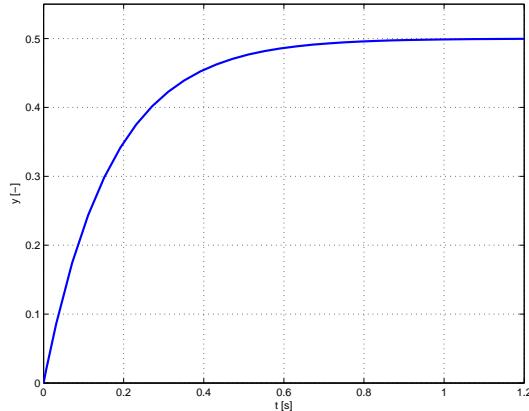


Obrázek 2.33: Přechodová charakteristika systému (2.48)

**Příklad 2.11:** Zjistěte polohu pólu systému popsaného přenosem

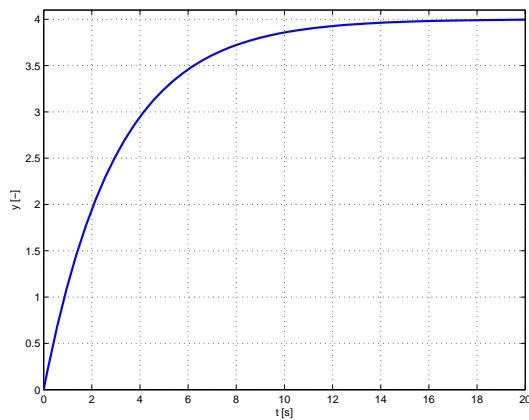
$$P(s) = \frac{3}{s + a} \quad (2.49)$$

a přechodovou charakteristikou na obrázku 2.34.



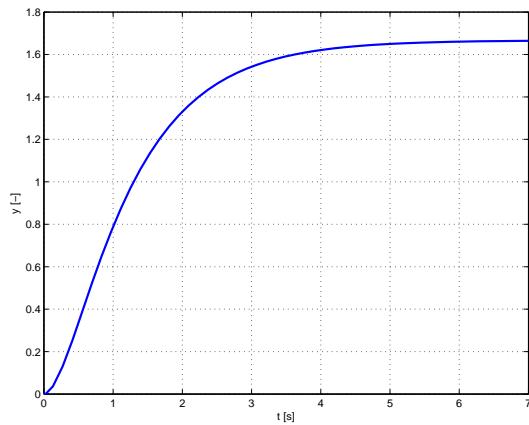
Obrázek 2.34: Přechodová charakteristika systému (2.49)

**Příklad 2.12:** Identifikujte přenos prvního řádu popsaný přechodovou charakteristikou na obrázku 2.35.



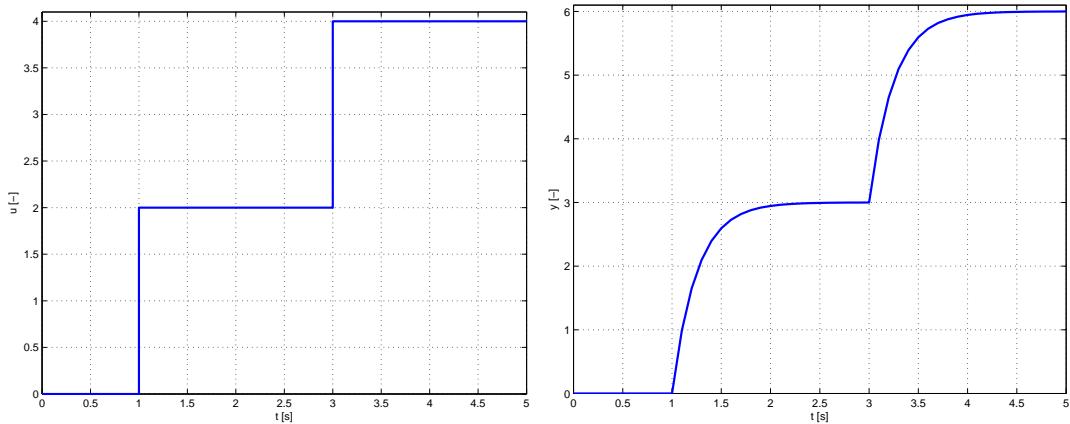
Obrázek 2.35: Přechodová charakteristika neznámého systému

**Příklad 2.13:** Identifikujte přenos druhého řádu jehož přechodová charakteristik je zobrazena na obrázku 2.36



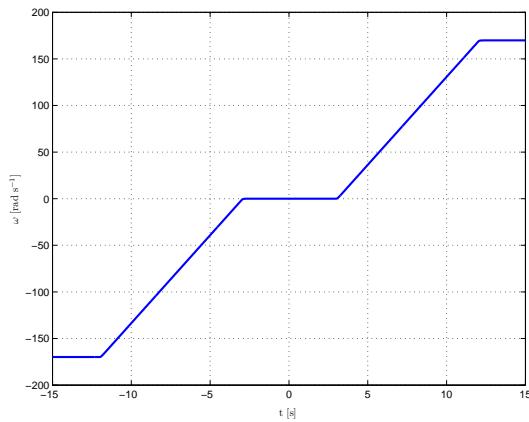
Obrázek 2.36: Přechodová charakteristika neznámého systému

**Příklad 2.14:** U neznámého systému prvního řádu byla změřena odezva na obrázku 2.37. Stanovte stavový model a přenos systému.



Obrázek 2.37: Odezva neznámeho systému

**Příklad 2.15:** Identifikujte nezatíženy stejnosměrný cizebuzený motor, jehož převodní charakteristika je zobrazena na obrázku 2.38.



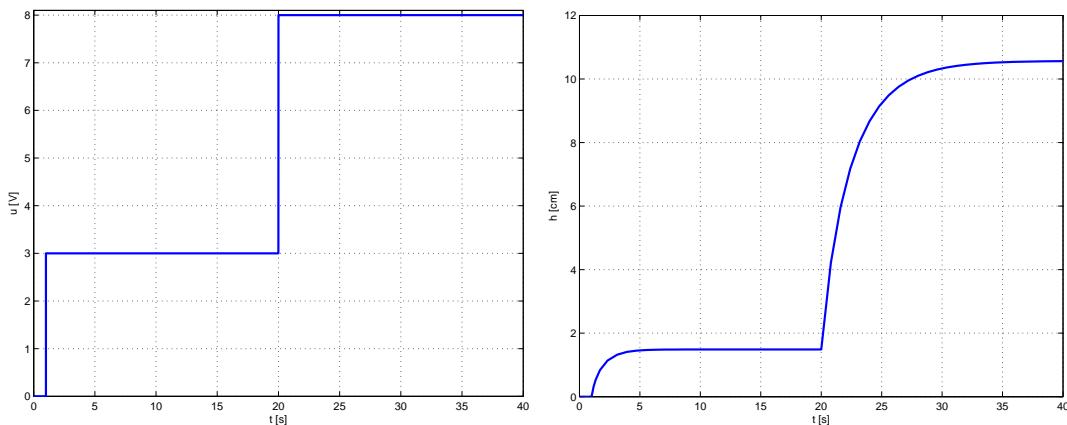
Obrázek 2.38: Převodní charakteristika stejnosměrného motoru

Sestavte stavový model odpovídající lineární části převodní charakteristiky a určete velikosti všech nelinearit.

**Příklad 2.16:** Mějme nádrž do které je přiváděna voda odstředivým čerpadlem s lineární závislostí napětí na generovaném průtoku. Z nádrže voda volně odtéka výpustním potrubím. Zjistěte konstantu čerpadla a velikost průřezu výpustního potrubí víte-li, že průřez nádrže je  $S_0 = 314 \text{ cm}^2$  a průřez přívodního potrubí je  $S_1 = 3,1 \text{ cm}^2$ . Systém je popsán stavovým popisem

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{S_1}{S_0} ku(t) - \frac{S_2}{S_0} \sqrt{2gh(t)},$$

kde  $k$  je převodní konstanta čerpadla,  $S_0$  je průřez nádrže,  $S_2$  je průřez přívodního potrubí,  $S_3$  je průřez výpustního potrubí a  $g$  je tělové zrychlení. K výpočtu použijte odezvu na obrázku 2.39.



Obrázek 2.39: Odezva vodárny na vstupní napětí

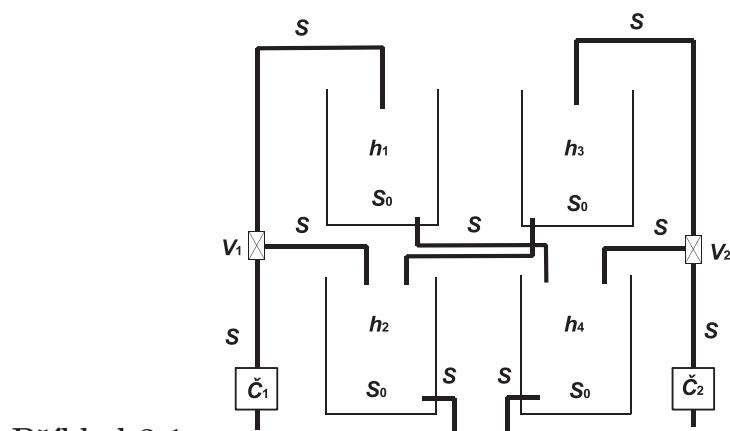
**Příklad 2.17:** V souboru „blackbox.mdl“ je k dispozici 10 neznámých systémů nejvýše 2. řádu. Provedte identifikaci všech systémů. Návod na použití je uveden uvnitř modelu.

# Kapitola 3

## Soustava vodáren

3.1 Úvod

Naším úkolem je odvodit nelineární i linearizovaný model a vytvořit virtuální realitu k systému skládajícího se ze čtyř nádrží, do nichž je přiváděna voda pomocí dvou čerpadel. Proud vody je rozdělen pomocí dvou proporcionálních ventilů, které rozdělují tok vody do jednotlivých nádrží tak, že propouští část do horní nádrže a zbytek do nádrže spodní. Z horních nádrží pak vodá volně odtéka do nádrží spodních, ze kterých volně vytéká pryč. Systém je zobrazen na obrázku 3.1.



### Příklad 3.1:

Obrázek 3.1: Nákres soustavy čtyř vodáren

## 3.2 Nelineární model

Nyní sestavíme nelineární diferenciální rovnice, které celý systém popisují (ROUBAL, J.; HUŠEK, P., 2008).

$$\begin{aligned}\frac{dh_1(t)}{dt} &= V_1(t) \frac{S}{S_0} k_1 u_1(t) - \frac{S}{S_0} \sqrt{2g} \sqrt{h_1(t)}, \\ \frac{dh_2(t)}{dt} &= (1 - V_1(t)) \frac{S}{S_0} k_1 u_1(t) + \frac{S}{S_0} \sqrt{2g} \sqrt{h_3(t)} - \frac{S}{S_0} \sqrt{2g} \sqrt{h_2(t)}, \\ \frac{dh_3(t)}{dt} &= V_2(t) \frac{S}{S_0} k_2 u_2(t) - \frac{S}{S_0} \sqrt{2g} \sqrt{h_3(t)}, \\ \frac{dh_4(t)}{dt} &= (1 - V_2(t)) \frac{S}{S_0} k_2 u_2(t) + \frac{S}{S_0} \sqrt{2g} \sqrt{h_1(t)} - \frac{S}{S_0} \sqrt{2g} \sqrt{h_4(t)},\end{aligned}\quad (3.1)$$

kde  $V_1(t)$  udává jaká část toku vody proudící přes první ventil bude puštěna do první nádrže ( $V_1(t) = 0 \dots$  do první nádrže neteče nic,  $V_1(t) = 1 \dots$  do první nádrže teče vše),  $S$  je průřez potrubí,  $S_0$  je průřez nádrží,  $k_1$  je konstanta prvního čerpadla,  $u_1(t)$  je napětí na prvním čerpadle,  $g$  je tělové zrychlení,  $h_{1-4}(t)$  jsou výšky hladin v jednotlivých nádržích,  $V_2(t)$  udává, jaká část toku vody proudící přes první ventil bude puštěna do třetí nádrže ( $V_2(t) = 0 \dots$  do třetí nádrže neteče nic,  $V_2(t) = 1 \dots$  do třetí nádrže teče vše),  $k_2$  je konstanta druhého čerpadla a  $u_2(t)$  je napětí na druhém čerpadle.

Za vstupy systému se povazují napětí  $u_1(t)$  a  $u_2(t)$  přiváděné na čerpadla a míra natočení ventilů  $V_1(t)$  a  $V_2(t)$ , stavem jsou výšky hladin v jednolivých válcích  $h_1(t)$ ,  $h_2(t)$ ,  $h_3(t)$  a  $h_4(t)$  a za výstup bereme výšku hladin ve válcích  $h_2(t)$  a  $h_4(t)$ .

### 3.3 Linearizace

Provedeme linearizaci v obecném pracovním bodě. Obecný pracovní bod má souřadnice  $P = [h_{10}, h_{20}, h_{30}, h_{40}, u_{10}, u_{20}, V_{10}, V_{20}]$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\frac{S\sqrt{2g}}{2S_0\sqrt{h_{10}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{S\sqrt{2g}}{2S_0\sqrt{h_{20}}} & \frac{S\sqrt{2g}}{2S_0\sqrt{h_{30}}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{S\sqrt{2g}}{2S_0\sqrt{h_{30}}} & 0 \\ \frac{S\sqrt{2g}}{2S_0\sqrt{h_{10}}} & 0 & 0 & -\frac{S\sqrt{2g}}{2S_0\sqrt{h_{40}}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \frac{V_{10}Sk_1}{S_0} & 0 & \frac{S}{S_0}k_1u_{10} & 0 \\ \frac{(1-V_{10})Sk_1}{S_0} & 0 & -\frac{S}{S_0}k_1u_{10} & 0 \\ 0 & \frac{V_{20}Sk_2}{S_0u_{20}} & 0 & \frac{S}{S_0}k_2u_{20} \\ 0 & \frac{(1-V_{20})Sk_2}{S_0u_{20}} & 0 & -\frac{S}{S_0}k_2u_{20} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Matice zjednodušíme zavedením substituce  $a_1 = \frac{S\sqrt{2g}}{2S_0}$ ,  $a_2 = \frac{Sk_1}{S_0}$  a  $a_3 = \frac{Sk_2}{S_0}$ . Matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  pak mají matice tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_1}{\sqrt{h_{20}}} & \frac{a_1}{\sqrt{h_{30}}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_1}{\sqrt{h_{30}}} & 0 \\ \frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}} & 0 & 0 & -\frac{a_1}{\sqrt{h_{40}}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \frac{V_{10}a_2}{a_2} & 0 & a_2u_{10} & 0 \\ (1-V_{10})a_2 & 0 & -a_2u_{10} & 0 \\ 0 & \frac{V_{20}a_3}{a_3} & 0 & a_3u_{20} \\ 0 & (1-V_{20})a_3 & 0 & -a_3u_{20} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nazávěr vyjádříme přenosovou matici. Přenosová matice má tvar

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} P_{u_1 \rightarrow h_2} & P_{u_2 \rightarrow h_2} & P_{V_1 \rightarrow h_2} & P_{V_2 \rightarrow h_2} \\ P_{u_1 \rightarrow h_4} & P_{u_2 \rightarrow h_4} & P_{V_1 \rightarrow h_4} & P_{V_2 \rightarrow h_4} \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{C} \text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})} + \mathbf{D}$$

$$\begin{aligned} P(s)_{u_1 \rightarrow h_2} &= \frac{(1-V_{10})a_2(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}})(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{30}}})(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{40}}})}{(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}})(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{20}}})(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{30}}})(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{40}}})} & P(s)_{u_2 \rightarrow h_2} &= \frac{\frac{(1-V_{10})a_2a_1}{\sqrt{h_{30}}}(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}})(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{40}}})}{(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}})(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{20}}})(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{30}}})(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{40}}})} \\ P(s)_{V_1 \rightarrow h_2} &= \frac{-a_2u_{10}(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}})(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{30}}})(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{40}}})}{(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}})(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{20}}})(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{30}}})(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{40}}})} & P(s)_{V_2 \rightarrow h_2} &= \frac{\frac{a_1a_3u_{20}}{\sqrt{h_{30}}}(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}})(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{40}}})}{(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}})(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{20}}})(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{30}}})(s+\frac{a_1}{\sqrt{h_{40}}})} \end{aligned}$$

$$P(s)_{u_1 \rightarrow h_4} = \frac{\frac{V_{10}a_2a_1}{\sqrt{h_{10}}} (s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{20}}})(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{30}}})}{(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}})(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{20}}})(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{30}}})(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{40}}})}$$

$$P(s)_{u_2 \rightarrow h_4} = \frac{a_3(1 - V_{20})(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}})(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{20}}})(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{30}}})}{(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}})(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{20}}})(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{30}}})(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{40}}})}$$

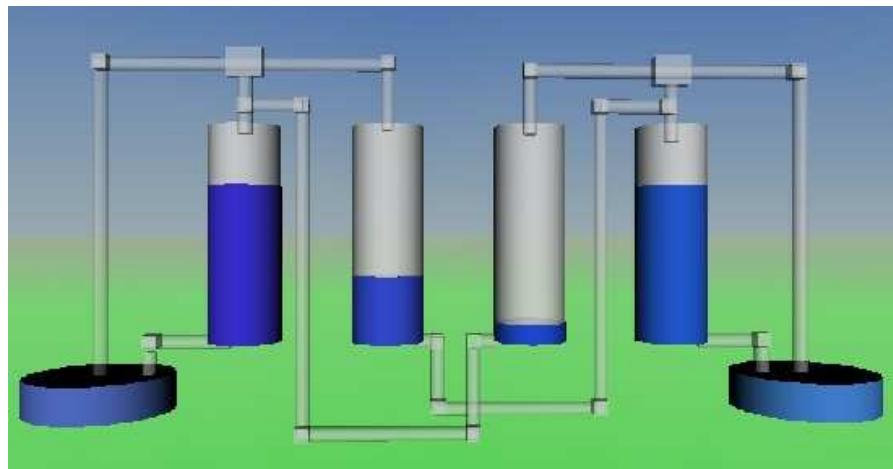
$$P(s)_{V_1 \rightarrow h_4} = \frac{\frac{a_1a_2u_{10}}{\sqrt{h_{10}}} (s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{20}}})(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{30}}})}{(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}})(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{20}}})(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{30}}})(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{40}}})}$$

$$P(s)_{V_2 \rightarrow h_4} = \frac{-a_3u_{20}(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}})(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{20}}})(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{30}}})}{(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{10}}})(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{20}}})(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{30}}})(s + \frac{a_1}{\sqrt{h_{40}}})}$$

### 3.4 Virtuální model

Tím je zakončena analýza systému v rámci této práce. Celý nelinární model, včetně virtuálního modelu naleznete v souboru „vodarny.mdl“. Model je nastaven na jendu konkrétní kombinaci paramterů nelineárního modelu. Při změně této kombinace hodnot může model ztratit svou názornost, což se dá obejít zapojením vhodného zesílení před vstupem výšky hladin do modelu. Model proto není doplně metrickými ukazately výšky hladiny, protože při zapojení výše zmíněného zesílení by neodpovídal pravdě.

Na obrázku 3.2 je ukázka virtuálního modelu.



Obrázek 3.2: Ukázka virtuálního modelu

# Kapitola 4

## Závěr

V první kapitole jsou sestaveny řešené a neřešené příklady, které mají napomoci čtenářům při identifikaci dynamických systémů se soustředěnými parametry. Cílem těchto příkladů je čtenáře seznámit ze základními metodami identifikace a motivovat ho k pochopení celé problematiky. Příklady jsou voleny tak, aby co nejvíce pokryvaly látku předmětu Systémy a modely vyučovanému Katedrou řídící techniky. Navíc je k dispozici funkce „arxid.m“, která na základě změrených vstupních a výstupních dat provádí výpočet ARX modelu a funkce „gen.m“ která generuje obdlníkový signál s náhodou strídou.

V druhé časti je sestaven nelineární model systému čtyř vodáren. Pak je provedena jeho linearizace v obecném pracovním bodě. Na zavěr je předložen virtuální model vytvorený v prostředí Matlab Virtual Reality ToolBox.

Práce byla vytvořena v prostředí L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, veškeré výpočty a simulace jsou prováděny v programu Matlab a Simulink.

# Literatura

- VOŽENÍLEK, P., JANOUŠEK, J.; (2006), *Základy silnorpoudé elektrotechniky*, Praha: Vydavatelství ČVUT.
- TKADLEC, J.; (2005), *Diferenciální rovnice, Laplaceova transformace*, Praha: Vydavatelství ČVUT.
- ROUBAL, J., HUŠEK, P.; (2008), *Základy regulační techniky v příkladech [online]*
- FUKA, J. JOHN, J. KUTIL, M.; (2005), *Učebnice SAM / SRI [online]*,  
<http://dce.felk.cvut.cz/sari/>
- ÅSTRÖM, K. J., WITTENMARK, B.; (1995), *Adaptive Control*, Addison-Wesley Publishing Company.

## Příloha A

### Výsledky neřešených příkladů

2.10:  $P(s) = \frac{12}{s+4}$ ; 2.11:  $P(s) = \frac{3}{s+6}$ ; 2.12:  $P(s) = \frac{4}{3s+1}$ ; 2.13:  $P(s) = \frac{5}{s^2+4s+3}$ ; 2.14:  $\frac{dx(t)}{dt} = -4x(t) + 2u(t)$ ,  $y(t) = 3x(t)$ ,  $P(s) = \frac{6}{s+4}$ ; 2.15:  $\frac{di(t)}{dt} = -\frac{0,8}{0,003} i(t) - \frac{0,05}{0,003} \omega(t) + \frac{1}{0,003} u(t)$ ,  $\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{0,08}{0,0004} i(t) - \frac{0,0003}{0,0004} \omega(t)$ ,  $y(t) = \omega(t)$ ,  $P(s) = \frac{6,667 \cdot 10^4}{s^2+267,4s+3533}$ , necitlivost  $\langle -3; 3 \rangle$  V, saturace  $u(t) \notin \langle -12; 12 \rangle$  V; 2.16:  $k = 0,09 \text{ m(Vs)}^{-1}$ ,  $S_2 = 0,78 \text{ cm}^2$ ; 2.17:  $P_1(s) = \frac{0,1s}{5 \cdot 10^{-6}s^2+0,1s+1000}$ ;  $P_2(s) = \frac{9}{s^2+3s+9}$ ;  $P_3(s) = \frac{1}{s^2}$ ;  $\frac{dx_1(t)}{dt} = 9,81 \sin(u)$ ,  $\frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t)$ ,  $y(t) = x_2(t)$ ,  $P_5(s) = \frac{300}{s+3}$ ;  $P_6(s) = \frac{42}{s^2+10s+21}$ ;  $P_7(s) = \frac{4}{s+0,5}$ ;  $P_8(s) = \frac{1}{s^2+3s}$ ;  $P_9(s) = \frac{4s+8}{s^2+3,5s+1,5}$ ;  $P_{10}(s) = \frac{4s-8}{s^2+3,5s+1,5}$ .

## **Příloha B**

### **Obsah přiloženého CD**

K této práci je připojeno CD které obsahuje následují data:

- Složka L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X: Zdrojový kód této práce v prostředí L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X
- Složka Simulink: Simulinkové modely patřící k řešeným a neřešeným příkladům
- Složka Matlab: Funkce „arxid.m“ a uvgen.m
- Složka Vodarny: Model soustavy vodáren v prostředí Matlab Virtual Reality Toolbox
- Složka BakPrace: PDF verze této práce