ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ
KATEDRA ŘÍDICÍ TECHNIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Řízení čtyřválcové vodárny

Vedoucí práce: Ing. Petr Hušek, Ph.D.

Autor: Bc. Jozef Zakucia

Praha, 2009

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Katedra řídicí techniky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Jozef Zakucia**

Studijní program: Elektrotechnika a informatika (magisterský), strukturovaný
Obor: Kybernetika a měření, blok KM1 - Řídicí technika

Název tématu: **Řízení čtyřválcové vodárny**

Pokyny pro vypracování:

1. Vytvořte model čtyřválcové vodárny (MIMO systém s dvěma vstupy a dvěma výstupy) s nastavitelnou nulou systému
2. Navrhněte pro tento systém regulátory klasické struktury (PID regulátor, stavovou zpětnou vazbu, dynamický regulátor navržený polynomiálními metodami)
3. Navrhněte pro systém čtyřválcové vodárny dynamický a stavový rozvazbovací regulátor a porovnejte kvalitu regulace u všech navržených regulátorů

Seznam odborné literatury:

K.H Johansson: The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Volume 8, Issue 3, 2000 pp. 456 - 465;
S. Skogestad, I. Postlethwaite: Multivariable Feedback Control, Analysis and Design, John Wiley & Sons, 2007

Vedoucí: Ing. Petr Hušek, Ph.D.

Platnost zadání: do konce zimního semestru 2008/2009

prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry

L.S.

v. z. M. Smelík
doc. Ing. Boris Šimák, CSc.
děkan

V Praze dne 10. 9. 2007

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne 14. 1. 2009 .....

podpis

Poděkování

Rád by som na tomto mieste poďakoval hlavne môjmu vedúcemu diplomovej práce Ing. Petru Hušekovi, Ph.D. za konzultácie, cenné rady a pripomienky pri riešení tejto práce.

Abstrakt

Táto diplomová práca pojednáva o modeli štyroch nádrží, ktoré sú napájané dvoma čerpadlami cez dva pomerové ventily. Tento model predstavuje príklad mnohorozmerového systému, ktorý má všeobecne interakcie medzi jednotlivými vstupmi a výstupmi. Nastavovaním pomerových ventilov môžeme ľahko meniť vlastnosti modelu, hlavne jeho minimálne fázové alebo neminimálne fázové chovanie. Odvodili sme linearizovaný model daného systému a demonštrovali jeho základné vlastnosti a spôsob návrhu riadenia. Tiež sme navrhli regulátory, ktoré eliminujú interakcie u minimálne fázového systému.

Abstract

This thesis handles about four tanks, which are connected through two pumps and two valves. This system represents an example of multi-input multi-output system, which has general interactions between each input and output. Properties of the system can be set by valves, especially its minimum and non-minimum phase behavior. Linearization of the model was derived and its basic characteristics were shown. Afterwards control systems were demonstrated. Controllers, which eliminate interactions in case of minimum phase system, were also designed.

Obsah

1 Úvod **1**
1.1 Zoznam použitých skratiek 2

2 MIMO systémy **3**
2.1 Štvor - nádržový systém 3
2.1.1 Fyzikálny model 4
2.2 Stabilné a nestabilné nuly MIMO systému 8
2.3 Smer nuly MIMO systému 10
2.4 Interakcie a RGA 14

3 Návrh regulátorov pre minimálne fázový systém **19**
3.1 Decentralizovaný PI regulátor 19
3.2 LQ regulátor 23
3.3 Návrh regulátorov s elimináciou interakcií 27
3.3.1 Dynamický rozväzbovací regulátor 28
3.3.2 Stavový rozväzbovací regulátor 33

4 Návrh regulátorov pre neminimálne fázový systém **44**
4.1 Decentralizovaný PI regulátor 45
4.2 LQ regulátor 48
5 Záver **51**

Literatúra **52**

Príloha A **53**

1 Úvod

Pre mnoho modelov priemyselných procesov je bežné, že obsahujú viacero vstupov a viacero výstupov. Takéto modely môžu mať neminimálne fázové chovanie a interakcie medzi vstupmi a výstupmi, čo je v prípade návrhu riadenia potrebné zohľadniť. Veľmi dobrým a názorným príkladom systému s viacerými vstupmi a výstupmi je model štyroch nádrží.

Model štyroch nádrži bol uvedený a vytvorený v roku 1996 na Inštitúte Technológií v Lund (Švédsko). Model bol zostrojený za účelom demonštrácie MIMO (multi-input multi-output) systému s jednoduchým nastavovaním umiestnenia nuly v pravej alebo ľavej polrovine. Tento fyzikálny model v dnešnej dobe slúži ako študijný model vo viacerých laboratóriách riadenia na univerzitách vo svete. Je na ňom možné prezentovať špecifiká, základné vlastnosti a riadenie MIMO systémov.

Hlavným cieľom tejto diplomovej práce je oboznámiť čitateľa so systémom štyroch nádrží ako príkladom systému s viacerými vstupmi a výstupmi, a navrhnúť mu decentralizované, centralizované a rozväzbujúce regulátory. Rozväzbujúce regulátory majú za úlohu úplne odstrániť interakcie v danom systéme, pokiaľ to je možné.

Model môže meniť svoje vlastnosti v závislosti na nastavení pomerových ventilov, kedy je možné nastaviť nulu systému v pravej alebo ľavej polrovine. Systém je teda minimálne fázový alebo neminimálne fázový. Tento model teda umožňuje pochopiť problém riadenia pri interakciách a neminimálne fázovom chovaní.

Vzhľadom na to, že fakulta zatiaľ takýmto modelom nie je vybavená, boli pre vytvorenie matematického popisu systému použité fyzikálne parametre podľa reálneho modelu uvedeného v [2]. To znamená, že všetky výsledky v tejto práci vznikli simuláciou.

Ku všetkým výpočtom a simuláciám bol použitý programový balík Matlab a Simulink a toolboxy Control System a Polynomial. Na priloženom CD sú zdrojové kódy väčšiny výpočtov a Simulink modely väčšiny simulácií uvedených v tejto práci. Jednotlivé súbory sú uložené v adresároch s názvami odpovedajúcich kapitol.

Táto diplomová práca je koncipovaná tak, že vo väčšine kapitol je zo začiatku teoretický rozbor daného problému všeobecne, a následne je znázornené praktické použitie na konkrétnom príklade.

1.1 Zoznam použitých skratiek

V tomto dokumente sú použité skratky, ktoré vychádzajú z ich významu v angličtine:

SISO systémy	systémy s jedným vstupom a jedným výstupom
MIMO systémy	systémy s viacerými vstupmi a viacerými výstupmi
SVD	rozklad na singulárne čísla
RGA	matica relatívnych zosilnení
PI regulátor	proporcionálny a integračný regulátor
LQR	kvadratický optimálny regulátor pre lineárne systémy

2 MIMO systémy

Systémy MIMO sú systémy s viacerými vstupmi a s viacerými výstupmi, alebo ich tiež označujeme ako viacrozmerové systémy. Uvažujme viacrozmerový systém s m vstupmi a l výstupmi $y(s) = G(s)u(s)$, kde $y(s)$ je výstupný vektor $l \times 1$, $u(s)$ je vstupný vektor $m \times 1$ a $G(s)$ je $l \times m$ prenosová matica systému. V takomto systéme všeobecne, zmena j-teho vstupu ovplyvní všetky výstupy, t.j. systém má *interakcie* medzi vstupmi a výstupmi, čo robí problém riadenia zložitejší v porovnaní so SISO systémami. Všeobecne je teda vonkajší popis MIMO systémov určený nediagonálnou maticou prenosov $G(s)$.

Ďalším dôležitým rozdielom medzi SISO a MIMO systémami je prítomnosť tzv. smerov u MIMO systémov, čo má podstatný vplyv na prístup k takýmto systémom.

Špecifiká, popis a návrh riadenia MIMO systému budú ukázané na názornom príklade s dvoma vstupmi a dvoma výstupmi v nasledujúcich častiach.

2.1 Štvor - nádržový systém

V tejto časti popíšeme laboratórny model 4-nádržovej vodárne a vytvoríme jeho vnútorný a vonkajší popis [2].

Model pozostáva zo štyroch 20 cm vysokých nádrží s voľnými odtokmi. Nádrže sú napájané dvoma čerpadlami cez dva pomerové ventily. Schematické znázornenie modelu je na obrázku 2.1. V tabuľke 2.2 sú uvedené parametre laboratórneho modelu. Napätiu v_i na i-tom čerpadle odpovedá tok $k_i v_i$. Parametre γ_1, $\gamma_2 \in (0,1)$ odpovedajú nastaveniu ventilov tak, že toky sú rozdelené podľa nasledujúcej tabuľky 2.1.

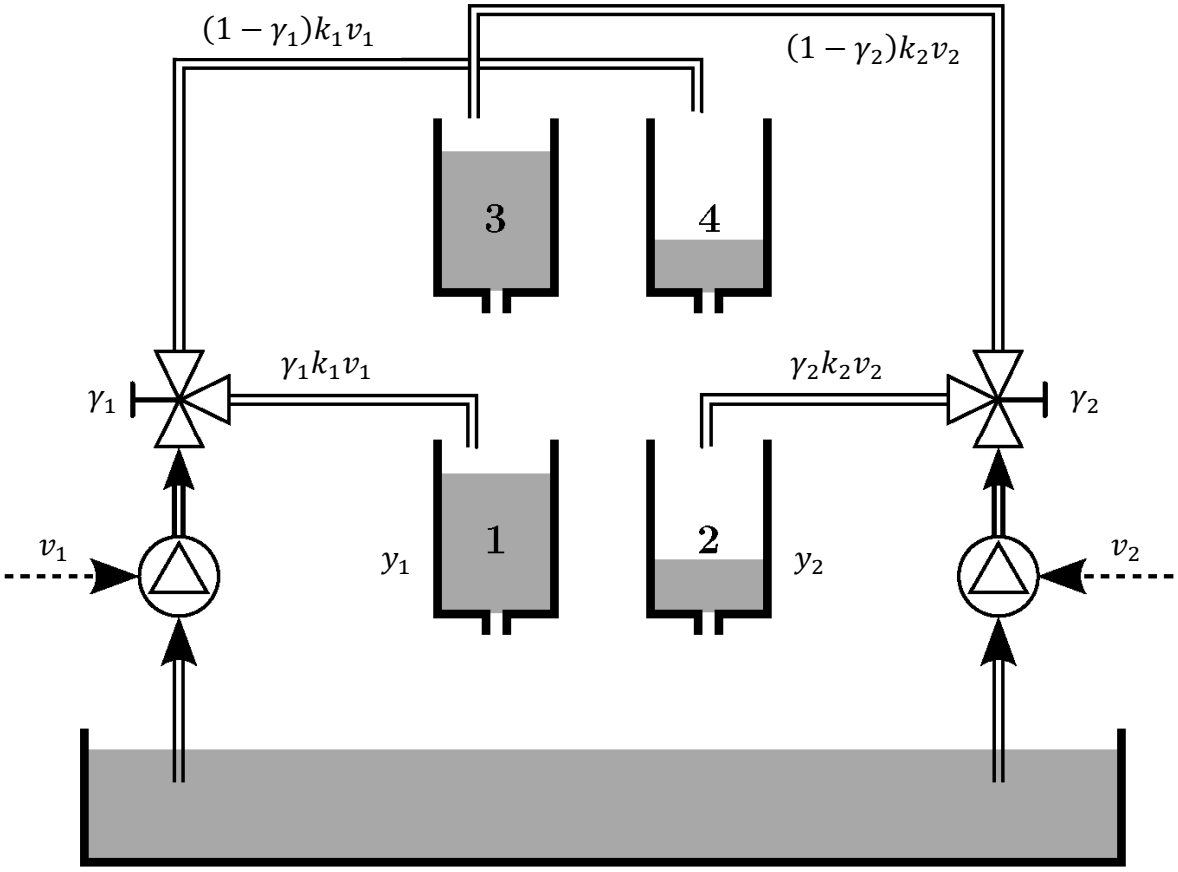
Tok	do nádrže 1	do nádrže 2	do nádrže 3	do nádrže 4
z čerpadla 1	$\gamma_1 k_1 v_1$	–	–	$(1-\gamma_1)k_1 v_1$
z čerpadla 2	–	$\gamma_2 k_2 v_2$	$(1-\gamma_2)k_2 v_2$	–

Tabuľka 2.1: Toky do nádrží z čerpadiel.

Vstupmi tohto systému budú napätia na čerpadlách v_1 a v_2 a výstupmi budú výšky vodných hladín y_1 a y_2.

$A_1,\ A_3$	$[\mathrm{cm}^2]$	28	obsahy dna nádrží
$A_2,\ A_4$	$[\mathrm{cm}^2]$	32	
a_1, a_3	$[\mathrm{cm}^2]$	0.071	obsahy otvorov v nádržiach
a_2, a_4	$[\mathrm{cm}^2]$	0.057	
g	$[\mathrm{cm/s}^2]$	981	gravitačné zrýchlenie
h_i	[cm]		výška i-tej hladiny v nádrži

Tabuľka 2.2 : Parametre laboratórneho modelu.



Obrázok 2.1: Znázornenie 4-nádržového systému.

2.1.1 Fyzikálny model

Najprv odvodíme rovnice, ktoré platia pre každú z nádrží a ich následným spojením získame model celkového systému [2].

Pre objem v každej nádrži platí

$$\dot{V} = A \cdot \dot{h} = q_{vst} - q_{výst}, \tag{2.1}$$

kde A je obsah dna nádrže,

q_{vst} tok do nádrže,

$q_{výst}$ tok z nádrže.

Riešením Bernoulliho rovnice

$$p + \frac{1}{2}\rho v_w^2 + h\rho g = const.$$

pre povrchovú hladinu (kde $v_w = 0$), a pre spodnú časť nádrže (kde $h = 0$), dostávame výstupný tok z nádrže

$$q_{výst} = a_i \cdot v_w = a_i\sqrt{2gh}, \tag{2.2}$$

kde v_w je rýchlosť vytekajúcej vody z otvoru nádrže.

Spojením výrazov (2.1), (2.2) a tabuľky 2.1 ľahko dostaneme túto sústavu nelineárnych diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned}
\dot{h}_1 &= \frac{1}{A_1}\Big(\overbrace{-a_1\sqrt{2gh_1}}^{q_{výst}} + \overbrace{a_3\sqrt{2gh_3} + \gamma_1 k_1 v_1}^{q_{vst}}\Big),\\
\dot{h}_2 &= \frac{1}{A_2}\left(-a_2\sqrt{2gh_2} + a_4\sqrt{2gh_4} + \gamma_2 k_2 v_2\right),\\
\dot{h}_3 &= \frac{1}{A_3}\left(-a_3\sqrt{2gh_3} + (1-\gamma_2)k_2 v_2\right),\\
\dot{h}_4 &= \frac{1}{A_4}\left(-a_4\sqrt{2gh_4} + (1-\gamma_1)k_1 v_1\right).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

V ustálenom stave pri fixne nastavených ventiloch a napätiach na čerpadlách, sa výška hladín nemení, $\dot{h}_i = 0$ pre každú z nádrží. To znamená, že máme pre 4 rovnice 6 ustálených hodnôt $h_1^0, h_2^0, h_3^0, h_4^0, v_1^0$ a v_2^0. To nám umožňuje zvoliť si 2 hodnoty. Keďže máme riadiť hladiny v prvej a druhej nádrži, vyberieme h_1^0 a h_2^0, a zvyšné dopočítame riešením nasledujúcich rovníc

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{A_1}\left(-a_1\sqrt{2gh_1^0} + a_3\sqrt{2gh_3^0} + \gamma_1 k_1 v_1^0\right),\\
0 &= \frac{1}{A_2}\left(-a_2\sqrt{2gh_2^0} + a_4\sqrt{2gh_4^0} + \gamma_2 k_2 v_2^0\right),\\
0 &= \frac{1}{A_3}\left(-a_3\sqrt{2gh_3^0} + (1-\gamma_2)k_2 v_2^0\right),\\
0 &= \frac{1}{A_4}\left(-a_4\sqrt{2gh_4^0} + (1-\gamma_1)k_1 v_1^0\right).
\end{aligned}$$

Pri vyjadrení $a_3\sqrt{2gh_3^0}$ a $a_4\sqrt{2gh_4^0}$ z posledných dvoch rovníc a dosadením do prvých dvoch, dostávame po jednoduchých úpravách v_1^0 a v_2^0,

$$\begin{bmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 k_1 & (1-\gamma_2)k_2 \\ (1-\gamma_1)k_1 & \gamma_2 k_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a_1\sqrt{2gh_1^0} \\ a_2\sqrt{2gh_2^0} \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Z posledných dvoch rovníc získame h_3^0 a h_4^0,

$$h_3^0 = \left(\frac{(1-\gamma_2)k_2 v_2^0}{a_3\sqrt{2g}}\right)^2, \qquad h_4^0 = \left(\frac{(1-\gamma_1)k_1 v_1^0}{a_4\sqrt{2g}}\right)^2. \tag{2.5}$$

Zavedieme
$h^0 = [h_1^0\ \ h_2^0\ \ h_3^0\ \ h_4^0]^T$, $v^0 = [v_1^0\ \ v_2^0]^T$, $h = [\,h_1\ \ h_2\ \ h_3\ \ h_4]^{\,T}$, $v = [v_1\ \ v_2]^T$, a systém (2.3) ako $\dot{h} = f(h, v)$.

Pre získanie stavových rovníc lineárneho systému

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \tag{2.6}$$

potrebujeme systém (2.3) linearizovať v okolí ustáleného stavu (h^0, v^0). Pre ustálený stav platí $\dot{h} = f(h^0, v^0) \equiv 0$. Matice systému A a B dostaneme použitím Taylorovho rozvoja

$$\dot{x} = \dot{h} \approx \overbrace{f(h^0, v^0)}^{\equiv 0} + \underbrace{\left.\frac{\partial f(h,v)}{\partial h^T}\right|_{h=h^0}}_{A} \cdot \overbrace{(h - h^0)}^{x} + \underbrace{\left.\frac{\partial f(h,v)}{\partial v^T}\right|_{v=v^0}}_{B} \cdot \overbrace{(v - v^0)}^{u},$$

kde $x = [\,x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4]^{\,T}$ a $u = [u_1\ \ u_2]^T$.

x a u predstavujú odchýlky od ustálených hodnôt hladín a napätí na čerpadlách. Výstupnú maticu C určíme jednoducho, lebo výstupom systému sú stavové premenné $x_1 = y_1$ a $x_2 = y_2$. Matice A, B, C, D majú teda tvar

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{A_2 T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_2} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kde časové konštanty

$$T_i = \frac{A_i}{a_i}\sqrt{\frac{2h_i^0}{g}}, \qquad i = 1, \dots, 4.$$

Systém A, B, C je v minimálnej realizácií, pretože je riaditeľný a pozorovateľný, keďže

$$\operatorname{rank} R = \operatorname{rank} P = n,$$

kde $R = [B, AB, A^2B, A^3B]$ je matica riaditeľnosti,

$P = [C, AC, A^2C, A^3C]^T$ je matica pozorovateľnosti,

$n = 4$ je rád systému.

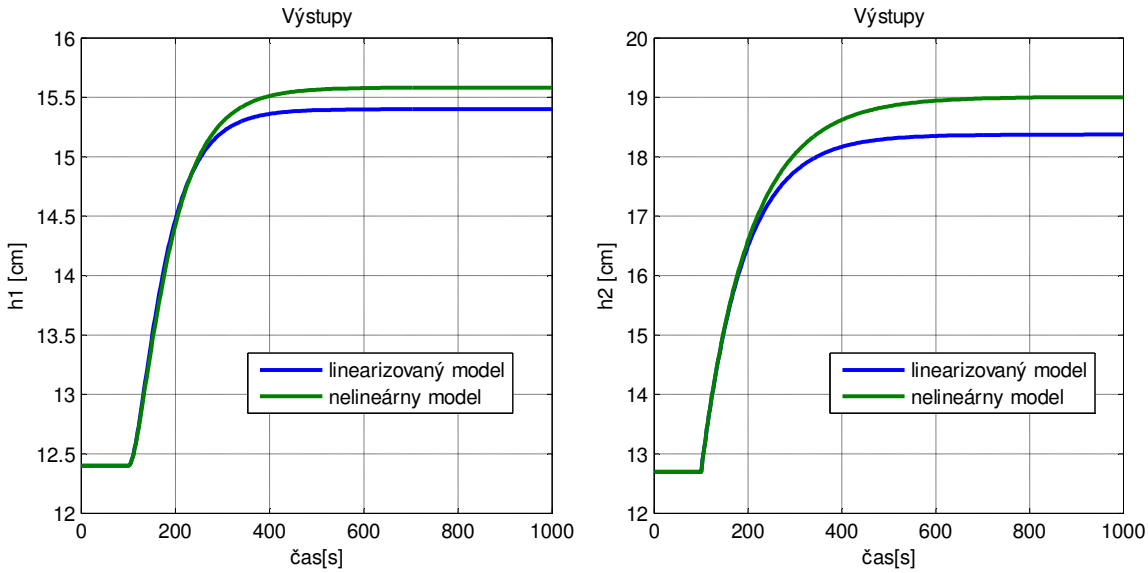
Matica prenosových funkcií

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B,$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 c_1}{1+sT_1} & \frac{(1-\gamma_2)c_1}{(1+sT_3)(1+sT_1)} \\ \frac{(1-\gamma_1)c_2}{(1+sT_4)(1+sT_2)} & \frac{\gamma_2 c_2}{1+sT_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

kde $c_i = \frac{T_i k_i}{A_i}, \qquad i = 1,2.$

Porovnajme teraz model nelineárneho a model linearizovaného systému. Na obrázku 2.2 sú znázornené odozvy linearizovaného a nelineárneho systému na skok na vstupný signál $u = [u_1 \;\; u_2]^T = [0 \;\; 1]^T$ v čase $t = 100$s. Je vidieť, že priebehy výstupov oboch modelov nie sú úplne zhodné. Linearizovaný model však bude pre návrh regulátorov postačujúci.



Obrázok 2.2: Odozvy linearizovaného a nelineárneho modelu.

2.2 Stabilné a nestabilné nuly MIMO systému

Nuly matice prenosových funkcií MIMO systému sú definované ako také komplexné čísla z_i, že hodnosť $G(z_i)$ je nižšia ako hodnosť prenosovej matice systému $G(s)$. Pre štvorcové matice prenosových funkcií MIMO systému môžeme definovať nuly ako komplexné čísla z_i, ktoré vyhovujú podmienke $\det\big(G(z_i)\big) = 0$. Systém nemá nuly, ak je na výstupe priama informácia o všetkých n stavoch systému, teda ak

$$D = 0, \;\; \mathrm{rank}(C) = n.$$

Pre náš systém (2.8) vypočítame

$$\det\big(G(s)\big) = \frac{c_1 c_2 \gamma_1 \gamma_2}{(1+sT_1)(1+sT_2)} - \frac{c_1 c_2 (1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)(1+sT_4)} = 0.$$

Po úprave dostávame

$$T_3 T_4 s^2 + (T_3 + T_4)s + 1 - \eta = 0, \tag{2.9}$$

$$\text{kde } \eta = \frac{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}{\gamma_1 \gamma_2}.$$

Riešením uvedenej kvadratickej rovnice (2.9) získame dve nuly systému. Jedná z núl je vždy umiestnená v stabilnej ľavej polrovine, ale druhá môže byť umiestnená ako v ľavej tak v pravej polrovine, čo závisí len od nastavenia pomerových ventilov $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1)$.

- Ak $\eta < 1$, teda $1 < \gamma_1 + \gamma_2 < 2$, je druhá nula v ľavej polrovine, tak je MIMO systém **minimálne fázový.**
- Ak $\eta > 1$, teda $0 < \gamma_1 + \gamma_2 < 1$, je druhá nula v pravej polrovine, tak je MIMO systém **neminimálne fázový.**

Nuly daného systému, nachádzajúce sa v pravej alebo ľavej polrovine, majú názornú fyzikálnu interpretáciu . Označme tok z čerpadla i ako d_i a nech $d_1 = d_2$. Suma tokov do horných nádrži bude $[2 - (\gamma_1 + \gamma_2)]d_1$ a suma tokov do dolných nádrží bude $(\gamma_1 + \gamma_2)d_1$. Preto ak tok do dolných nádrží je väčší ako do horných tak $1 < \gamma_1 + \gamma_2$, teda systém je minimálne fázový. A ak tok do dolných nádrží je menší ako tok do horných tak je systém neminimálne fázový. To znamená, že ak je väčší tok do dolných nádrží tak je intuitívne ľahšie riadiť výstup y_1 vstupom u_1 a výstup y_2 vstupom u_2, čo bude tiež potvrdené neskôr.

Pre systém nádrží zvolíme dva pracovné body, t. j. nastavíme γ_1, γ_2 a zvolíme h_1^0, h_2^0. Ostatné parametre vypočítame podľa (2.4) a (2.5). γ_1 a γ_2 zvolíme tak, aby bol systém minimálne fázový G_- a neminimálne fázový G_+. Pracovným bodom odpovedá tabuľka 2.3 s hodnotami parametrov.

	G_-	G_+
γ_1, γ_2	$(0.7, 0.6)$	$(0.43, 0.34)$
h_1^0, h_2^0	$(12.4, 12.7)$	$(12.6, 13)$
h_3^0, h_4^0	$(1.59, 1.455)$	$(4.9921, 4.7169)$
v_1^0, v_2^0	$(3.0486, 2.9612)$	$(3.0637, 3.2360)$
k_1, k_2	$(3.33, 3.35)$	$(3.14, 3.29)$
T_1, T_2	$(62.7034, 90.335)$	$(63.207, 91.396)$
T_3, T_4	$(22.467, 30.5775)$	$(39.7853, 55.0533)$
$nuly$	$(-0.0598, -0.0174)$	$(-0.0561, 0.0128)$
$póly$	$(-0.0445, -0.0327, -0.0159, -0.0111)$	$(-0.0251, -0.0182, -0.0158, -0.0109)$

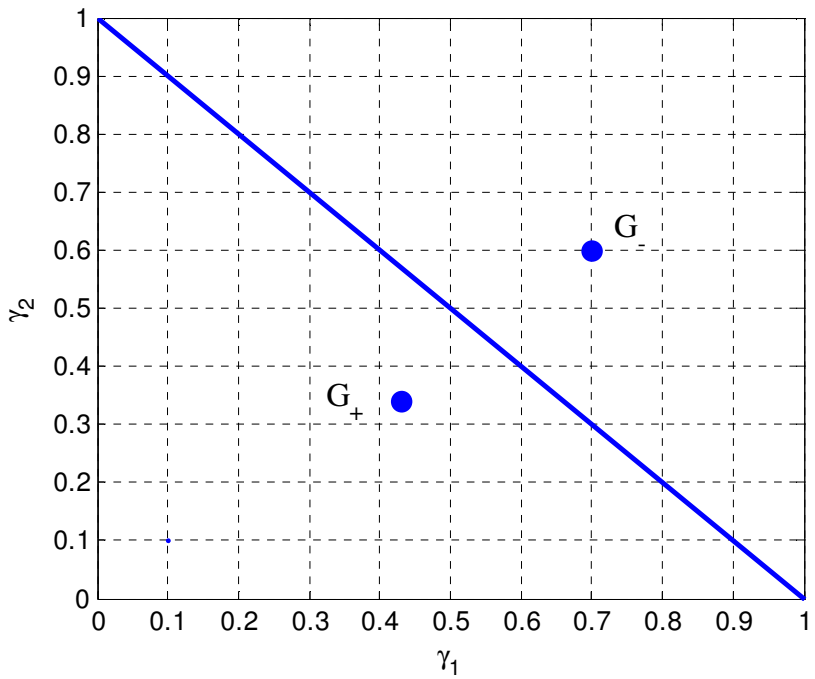
Tabuľka 2.3: Hodnoty parametrov v dvoch nastavených pracovných bodoch.

Nastaveniu podľa tabuľky 2.3 odpovedajú matice prenosov

$$G_-(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{5.22}{1 + 62.7s} & \dfrac{2.98}{(1 + 22.47s)(1 + 62.7s)} \\ \dfrac{2.8371}{(1 + 30.58s)(1 + 90.3s)} & \dfrac{5.67}{1 + 90.3s} \end{bmatrix}, \qquad (2.10)$$

$$G_+(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{3.048}{1+63.2s} & \dfrac{4.68}{(1+39.79s)(1+63.2s)} \\ \dfrac{5.36}{(1+55.05s)(1+91.4s)} & \dfrac{3.195}{1+91.4s} \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Na obrázku 2.3 je možné vidieť pozíciu neminimálne a minimálne fázového systému v závislosti na nastavení ventilov. Spojnici bodov $[1, 0]$ a $[0, 1]$ odpoveda $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$. Oblasti nad spojnicou odpovedá nastaveniu ventilov, kedy je systém minimálne fázový, Oblasti pod spojnicou odpovedá neminimálne fázový systém.



Obrázok 2.3: Systém v závislosti na γ_1 a γ_2.

2.3 Smer nuly MIMO systému

Dôležitým rozdielom medzi skalárnymi systémami a mnohorozmerovými je prítomnosť smerových vektorov núl a pólov u MIMO systémov.

[1] Nech systém $G(s)$ má nulu v $s = z$. Potom $G(s)$ sa zníži hodnosť pre $s = z$, a navyše existujú nenulové vektory u_z a y_z také, že platí

$$G(z)u_z = 0 \cdot y_z, \tag{2.12}$$

kde u_z je definovaný ako **vstupný vektor (smer) nuly** a y_z ako **výstupný vektor (smer) nuly**. Vektory normalizujeme do jednotkovej dĺžky,

$$u_z^H u_z = 1, \;\; y_z^H y_z = 1.$$

Z praktického hľadiska nás viacej zaujíma výstupný smer nuly ako vstupný, lebo y_z nám dáva informáciu, ktorý výstup (kombináciu výstupov) bude ťažké riadiť, kým u_z určuje aký vstup nemá vplyv na výstup [4]. Ak na vstupe bude signál v tvare $u_z e^{zt} 1(t)$, tak mód e^{zt} bude blokovaný systémom a výstup bude $y(t) = 0$.

Použitím Hermiteovského združenia pre výraz (2.12) dostávame $u_z^H G^H(z) = 0 \cdot y_z^H$ a vynásobením u_z zľava a y_z sprava, dostávame $G^H(z) y_z = 0 \cdot u_z$, alebo

$$y_z^H G(z) = 0 \cdot u_z^H.$$

Smer nuly MIMO systému je taký smer v ktorom má matica $G(z)$ nulové zosilnenie [1]. (U MIMO systémov je zosilnenie vyjadrené singulárnymi číslami, dôležitú rolu majú vektory odpovedajúce týmto číslam. Tieto vektory predstavujú smery, v ktorých je zosilnenie dané odpovedajúcim singulárnym číslom. Smery a singulárne čísla získame SVD rozkladom. Podrobnejšie viď [1].)

Smery u_z a y_z môžeme získať teda z SVD rozkladu matice $G(z) = U \Sigma V^H$. Vstupný smer nuly u_z potom bude posledný stĺpec v matici V a výstupný smer nuly y_z bude posledný stĺpec v matici U. Singulárne číslo odpovedajúce smeru nuly bude rovné nule.

V našom príklade štyroch nádrží uvažujme prípad, kedy z je nestabilná nula, určená nastavením ventilov $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1)$ tak, že $0 < \gamma_1 + \gamma_2 < 1$. Pre maticu prenosov (2.8) je výstupný smer nuly daný

$$\begin{bmatrix} y_{z_1} \\ y_{z_2} \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \dfrac{\gamma_1 c_1}{1 + zT_1} & \dfrac{(1-\gamma_2)c_1}{(1+zT_3)(1+zT_1)} \\ \dfrac{(1-\gamma_1)c_2}{(1+zT_4)(1+zT_2)} & \dfrac{\gamma_2 c_2}{1+zT_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^H. \tag{2.13}$$

Riešením (2.13) pre γ_1 bude

$$y_{z_1} \frac{\gamma_1 c_1}{1 + zT_1} + y_{z_2} \frac{(1-\gamma_1)c_2}{(1+zT_4)(1+zT_2)} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\frac{y_{z_1}}{y_{z_2}} = -\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1} \frac{c_2(1+zT_1)}{(1+zT_4)(1+zT_2)}.$$

Z toho vyplýva, že

- pre $\gamma_1 \ll 1$ je nestabilná nula z viazaná viacej na výstup y_1,
- pre $\gamma_1 \cong 1$ je nestabilná nula z viazaná viacej na výstup y_2.

To znamená, že podľa veľkosti γ_1 a γ_2 je tiež možné určiť, ku ktorému výstupu nestabilná nula viacej prislúcha.

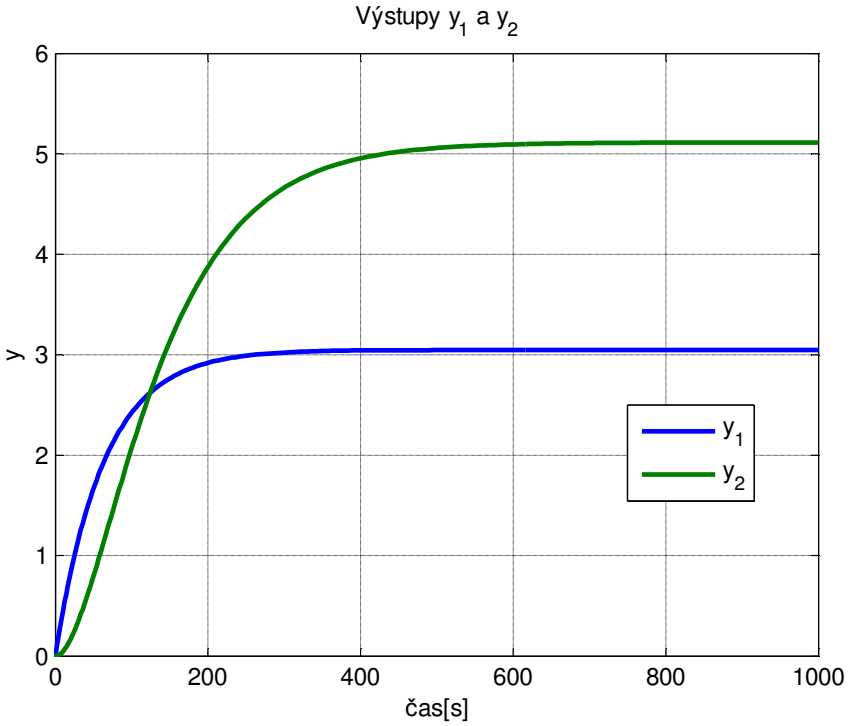
Vezmime teraz konkrétne prípad, keď je systém neminimálne fázový s prenosom podľa (2.10),

$$G_+(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{3.048}{1+63.2s} & \dfrac{4.68}{(1+39.79s)(1+63.2s)} \\ \dfrac{5.36}{(1+55.05s)(1+91.4s)} & \dfrac{3.195}{1+91.4s} \end{bmatrix}.$$

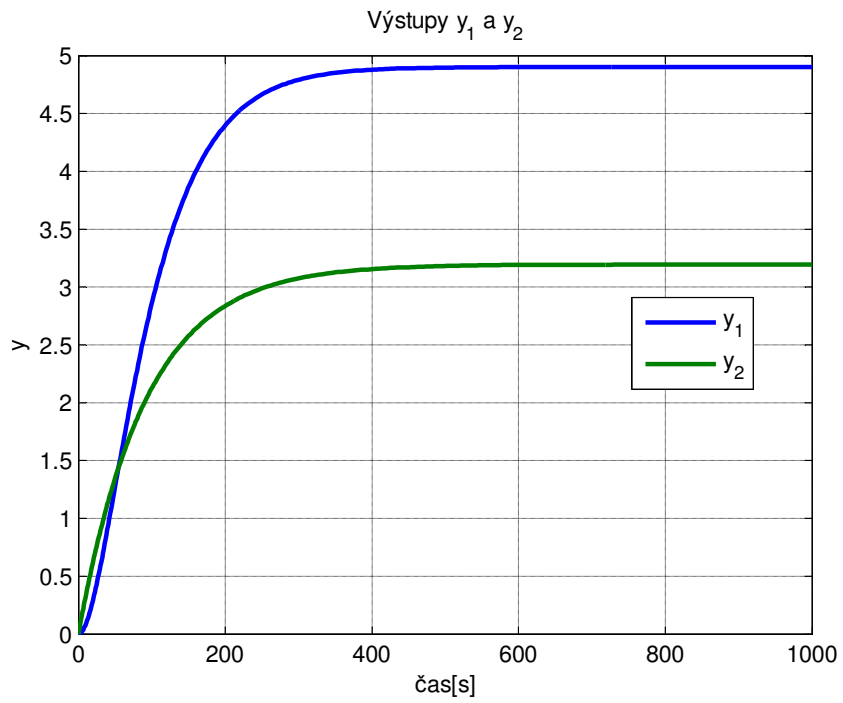
Sústava má nulu $z = 0.0128$ v pravej polrovine. Na obrázku 2.4 je odozva tohto systému, kde vstupom je $u = [u_1 \quad u_2]^T = [1 \quad 0]^T$. Na obrázku 2.5 je odozva systému na vstup $u = [0 \quad 1]^T$. V oboch priebehoch však nie je vidieť podkmit, čo by sme očakávali u neminimálne fázového systému. Vypočítajme teda smer odpovedajúcej nuly pomocou rozkladu SVD

$$G_+(0.0128\,) = \begin{bmatrix} 1.68 & 1.80 \\ 1.38 & 1.47 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.77 & -0.63 \\ -0.63 & 0.77 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.18 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.68 & 0.73 \\ -0.73 & -0.68 \end{bmatrix}.$$

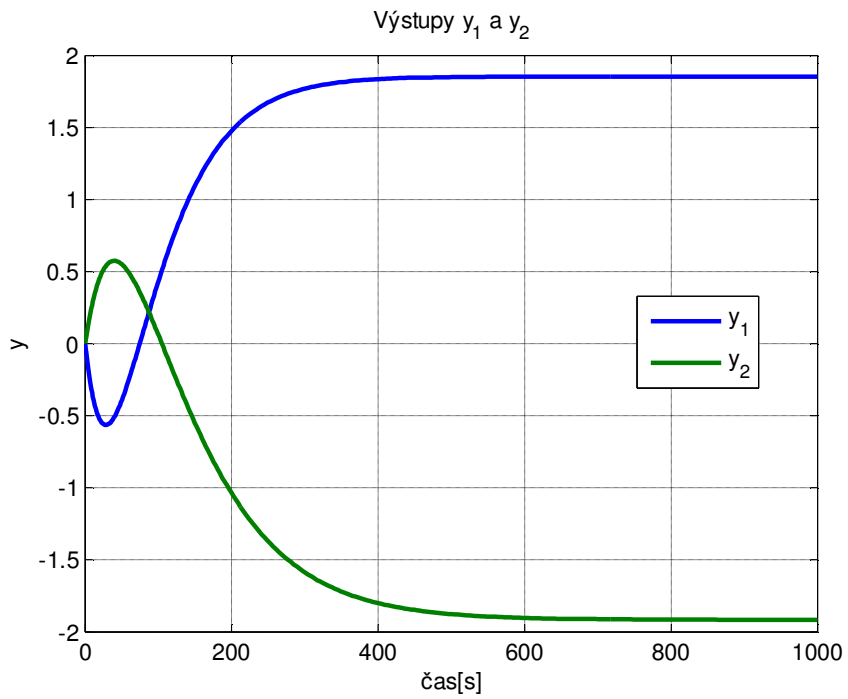
Vstupný smer nuly bude $u_z = \begin{bmatrix} 0.73 \\ -0.68 \end{bmatrix}$ a výstupný smer bude $y_z = \begin{bmatrix} -0.63 \\ 0.77 \end{bmatrix}$, odpovedajúce singulárne číslo $\underline{\sigma}\big(G_+(0.0128\,)\big) = 0$. Nestabilná nula je teda spojená s oboma vstupmi a výstupmi. Ak privedieme na vstup systému signál $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ktorého smer je podobný ako smer nuly), vidíme podľa obrázku 2.6, že podkmit sa objaví u oboch výstupov.



Obrázok 2.4: Odozva sústavy na jednotkový skok na vstupe u_1.



Obrázok 2.5: Odozva sústavy na jednotkový skok na vstupe u_2.



Obrázok 2.6: Odozva sústavy na skok na vstupoch $u_1 = -1$ a $u_2 = 1$.

2.4 Interakcie a RGA

Riadenie MIMO systémov je zložitejšie najmä kvôli interakciám medzi jednotlivými vstupmi a výstupmi. Mieru týchto interakcií môžeme určiť pomocou RGA, tzv. matice relatívnych zosilnení. RGA sa používa ako hlavný nástroj pre určenie párovania vstupov a výstupov MIMO systémov pri návrhu decentralizovaného riadenia. RGA nám teda ukáže, ktoré párovanie vstupov a výstupov bude s najmenšou mierou interakcii, pre následný možný návrh izolovaných regulátorov konkrétne pre tieto vstupy a výstupy.

Nech u_j a y_i bude vstupno – výstupný pár mnohorozmerového systému G a nech je našou úlohou riadenie výstupu y_i vstupom u_j v týchto dvoch extrémnych prípadoch [1]:

- Všetky spätnoväzbové slučky budú otvorené: $u_k = 0, \forall k \neq j$.
- Všetky spätnoväzbové slučky budú uzavreté: $y_k = 0, \forall k \neq i$.

Zosilnenia pre tieto dva extrémne prípady budú:

- Otvorené slučky: $\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j}\right)_{u_k=0,k\neq j} = g_{ij} = [G]_{ij} \quad \Rightarrow \quad y_i = [G(s)]_{ij} u_j$
- Uzavreté slučky: $\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j}\right)_{y_k=0,k\neq i} = \hat{g}_{ij} = 1/[G^{-1}]_{ji} \quad \Rightarrow \quad y_i = \frac{1}{[G^{-1}(s)]_{ji}} u_j$

Pri $m \times m$ MIMO systéme je možný počet párovaní $m!$.

Pomer zosilnení pri otvorených slučkách a uzavretých slučkách vyjadruje mieru interaktívnosti daného párovania u_j a y_i, ij-te relatívne zosilnenie bude

$$\lambda_{ij} = \frac{g_{ij}}{\hat{g}_{ij}} = [G]_{ij}[G^{-1}]_{ji}. \tag{2.14}$$

RGA je matica relatívnych zosilnení, kde súčet prvkov v každom riadku a v každom stĺpci je rovný 1. RGA maticu systému G dostaneme ako

$$\mathrm{RGA}(G) = \Lambda(G) = G \times (G^{-1})^T = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \cdots & \lambda_{mm} \end{bmatrix},$$

kde $\times$ je súčin po prvkoch.

Uvedieme nasledujúcu interpretáciu λ_{ij} [1], [3]:

- Ak je $\lambda_{ij} \cong 1$, tak sú interakcie pre párovanie u_j a y_i minimálne, je to najlepšie párovanie, lebo zosilnenie z u_j na y_i nie je ovplyvnené uzavretím iných slučiek. Odporúčané medze sú ($0.67 > \lambda_{ij} > 1.5$).
- Ak je $\lambda_{ij} < 0$, tak zosilnenie uzavretej slučky má opačné znamienko ako zosilnenie v otvorenej slučke, čo môže viesť k nestabilite pri regulácii.

- Ak je $\lambda_{ij} \gg 1$, typicky 5 – 10 alebo viac, tak je takýto systém ťažšie riadiť, kvôli silným interakciám a citlivosti k neurčitostiam.

Preto je pri párovaní vstupov a výstupov pri návrhu decentralizovaného riadenia doporučené preferovať párovanie, kedy λ_{ij} je blízko 1, a vyhnúť sa situácií kedy je λ_{ij} nulové alebo záporné.

Bolo spomenuté základné vysvetlenie RGA, postačujúce pre náš konkrétny príklad. Vychádzali sme pritom zo statických vlastnosti systému. Pre podrobnejší rozbor tejto problematiky odporúčam [1].

Uvažujme teraz systém nádrží 2×2 v ustálenom stave ($\omega = 0$), kde $y = G \cdot u$ môžeme zapísať ako

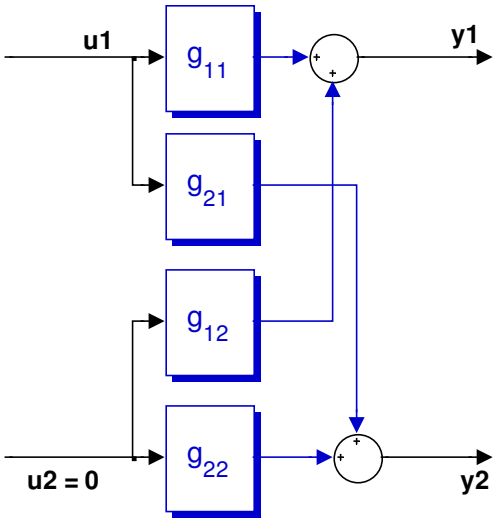
$$y_1 = g_{11}u_1 + g_{12}u_2, \tag{2.15}$$

$$y_2 = g_{21}u_1 + g_{22}u_2. \tag{2.16}$$

Predpokladajme špeciálny prípad, keď bude druhá spätnoväzbová slučka (medzi $y_2 - u_2$) otvorená tak, že

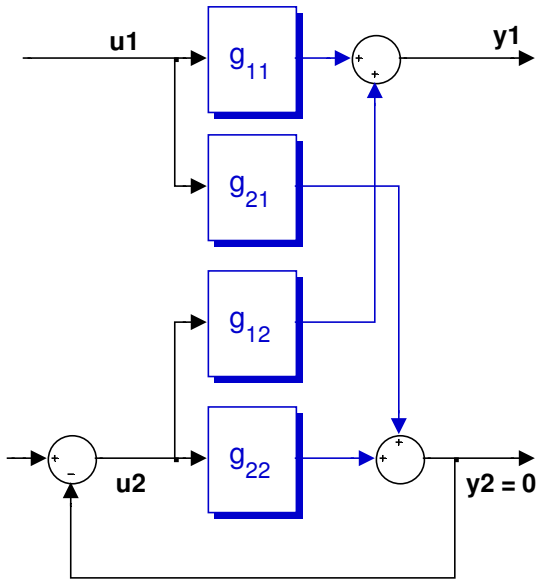
$$u_2 = 0: \quad y_1 = g_{11}u_1.$$

Situáciu ilustruje obrázok 2.7.



Obrázok 2.7: Systém s otvorenými slučkami.

Ďalej uvažujme prípad uzavretej druhej slučky a $y_2 = 0$. V tomto prípade keď zmeníme u_1 tak sa zmení aj u_2, kvôli interakciám, keďže je uzavretá spätnoväzbová slučka $u_2 - y_2$. Viď obrázok 2.8.



Obrázok 2.8: Systém s uzavretou druhou slučkou.

Pre podmienku $y_2 = 0$ z (2.16) dostávame

$$u_2 = -\frac{g_{21}}{g_{22}} u_1,$$

a dosadením do (2.15) máme

$$y_2 = 0: \quad y_1 = \underbrace{\left(g_{11} - \frac{g_{21}}{g_{22}} g_{12}\right)}_{= \hat{g}_{11}} u_1.$$

To znamená, že naše zosilnenie sa zmení z g_{11} na $\hat{g}_{11}$, keď uzavrieme druhú slučku. Relatívne zosilnenie teda bude pre ustálený stav ($\omega = 0$)

$$\lambda_{11} = \frac{g_{11}}{\hat{g}_{11}} = \frac{g_{11}(0) g_{22}(0)}{g_{11}(0) g_{22}(0) - g_{12}(0) g_{21}(0)}. \tag{2.17}$$

Matica relatívnych zosilnení

$$\Lambda(G) = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix}.$$

Ako sme už uviedli, tak riadkový a stĺpcový súčet je 1. Takže môžeme zapísať $\lambda_{11} = \lambda$, $\lambda_{12} = 1 - \lambda$, $\lambda_{21} = 1 - \lambda$, $\lambda_{22} = \lambda$, teda

$$\Lambda(G) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & \lambda \end{bmatrix}.$$

S použitím (2.8) a (2.17) bude λ vyjadrené ako

$$\lambda = \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}. \tag{2.18}$$

Všimnime si, že RGA je závislé len od nastavenia pomerových ventilov.

Majme systém štyroch nádrží daný rovnicou

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Ak je nastavenie ventilov $0 \leq \gamma_1 + \gamma_2 < 1$ (systém je neminimálne fázový), z (2.18) plynie $\lambda \leq 0$, čo naznačuje, že párovanie $u_1 - y_1$ a $u_2 - y_2$ nie je vhodné. Bude preto potrebné zmeniť vstupno výstupné párovanie. Uvažujme teda systém $\tilde{G}$, ktorý vznikne vymenením výstupov y_1 a y_2, zámenou riadkov systému G,

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} g_{21} & g_{22} \\ g_{11} & g_{12} \end{bmatrix}.$$

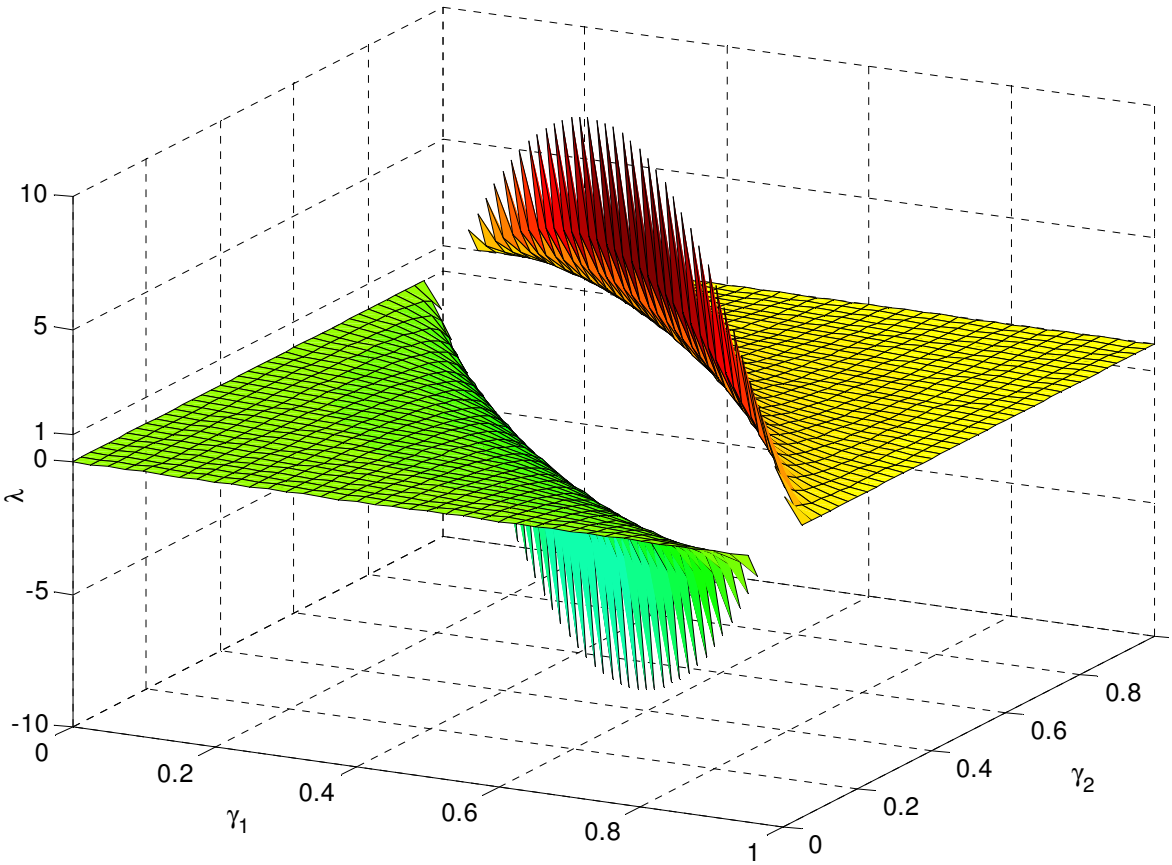
RGA pre tento systém bude dané

$$\tilde{\lambda} = \frac{(1-\gamma_1) \cdot (1-\gamma_2)}{1-\gamma_1-\gamma_2} = 1 - \lambda. \tag{2.19}$$

V tejto situácií pre $0 \leq \gamma_1 + \gamma_2 < 1$ (systém je neminimálne fázový) bude $\tilde{\lambda} \geq 1$. To znamená, že v prípade neminimálne fázového systému je vhodné pri návrhu decentralizovaného riadenia riadiť vstupom u_1 výstup y_2 a vstupom u_2 výstup y_1.

Ak je nastavenie ventilov $1 < \gamma_1 + \gamma_2 \leq 2$ (systém je minimálne fázový), tak po dosadení γ_1 a γ_2 do (2.19), bude $\tilde{\lambda} \leq 0$. Z toho vyplýva, že párovanie $u_2 - y_1$ a $u_1 - y_2$ nie je vhodné. Pri dosadení γ_1 a γ_2 do (2.18), bude $\lambda \geq 1$. To znamená, že v tomto prípade je pre minimálne fázový systém pri návrhu decentralizovaného riadenia vhodné párovanie $u_1 - y_1$ a $u_2 - y_2$. Na obrázku 2.9 je názorne zobrazenie závislosti (2.18), t.j. λ na nastavení ventilov γ_1 a γ_2. Zo závislosti je zrejmé, že $\lambda \geq 1$ keď $1 < \gamma_1 + \gamma_2 \leq 2$ (žltá oblasť). V oblasti $0 \leq \gamma_1 + \gamma_2 < 1$ bude $\lambda \leq 0$ (zelená oblasť).

Z uvedeného zobrazenia 2.9 vyplýva, že systém bude ťažšie riadiť, keď bude nastavenie ventilov $\gamma_1 + \gamma_2 \doteq 1$, kedy $\lambda \gg 1$ alebo $\lambda < 0$. Tejto situácii odpovedá stav, kedy celkový tok do ľavých nádrží (nádrž 1 a 3) bude rovný celkovému toku do pravých nádrží (nádrž 2 a 4). V tomto prípade bude mať systém jednu z núl v počiatku, t.j. $z = 0$, čo vyplýva z riešenia rovnice (2.9). Ďalší rozbor RGA a jeho použitie si ukážeme v nasledujúcej kapitole 3.1 pri návrhu decentralizovaného riadenia.



Obrázok 2.9: Závislosť λ na γ_1 a γ_2.

3 Návrh regulátorov pre minimálne fázový systém

V predchádzajúcich častiach sme uviedli niektoré základné vlastnosti MIMO systému štyroch nádrží, ktoré sú nevyhnutné pre návrh regulátorov. V kapitole 2.2 sme ukázali, že systém môže mať nulu v pravej nestabilnej polrovine, kedy sa stáva neminimálne fázový. Neminimálne fázový systém má odlišnosti a obmedzenia pri návrhu regulátorov oproti systému minimálne fázovému. Preto bude návrh regulátorov rozdelený na návrh pre minimálne fázový systém, ktorý bude popísaný v tejto kapitole, a neminimálne fázový systém, ktorý uvedieme v ďalšej kapitole 4.

V prvých dvoch podkapitolách sa budeme venovať návrhu decentralizovaného riadenia PI regulátorom a návrhu centralizovaného riadenia LQ regulátorom. V tretej podkapitole uvedieme spôsob návrhu regulátorov s elimináciou interakcií.

3.1 Decentralizovaný PI regulátor

Decentralizované riadenie je také spätnoväzbové riadenie, kedy navrhujeme regulátory zvlášť pre jednotlivé páry vstupov a výstupov. Párovanie vstupov a výstupov určujeme spravidla podľa RGA.

Regulátory budeme navrhovať pre linearizovaný minimálne fázový systém v pracovnom bode zvolenom v kapitole 2.2, pri nastavení parametrov podľa tabuľky 2.3. Matica prenosových funkcií tohto systému je

$$G_{-}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{5.22}{1+62.7s} & \dfrac{2.98}{(1+22.47s)(1+62.7s)} \\ \dfrac{2.8371}{(1+30.58s)(1+90.3s)} & \dfrac{5.67}{1+90.3s} \end{bmatrix}.$$

Vypočítajme teraz RGA podľa (2.18) pre náš systém G_{-} s nastavením pomerových ventilov $\gamma_1 = 0.7$ a $\gamma_2 = 0.6$,

$$\lambda = \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} = 1.4,$$

$$\Lambda(G_-) = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 & -0.4 \\ -0.4 & 1.4 \end{bmatrix}.$$

Z toho vyplýva, že párovanie bude $u_1 - y_1$ a $u_2 - y_2$, lebo λ je kladné a blízko 1. Výber párovania s týmto výsledkom bol tiež ukázaný pre tento prípad štyroch nádrží všeobecne aj na konci kapitoly 2.4.

Regulátory navrhneme len pre diagonálne prenosy $g_{11}(s)$ a $g_{22}(s)$ matice prenosov. Prenosy $g_{12}(s)$ a $g_{21}(s)$ budeme ignorovať. Situáciu ilustruje schéma na obrázku 3.1. V podstate budeme mať diagonálnu štruktúru regulátorov $C(s) = \mathrm{diag}\{C_1(s), C_2(s)\}$, t.j. regulátor $C_1(s)$ bude zapojený medzi dvojicu $u_1 - y_1$ a $C_2(s)$ medzi dvojicu $u_2 - y_2$.

Zostáva nám teda navrhnúť dva regulátory pre dva SISO systémy prvého rádu. Regulátor navrhneme pre systém

$$g_{kk}(s) = \frac{\gamma_k c_k}{1 + sT_k}, \quad k = 1,2.$$

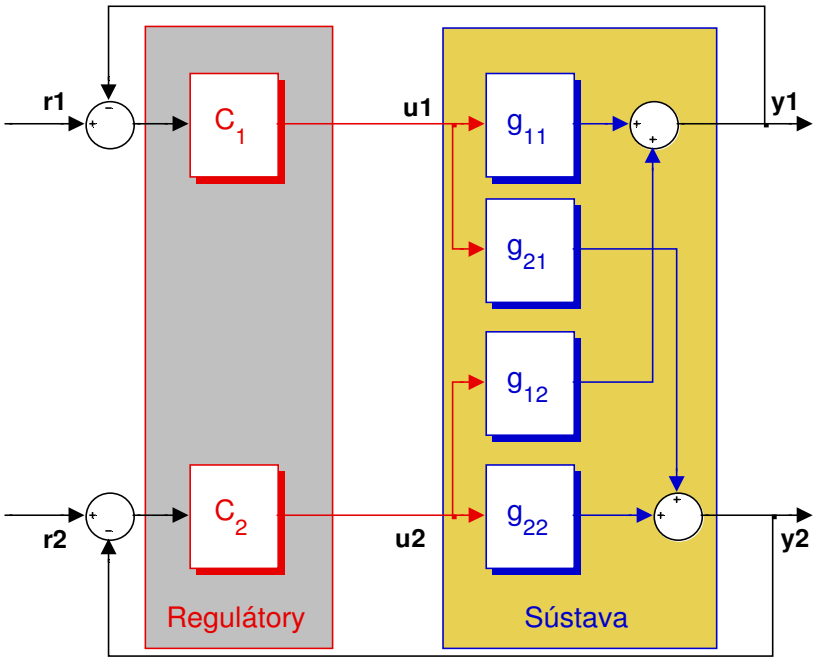
PI regulátor ma tvar

$$C_k(s) = k_{p_k}\left(1 + \frac{1}{T_{i_k}.s}\right), \quad k = 1,2.$$

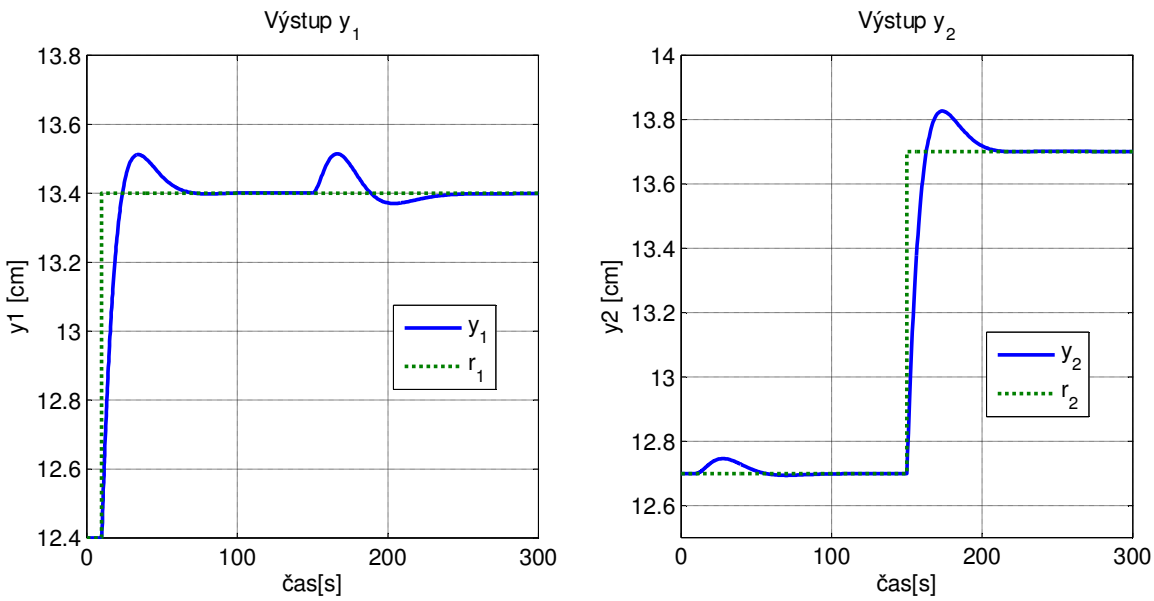
Regulátory určíme metódou umiestnenia pólov charakteristického polynómu uzavretej slučky [8]. Ak zvolíme dobu ustálenia $t_s < 60\mathrm{s}$ a prekmit $OS < 1\%$ potom dostaneme regulátory

$$C_1(s) = 1.65\left(1 + \frac{1}{15.95s}\right), \quad C_2(s) = 2.26\left(1 + \frac{1}{16.5s}\right).$$

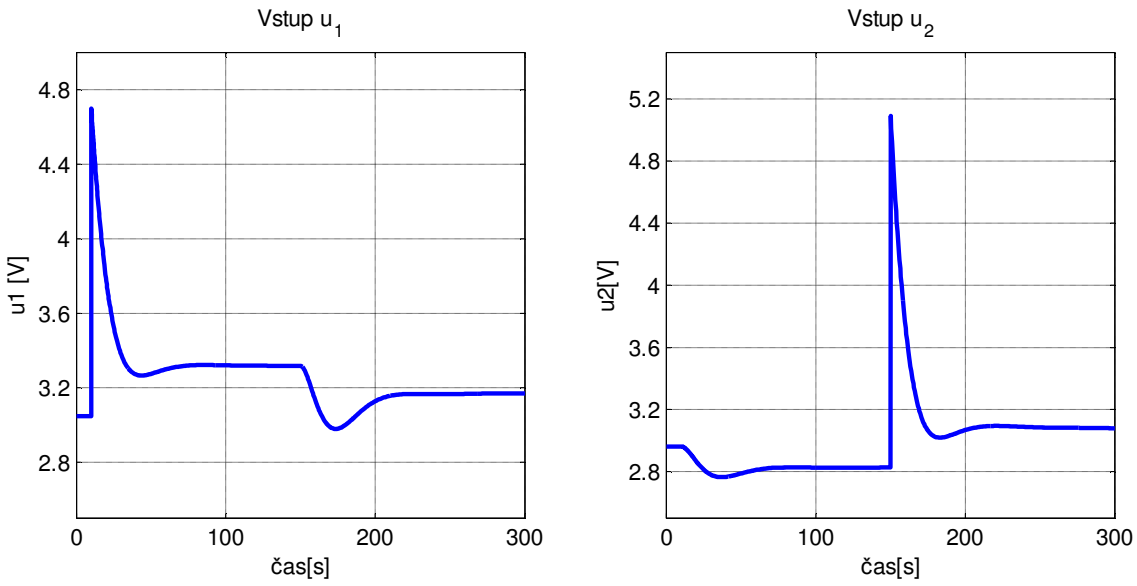
Na obrázku 3.1 je znázornená Simulinková schéma zapojenia minimálne fázového systému s PI regulátormi. A na obrázku 3.2 je odozva systému s PI regulátormi na jednotkový skok v referenčnom signáli r_1 v čase $10\mathrm{s}$ (vľavo) a na jednotkový skok v r_2 v čase $150\mathrm{s}$ (vpravo). Je vidieť, že zmena r_1 má vplyv na výstup y_2 a r_2 ovplyvňuje y_1. Na obrázku 3.3 je odpovedajúci akčný zásah regulátorov na vstupoch u_1 (vľavo) a u_2 (vpravo). Prípustné napätie na čerpadlách je do $10\mathrm{V}$, čo je splnené



Obrázok 3.1: Simulinková schéma decentralizovaného riadenia s PI regulátorom



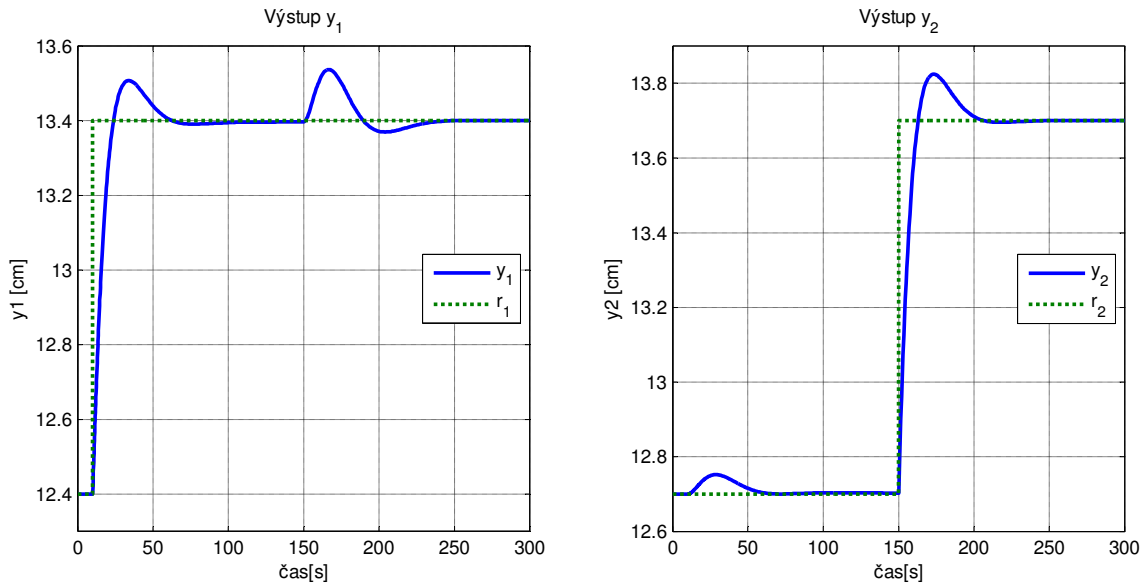
Obrázok 3.2: Odozva systému s PI regulátorom



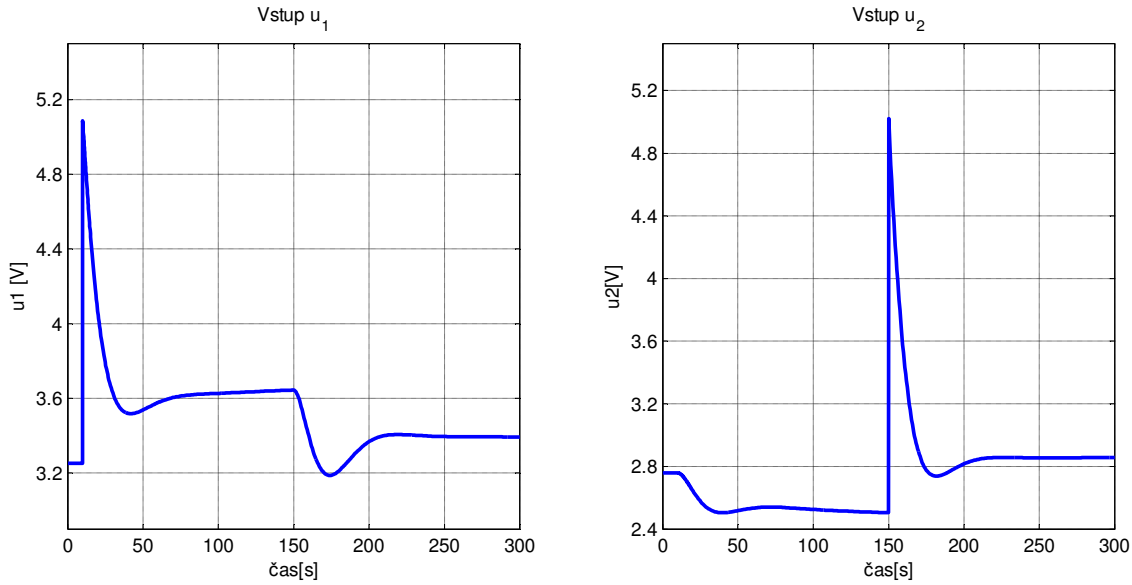
Obrázok 3.3: Akčný zásah na vstupoch

Uviedli sme návrh decentralizovaného PI regulátora pre systém štyroch nádrží s nastavením pomerových ventilov $\gamma_1 = 0.7$ a $\gamma_2 = 0.6$.

Skúmajme teraz prípad, ak by nastala chyba na pomerových ventiloch, a ich hodnota by sa zmenila o 10% na $\gamma_1 = 0.63$ a $\gamma_2 = 0.54$. Odozva tohto systému s vyššie navrhnutými regulátormi na jednotkový skok je na obrázku 3.4 a odpovedajúci priebeh na vstupe do systému je na obrázku 3.5 Ako je vidieť, tak nenastala veľká zmena v týchto priebehoch v porovnaní z predchádzajúcimi priebehmi. To znamená, že riadiaci systém je v tomto prípade dostatočne robustný.



Obrázok 3.4: Odozva systému s PI regulátorom



Obrázok 3.5: Akčný zásah na vstupoch

3.2 LQ regulátor

Návrh LQ regulátorov je jedna z najrozšírenejších metód stavového riadenia. LQ reguláciu MIMO systémov budeme považovať za centralizovaný typ riadenia, lebo regulátor navrhujeme pre systém ako celok. Predpokladom LQ regulácie sú všetky známe stavy systému. Uvažujme systém

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

s nenulovým počiatočným stavom x(0). Základnou myšlienkou kvadratický optimálnej regulácie je optimálny prechod z daného stavu x(0) do počiatku. [1] Návrh riadenia teda spočíva v minimalizácii kritéria

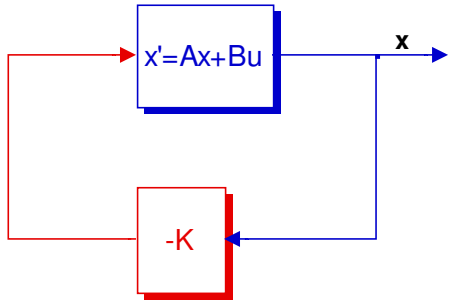
$$J = \int_0^\infty (x^T \cdot Q \cdot x + u^T \cdot R \cdot u)\, dt.$$

Optimálnym riešením je $u = -K \cdot x$, kde $K = R^{-1}B^T X$ a $X = X^T \geq 0$ je pozitívne semidefinitné riešenie algebrickej Riccatiho rovnice

$$A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X + Q = 0.$$

Všetky stabilizujúce regulátory sú parametrizované váhovými maticami Q a R. Q je pozitívne semidefinitna matica a R je pozitívne definitná matica.

Obrázok 3.6 znázorňuje stavovú spätnú väzbu vedenú cez maticu zosilnenia K na vstup.



Obrázok 3.6: Stavová spätná väzba

Takto navrhnutý regulátor bude proporcionálny vzhľadom k stavom. V našom prípade však bude potrebné, aby regulátor mal aj integračnú zložku aby sme zaistili nulovú ustálenú odchýlku na skok referenčného signálu.

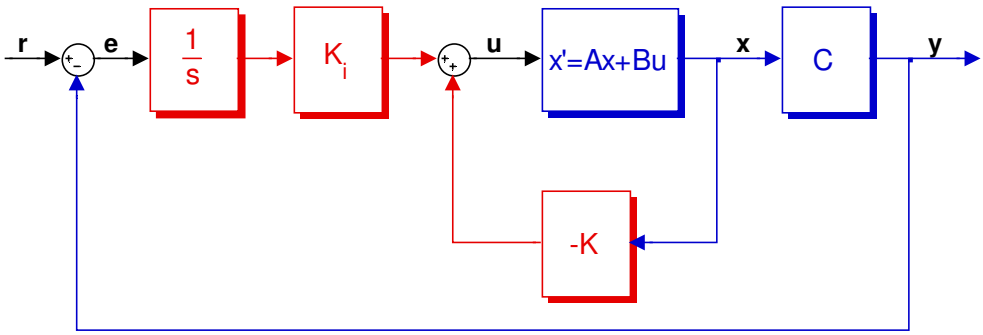
Pre systém štyroch nádrží teda navrhneme LQ reguláciu s proporcionálnou a integračnou časťou.

Uvažujme model systému

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = Cx,$$

kde matice A, B, C budú dané podľa (2.7), pre parametre nastavené podľa tabuľky 2.3 pre minimálne fázový systém. Do modelu systému medzi stavy pridáme integrál regulačnej odchýlky [8]. Integrátor teda zapojíme paralelne k stavovému regulátoru. Situácia je zobrazená na obrázku 3.7.



Obrázok 3.7: LQ regulátor s integračnou zložkou

Pridanie integračného stavu urobíme nasledovne. Zavedieme nový integračný stav x_i, ktorý bude rovný integrálu regulačnej odchýlky a tým pádom

$$\dot{x}_i = -Cx + r.$$

Rozšírime rovnice stavového popisu o stav x_i a dostávame

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r,$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}.$$

Kde nové matice systému s rozšíreným stavom budú

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix},$$

a spätnoväzbové zosilnenie ktoré hľadáme bude

$$\hat{K} = (K \quad -K_i),$$

kde zosilnenie integrátoru bude matica zosilnenia K_i odpovedajúca novým stavom.

Matice Q a R zvolíme nasledovne: $Q = \mathrm{diag}\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$ a $R = \mathrm{diag}\{r_1,\ r_2\}$. Q má 6 prvkov, prvým štyrom odpovedajú štyri stavy systému nádrží, a posledným dvom odpovedajú nové stavy. R má dva prvky, lebo máme dva vstupy.

- Nastavením prvkov q_k matice Q určujeme ako by mali byť odchýlky stavov potlačované. Pri veľkom q_k sú odchýlky od ustáleného stavu silne potlačované. Pri $q_k = 0$ nám nezáleží na zmenách daného stavu.

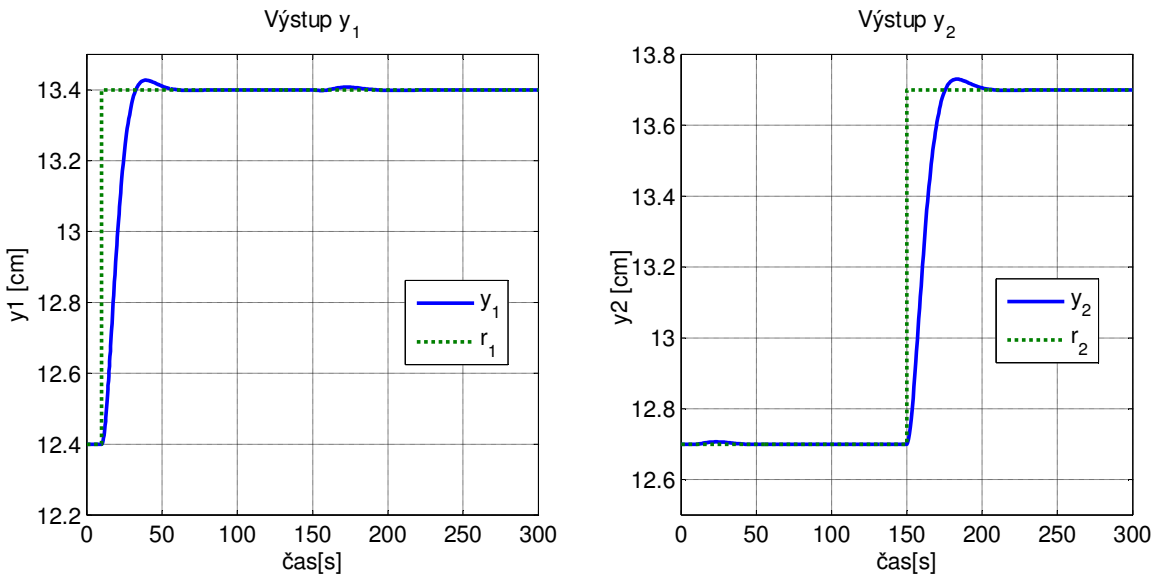
- Nastavením prvkov r_k matice R vážime množstvo energie aké môže byť použite na vstupe na riadenie. Ak je r_k veľké, tak sa použije menej energie na odpovedajúcom vstupe k. Ak je r_k malé, tak je možné vynaložiť viacej energie na riadenie na vstupe k. $r_k = 0$ nie je povolené, lebo regulátor by využíval nekonečne veľkú energiu na vstupe.

Pri návrhu regulátora je potrebné vhodne zvoliť parametre Q a R. V našom prípade boli zvolené hodnoty $Q = \mathrm{diag}(1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0.1\ \ 0.1)$ a $R = \mathrm{diag}(0.3\ \ 0.3)$. Výpočet zosilnenia $\hat{K}$ bol uskutočnený pomocou funkcie Matlabu ‘$\mathrm{lqr}(\hat{A}, \hat{B}, Q, R)$’ s výsledkom

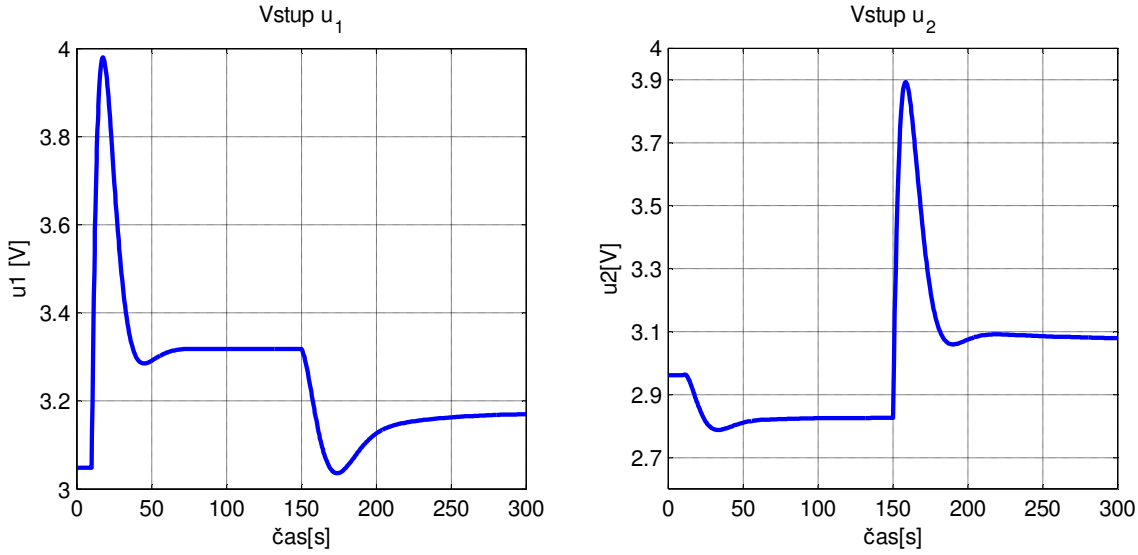
$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 2.7421 & -0.092 & 0.4966 & -0.02 & -0.316 & 0.0063 \\ 0.03 & 3.15 & -0.0089 & 0.495 & -0.0063 & -0.316 \end{bmatrix},$$

kde prvé štyri stĺpce sú zosilnenie K a posledné dva stĺpce sú zosilnenie $-K_i$.

Na obrázku 3.8 je znázornená odozva systému v ustálenom stave na jednotkový skok referencie r_1 v čase $10\mathrm{s}$ a na jednotkový skok r_2 v čase $150\mathrm{s}$. Na obrázku 3.9 je odpovedajúci akčný zásah na vstupoch u_1 a u_2 .

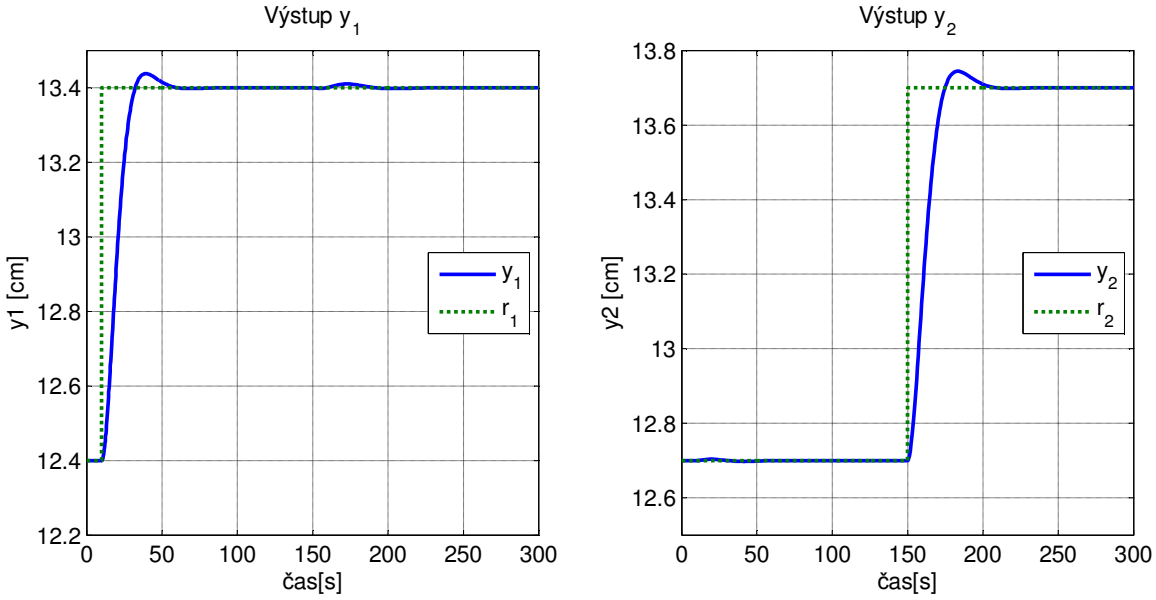


Obrázok 3.8: Odozva systému s LQ regulátorom.

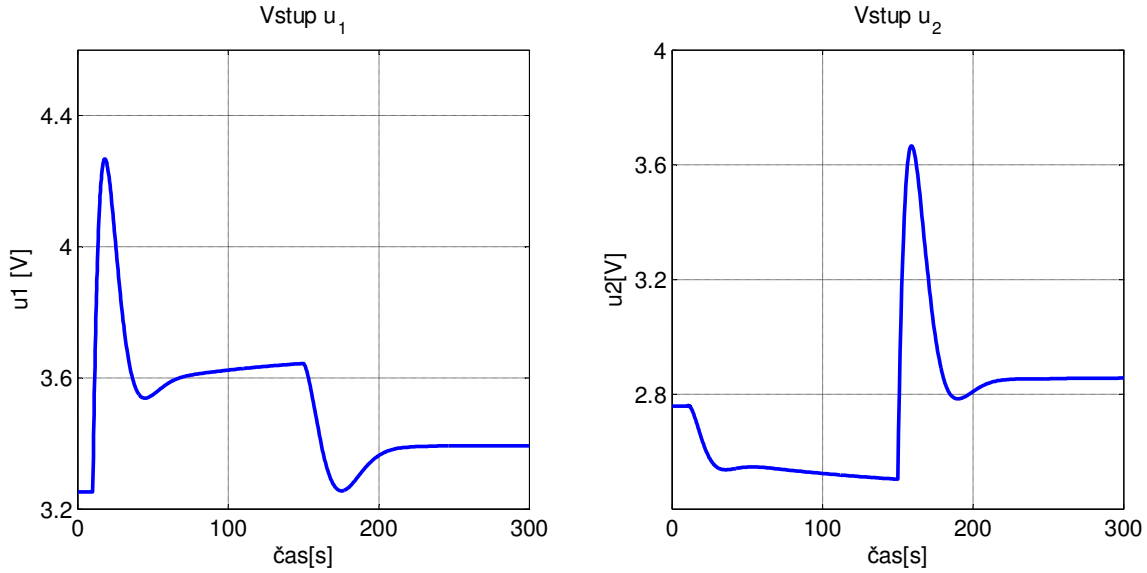


Obrázok 3.9: Akčný zásah na vstupoch.

Z vyššie uvedených priebehov je zrejmé, že interakcie sú takmer úplne potlačené v porovnaní s decentralizovaným PI regulátorom z predchádzajúcej časti. Veľkosť akčného zásahu je v tomto prípade tiež menšia a doba ustálenia takmer dvojnásobne rýchlejšia. V prípade zmeny nastavenia ventilov, napríklad v dôsledku chyby, na hodnoty $\gamma_1 = 0.63$ a $\gamma_2 = 0.54$, bude nami navrhnutý regulátor dostatočne robustný a táto zmena v parametroch takmer nezmení priebeh na výstupe sústavy. Na obrázku 3.10 je priebeh výstupov sústavy s takto nastavenými ventilmi. Odpovedajúci vstupný signál je zobrazený na obrázku 3.11.



Obrázok 3.10: Odozva systému s LQ regulátorom.



Obrázok 3.11: Akčný zásah na vstupoch.

3.3 Návrh regulátorov s elimináciou interakcií

V tejto kapitole uvedieme návrh rozväzbujúcich regulátorov, ktoré s daným minimálne fázovým systémom vytvoria systém s diagonálnou maticou prenosových funkcií, čím budú odstránené nediagonálne prvky prenosovej matice, a tým pádom interakcie.

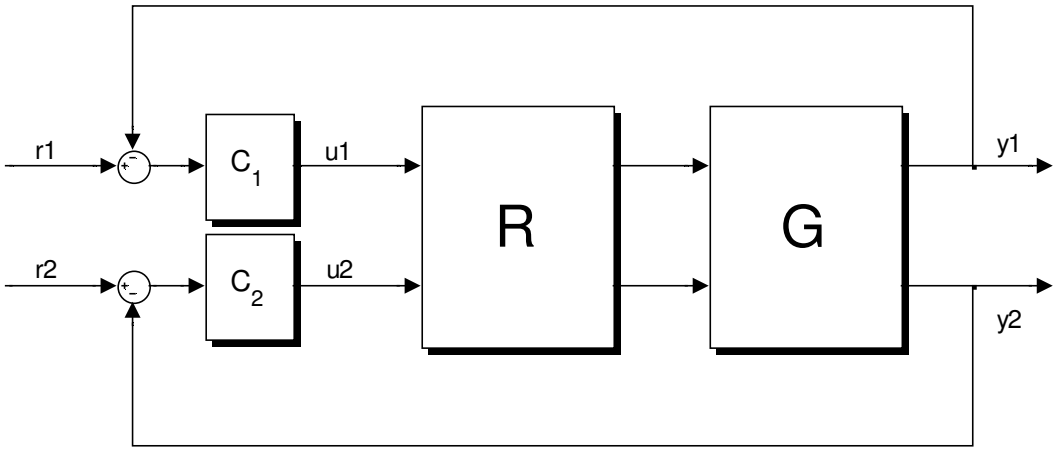
Budú ukázané 2 prístupy [3]:

- Návrh dynamického rozväzbovacieho regulátora.
- Návrh stavového rozväzbovacieho regulátora.

V prvom prípade budeme vychádzať z vonkajšieho popisu systému a v druhom prípade z vnútorného popisu.

3.3.1 Dynamický rozväzbovací regulátor

V časti 3.1 sme navrhovali decentralizované regulátory len izolovane pre diagonálne prvky prenosovej matice systému. Nediagonálne prenosy $g_{12}(s)$ a $g_{21}(s)$ sme nebrali v úvahu, preto sme na výstupe systému mohli pozorovať interakcie (obrázok 3.2), alebo tzv. väzby medzi $u_1 - y_2$ a $u_2 - y_1$. V tejto kapitole ukážeme ako navrhnúť rozväzbujúci kompenzátor $R(s)$, ktorým dosiahneme diagonálnu maticu prenosov riadeného systému. Dôjde k tzv. rozväzbeniu (angl. decoupling) MIMO systému. Na obrázku 3.12 je schematické znázornenie tejto situácie.



Obrázok 3.12: Dynamický rozväzbujúci regulátor

Najčastejší prístup pri návrhu tohto typu regulácie spočíva v troch krokoch:

- Výber vhodného párovania vstupov a výstupov podľa RGA.
- Návrh kompenzátora R.
- Návrh regulátora C.

Slučkové regulátory C_1 a C_2 sú reprezentované diagonálnou maticou $C = \mathrm{diag}\{C_1,\ C_2\}$. Párovanie bolo pre minimálne fázový systém zvolené v predchádzajúcich častiach, preto sa budeme teraz venovať návrhu kompenzátora R.

[3] Budeme požadovať, aby prenosová funkcia

$$F(s) = G(s)R(s) = D(s),$$

kde bude vhodne zvolená diagonálna matica prenosových funkcií

$$D(s) = \mathrm{diag}\{d_{11},\ d_{22}\}.$$

Prenosová matica rozväzbovacieho kompenzátora $R(s)$ by mohla byť určená ako

$$R(s) = G(s)^{-1}D(s) = \frac{\mathrm{adj}\, G(s)}{\det G(s)} D(s). \tag{3.1}$$

Rozväzbujúci kompenzátor však musí byť realizovateľný a musia byť špecifikované nejaké podmienky na $F(s)$ a teda aj na $D(s)$.

Pre (3.1) môžeme zvoliť

$$D(s) = \det G(s) \cdot I,$$

čo vedie na rozväzbovací kompenzátor

$$R(s) = G(s)^{-1}D(s) = \frac{\mathrm{adj}\, G(s)}{\det G(s)} \cdot \det G(s) \cdot I = \mathrm{adj}\, G(s) = \begin{bmatrix} g_{22}(s) & -g_{12}(s) \\ -g_{21}(s) & g_{11}(s) \end{bmatrix}.$$

Tento kompenzátor je realizovateľný, ale slučkové regulátory by museli byť navrhnuté pre systém vyššieho rádu s maticou prenosov

$$D(s) = \det G(s) \cdot I = \\ = \begin{bmatrix} g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)g_{21}(s) & 0 \\ 0 & g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)g_{21}(s) \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Preto musíme najprv zvoliť tvar diagonálnej matice $D(s)$ vo vhodnejšom tvare, kedy sa nebude zvyšovať rád systému. Takže nech bude

$$D(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & 0 \\ 0 & g_{22}(s) \end{bmatrix}.$$

Teraz určíme podľa (3.1) maticu prenosových funkcií $R(s)$ rozväzbovacieho kompenzátora, ktorý by mal požadovanú diagonalitu zaručiť,

$$R(s) = \begin{bmatrix} r_{11}(s) & \mathrm{r}_{12}(s) \\ r_{21}(s) & r_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g_{11}(s) & 0 \\ 0 & g_{22}(s) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} g_{22}(s) & -g_{12}(s) \\ -g_{21}(s) & g_{11}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{11}(s) & 0 \\ 0 & g_{22}(s) \end{bmatrix}}{g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)g_{21}(s)} = \frac{\begin{bmatrix} g_{11}(s)g_{22}(s) & -g_{12}(s)g_{22}(s) \\ -g_{21}(s)g_{11}(s) & g_{11}(s)g_{22}(s) \end{bmatrix}}{g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)g_{21}(s)}.$$

Z toho dostávame

$$r_{11}(s) = r_{22}(s) = \frac{g_{11}(s)g_{22}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)g_{21}(s)} = \frac{1}{1 - K(s)} = \bar{K}^{-1}(s),$$

$$r_{12}(s) = -\frac{g_{12}(s)g_{22}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)g_{21}(s)} = \frac{1}{1 - K(s)} \cdot \frac{g_{12}(s)}{g_{11}(s)} = -\bar{K}^{-1}(s)\frac{g_{12}(s)}{g_{11}(s)},$$

$$r_{21}(s) = -\frac{g_{21}(s)g_{11}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)-g_{12}(s)g_{21}(s)} = \frac{1}{1-K(s)} \cdot \frac{g_{21}(s)}{g_{22}(s)} = -\overline{K}^{-1}(s)\frac{g_{21}(s)}{g_{22}(s)},$$

kde $K(s) = \dfrac{g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{22}(s)g_{21}(s)}$ je väzbový činiteľ a $\overline{K}(s)=1-K(s)$.

Ak má byť kompenzátor $R(s)$ realizovateľný, tak musia byť realizovateľné prenosy

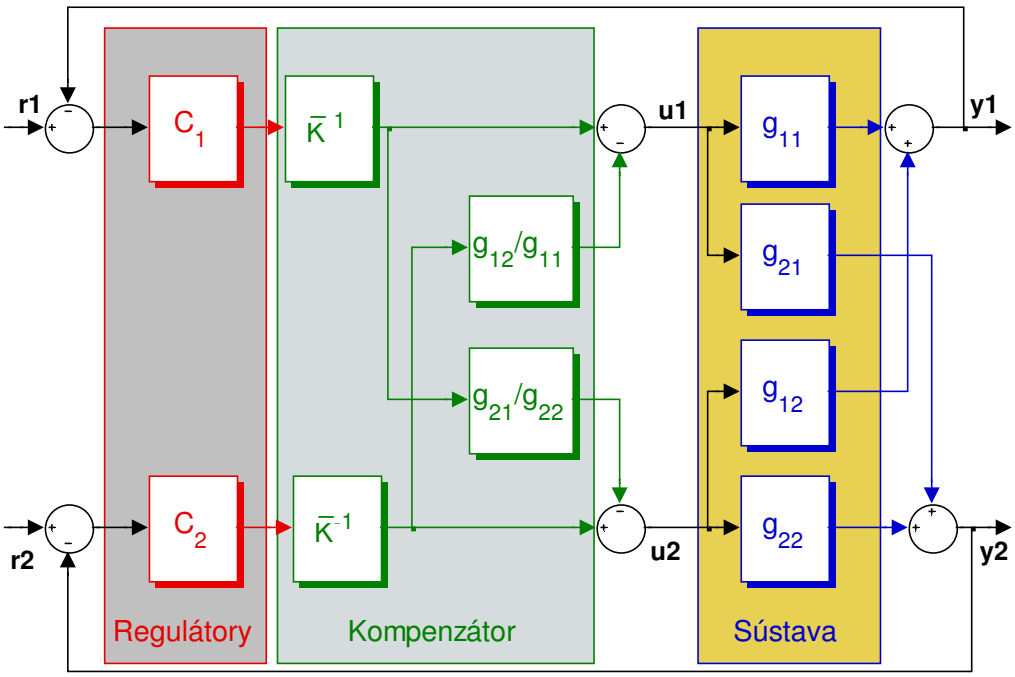
$$\overline{K}^{-1}(s), \quad \frac{g_{12}(s)}{g_{11}(s)} \quad \text{a} \quad \frac{g_{21}(s)}{g_{22}(s)}.$$

Podrobnejším rozborom týchto prenosov, dostaneme podmienku realizovateľnosti dynamického rozväzbovacieho kompenzátora pre 2×2 MIMO systém [3],

$$\deg\big(a_{11}(s) \cdot a_{22}(s) \cdot b_{12}(s) \cdot b_{21}(s)\big) \geq \deg\big(b_{11}(s) \cdot b_{22}(s) \cdot a_{12}(s) \cdot a_{21}(s)\big), \quad (3.3)$$

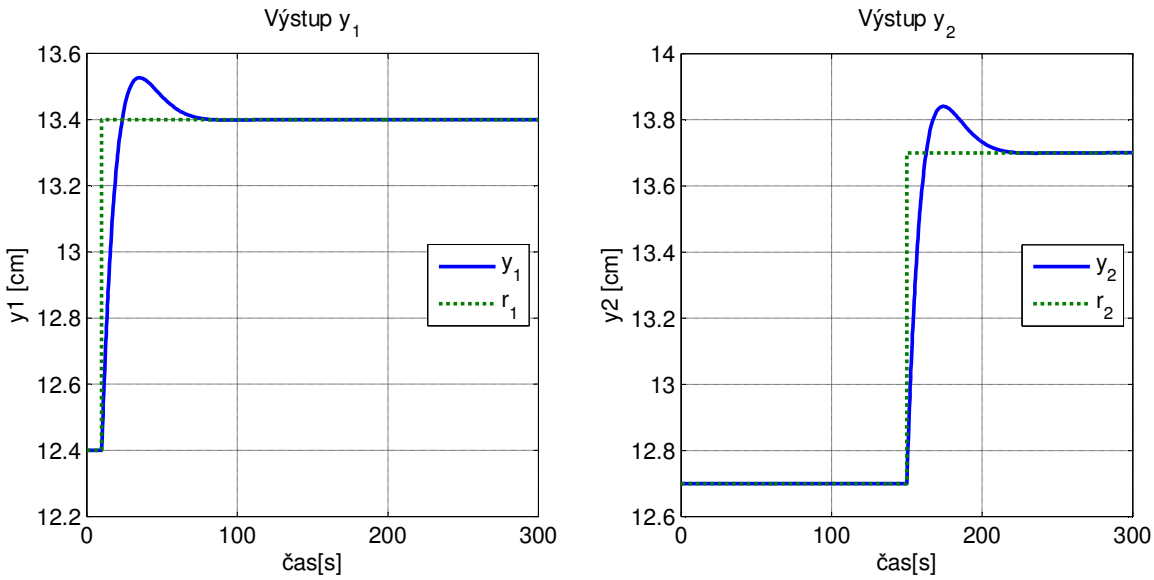
kde polynómy $a_{ij}(s)$ a $b_{ij}(s)$ sú polynómy menovateľov a čitateľov prenosov $g_{ij}(s)$.

Návrh regulátorov s eliminácou interakcií pomocou dynamického rozväzbovacieho kompenzátora bude ukázaný pre minimálne fázový systém (2.10). Pre tento systém je podmienka realizovateľnosti (3.3) splnená. Teraz môžeme navrhnúť regulátory $C_1(s)$ a $C_2(s)$ zvlášť pre prenosy $g_{11}(s)$ a $g_{22}(s)$ SISO metódami návrhu. V kapitole 3.1 sme navrhli dva PI regulátory pre prenosy tohto systému $g_{11}(s)$ a $g_{22}(s)$ metódou umiestňovania pólov. Tieto výsledky môžeme použiť aj v tomto prípade. Na obrázku 3.13 je zobrazená Simulinková schéma zapojenia riadeného systému s kompenzátorom.

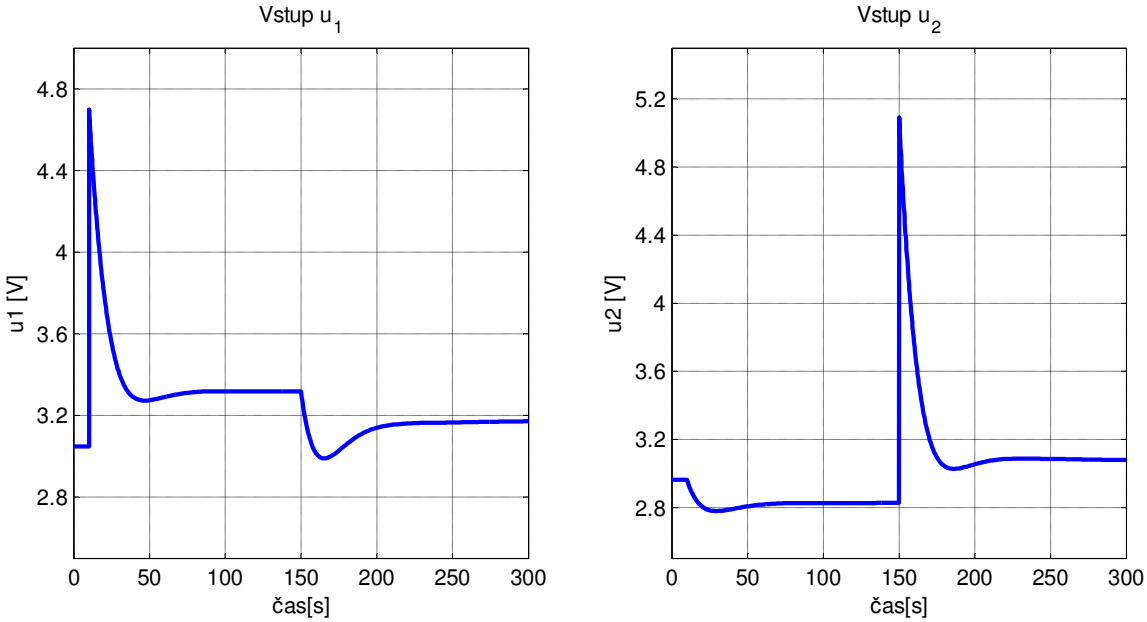


Obrázok 3.13: Simulinková schéma dynamického rozväzbujúceho regulátora

Na obrázku 3.14 je odozva systému na jednotkový skok v referenčnom signáli r_1 v čase $10s$ a na jednotkový skok v referenčnom signáli r_2 v čase $150s$. Na obrázku 3.15 sú odpovedajúce signály u_1 a u_2 na vstupe do sústavy.



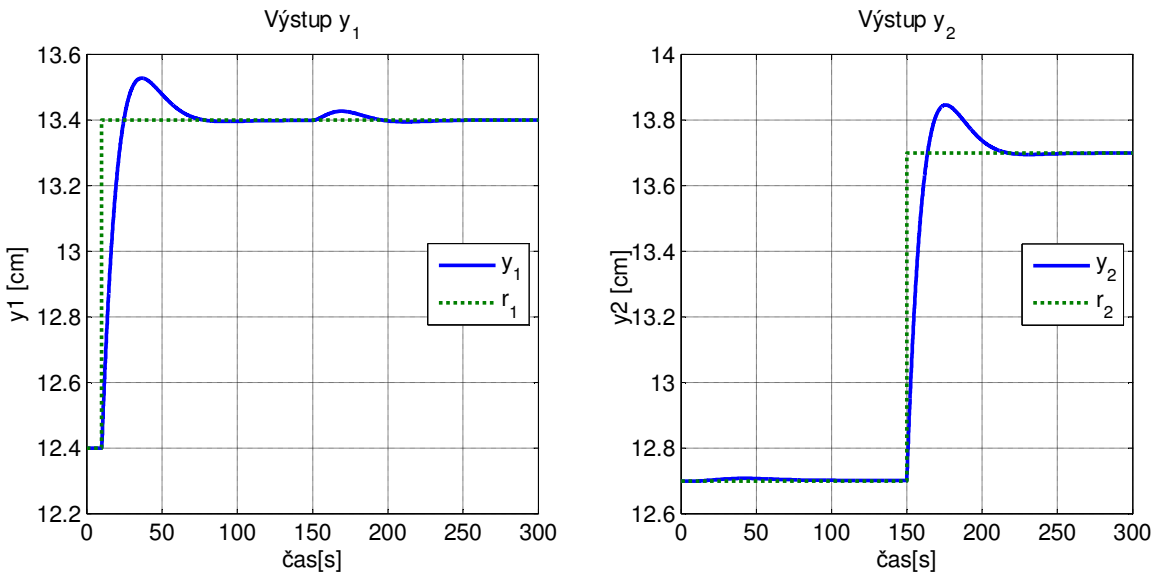
Obrázok 3.14: Odozva systému s regulátorom na jednotkové skoky



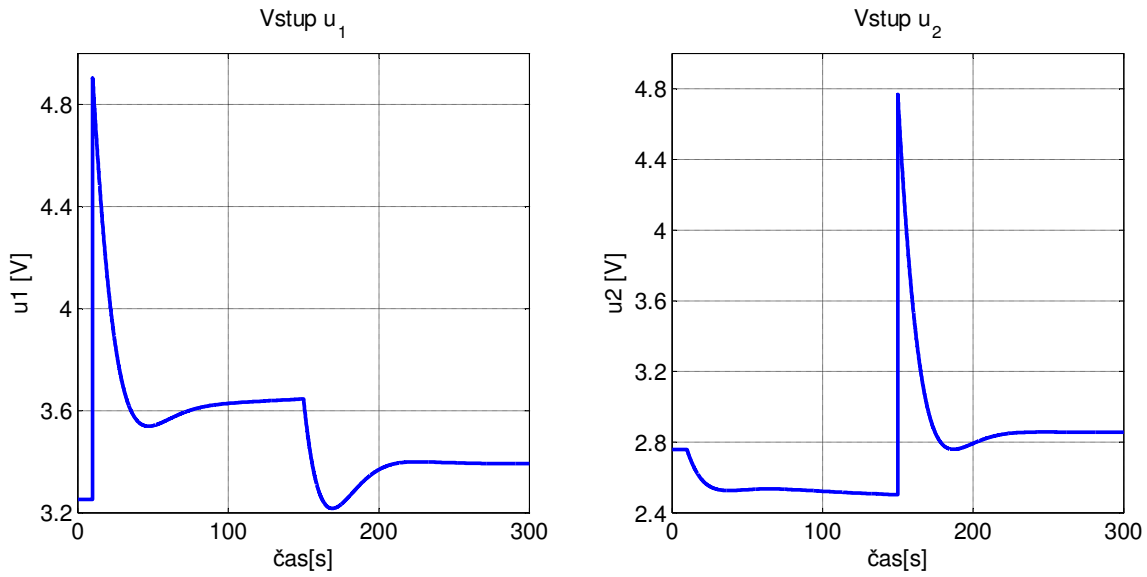
Obrázok 3.15: Akčný zásah na vstupoch riadeného systému

Vo vyššie zobrazených priebehoch je vidieť, že pridaním rozväzbovacieho kompenzátora medzi regulátor a sústavu boli interakcie medzi $u_1 - y_2$ a $u_2 - y_1$ naozaj eliminované.

Pri zmene alebo chybe v nastavení ventilov na hodnoty $\gamma_1 = 0.63$ a $\gamma_2 = 0.54$ sa na výstupoch objavia veľmi malé interakcie, čo je vidieť z obrázku 3.16. Regulátor je teda aj v tomto prípade ešte dostatočne robustný.



Obrázok 3.16: Odozva systému s regulátorom na jednotkové skoky



Obrázok 3.17: Akčný zásah na vstupoch riadeného systému

3.3.2 Stavový rozväzbovací regulátor

V tejto kapitole budeme navrhovať stavový rozväzbovací regulátor s cieľom dosiahnuť predom zvolený tvar diagonálnej prenosovej matice riadeného systému, čím bude zaistená neinteraktívnosť riadenia. Najprv však budeme analyzovať podmienky riešiteľnosti tejto úlohy [3].

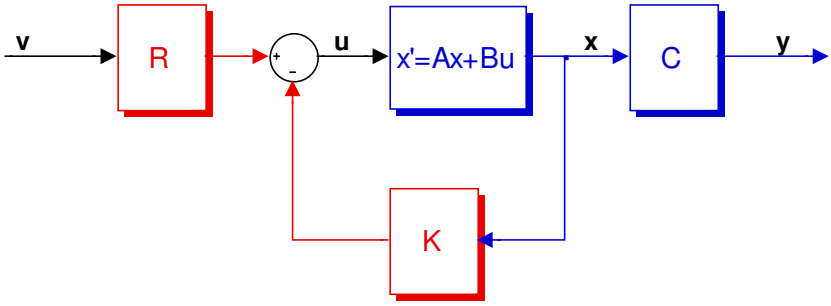
Majme $m \times m$ MIMO lineárny systém so stavovými rovnicami

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad x(t) \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}; \quad u(t), y(t) \in \mathrm{R}^{\mathrm{m}};$$
$$y = Cx.$$

Predpokladajme že systém bude riaditeľný a pozorovateľný. Matica prenosových funkcií tejto sústavy bude nediagonálna matica $G_S(s) = C(sI - A)^{-1}B$. Máme navrhnúť taký lineárny stavový rozväzbovací regulátor

$$u(t) = -Kx(t) + Rv(t),$$

kde $v(t)$ je nový zavedený vstup, $\dim(v(t)) = \dim(u(t)) = m$. Štruktúra systému so stavovým rozväzbovacím regulátorom je na obrázku 3.18.



Obrázok 3.18: Stavový rozväzbujúci regulátor

Základným problémom je určiť podmienky kedy existujú matice K a R lineárneho stavového regulátora také, že $m \times m$ matica prenosu uzavretého systému $G_{y,v}(s)$ bude nejakou diagonálnou maticou

$$G_{y,v}(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = C(sI - A + BK)^{-1}BK = \mathrm{diag}\left\{\frac{\lambda_{ii} \cdot \beta_{ii}(s)}{\alpha_{ii}(s)}\right\}; \; i = 1, \dots, m, \qquad (3.4)$$

kde $\alpha_{ii}(s)$ a $\beta_{ii}(s)$ sú monické polynómy a λ_{ii} sú koeficienty zosilnení.

Je teda nutné zistiť [3]:

- Ako voliť polynómy $\alpha_{ii}(s)$, $\beta_{ii}(s)$ a koeficienty zosilnenia λ_{ii}.
- Ako vypočítať matice K a R.

Nutnú a postačujúcu podmienku riešiteľnosti úlohy udáva nasledujúca veta:

Falb – Wolovichová veta [3]***:***

Riaditeľný systém môže byť prevedený lineárnym stavovým regulátorom na uzavretý systém s diagonálnou maticou prenosov $G_{y,v}(s)$, práve vtedy a len vtedy keď

$$det\, W = det \begin{bmatrix} c_1^T A^{k_1} B \\ \vdots \\ c_r^T A^{k_m} B \end{bmatrix} \neq 0, \tag{3.5}$$

c_i^T *je* i*-ty riadok matice* C; $i = 1, \dots, m$; $k_i = min\, k$;
$k \in [0, \dots, n-1]$: $c_i^T A^k B \neq 0$; $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Analyzujme teraz podmienku riešiteľnosti daného problému. Aby bolo možné docieliť diagonálnu maticu prenosov, musí byť každá zložka vektoru výstupu $y_i(t)$ riaditeľná vstupom $u(t)$, zatiaľ čo vstup $u(t)$ musí byť riaditeľný zložkami nového vstupu $v_i(t)$.

Výstupná rovnica má tvar $y = Cx$ a vstup $u(t)$ nemôže priamo ovplyvniť $y_i(t)$. Po formálnej derivácii výstupnej veličiny dostávame

$$\dot{y} = C\dot{x} = CAx(t) + CBu(t).$$

To znamená, že výstup systému je riadením $u(t)$ ovplyvňovaný prostredníctvom derivácie výstupu. Pripusťme, že $CB = 0$. V takomto prípade je nutné využiť ďalšiu deriváciu výstupnej veličiny

$$\ddot{y}(t) = CA\dot{x}(t) + CB\dot{u}(t) = CA^2x(t) + CABu(t) + CB\dot{u}(t).$$

Pripusťme, že aj $CAB = 0$ a že prvá nenulová matica pri vstupe $u(t)$ sa objaví až u k-tej derivácie výstupnej veličiny, t. z. $CA^{k-1}B \neq 0$,

$$y^{(k)}(t) = CA^k x(t) + CA^{k-1}Bu(t); \quad CA^{k-1}B \neq 0,$$

po zložkách $y_i^{(k_i)}(t) = c_i^T A^{k_i} x(t) + c_i^T A^{k_i - 1} Bu(t); \quad k \in \{1,2, \dots n\}; \; i = 1, \dots m.$

Vyššie uvedený výsledok korešponduje s Falb – Wolovichovou vetou.

Teraz môžeme pristúpiť k samotnému návrhu stavového rozväzbovacieho regulátora. Prenos $G_{y,v}(s)$ vo vzťahu (3.4) je pre výpočet matíc regulátora nepoužiteľný, a preto ho odvodíme vo vhodnejšom tvare.

Zo schémy zapojenia na obrázku 3.18 vyplýva

$$u = Rv - Kx = Rv - K(sI - A)^{-1}Bu \;\; \Rightarrow \;\; (I_r + K(sI - A)^{-1})u = Rv.$$

Dostávame tak vzťah medzi u a v,

$$u = (I_r + K(sI - A)^{-1}B)^{-1}Rv. \tag{3.6}$$

Pre výstup riadeného systému platí $y = C(sI - A)^{-1}Bu$. Po dosadení (3.6), dostávame

$$y = C(sI - A)^{-1}B(I_r + K(sI - A)^{-1}B)^{-1}Rv,$$

a teda prenos uzavretého systému $G_{y,v}(s)$ so stavovým regulátorom má tvar

$$G_{y,v}(s) = G_S(s)(I_r + K(sI - A)^{-1}B)^{-1}R.$$

Po násobení $G_S^{-1}(s)$ zľava a R^{-1} sprava dostaneme

$$G_S^{-1}(s)G_{y,v}(s)R^{-1} = (I_r + K(sI - A)^{-1}B)^{-1} \tag{3.7}$$

a pretože $G_{y,v}(s)$ má byť podľa požiadaviek diagonálnou maticou, môžeme (3.7) invertovať.

Pre výpočet matíc regulátora dostaneme rovnosť. ktorá musí platiť pre $\forall s$,

$$K(sI - A)^{-1}B = R\, G_{y,v}^{-1}(s)G_S(s) - I_r; \quad \forall s. \tag{3.8}$$

Výraz na ľavej strane by mal byť striktne rýdzou prenosovou funkciou, kedy je relatívny rád väčší alebo rovný jednej, preto musí platiť

$$\lim_{s\to\infty} K(sI - A)^{-1}B = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{s\to\infty} R\, G_{y,v}^{-1}(s)G_S(s) = I_r. \tag{3.9}$$

Obmedzenia na výber diagonálnej matice $G_{y,v}(s)$:

Budeme sa zaoberať najprv druhou limitou v (3.9). Dosadením za $G_{y,v}(s)$ z (3.4) dostávame

$$\lim_{s\to\infty}\left\{R\begin{bmatrix}\lambda_{11}\dfrac{\beta_{11}(s)}{\alpha_{11}(s)} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_{mm}\dfrac{\beta_{mm}(s)}{\alpha_{mm}(s)}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{b_{11}(s)}{a_{11}(s)} & \cdots & \dfrac{b_{1m}(s)}{a_{1m}(s)}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{b_{m1}(s)}{a_{m1}(s)} & \cdots & \dfrac{b_{mm}(s)}{a_{mm}(s)}\end{bmatrix}\right\} = I_r. \tag{3.10}$$

kde $\alpha_{ii}(s)$ a $\beta_{ii}(s)$ sú monické polynómy, ktoré je potrebné zvoliť a λ_{ii} sú ľubovoľné koeficienty. Po úprave (3.10) dostávame

$$\lim_{s\to\infty}\left\{R\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\lambda_{11}} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_{mm}}\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\dfrac{\alpha_{11}(s)}{\beta_{11}(s)} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \dfrac{\alpha_{mm}(s)}{\beta_{mm}(s)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{b_{11}(s)}{a_{11}(s)} & \cdots & \dfrac{b_{1m}(s)}{a_{1m}(s)}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{b_{m1}(s)}{a_{m1}(s)} & \cdots & \dfrac{b_{mm}(s)}{a_{mm}(s)}\end{bmatrix}}_{=D(s)}\right\} = I_r. \tag{3.11}$$

Pre splnenie (3.11) je nutné, aby $\lim_{s\to\infty} D(s)$ bola nejaká konštantná matica D. To môže byť splnené vtedy a len vtedy, keď bude v každom riadku $D(s)$ aspoň jeden prvok s rovnakým stupňom polynómu v čitateli aj menovateli. Inak povedané, prenosy

$\beta_{ii}(s)/\alpha_{ii}(s)$ na diagonále $G_{y,v}(s)$ musia mať rovnaký relatívny rád ako prvok s minimálnym relatívnym rádom v i-tom riadku matice prenosov systému $G_S(s)$.

Určenie matice *R*:

(3.11) môžeme zapísať ako

$$R\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_{11}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_{mm}} \end{bmatrix} D = I_r \;\; \Rightarrow \;\; R = D^{-1}\mathrm{diag}\{\lambda_{ii}\}.$$

Maticu K určíme z požiadavky, aby pre $\forall s$ platil základný vzťah (3.8). Ľavú aj pravú stranu (3.8) rozložíme na maticové parciálne zlomky

$$K(sI - A)^{-1}B = K\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{s - s_i}, \;\; \text{kde } Q_i = \lim_{s\to s_i}\{(s - s_i)(sI - A)^{-1}B\}, \qquad (3.12)$$

$$R\, G_{y,v}^{-1}(s)G_S(s) - I_r = \sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{s - s_i}, \;\; \text{kde } P_i = \lim_{s\to s_i}\left\{(s - s_i)\, G_{y,v}^{-1}(s)G_S(s) - I_r\right\}. \qquad (3.13)$$

Q_i a P_i sú maticové reziduá.

Q_i je matica rozmeru $n \times$ m, pre každé s_i,

P_i je matica rozmeru m $\times$ m, pre každé s_i, $\quad i = 1,2, \dots n$.

Na pravej strane rovnosti (3.8) sú póly určené súčinom prenosov

$$G_{y,v}^{-1}(s)G_S(s) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{11}(s)}{\beta_{11}(s)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\alpha_{mm}(s)}{\beta_{mm}(s)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{b_{11}(s)}{a_{11}(s)} & \cdots & \frac{b_{1m}(s)}{a_{1m}(s)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{b_{m1}(s)}{a_{m1}(s)} & \cdots & \frac{b_{mm}(s)}{a_{mm}(s)} \end{bmatrix}.$$

Je zrejmé, že póly budú na oboch stranách rovnosti (3.8) rovnaké, pokiaľ polynómy $\beta_{ii}(s)$ budú volené ako spoločné faktory polynómov čitateľov jednotlivých prenosov v i-tom riadku prenosovej funkcie $G_S(s)$. Táto požiadavka na $\beta_{ii}(s)$, spolu s vyššie analyzovanou požiadavkou na relatívny rád prenosov $\beta_{ii}(s)/\alpha_{ii}(s)$ v diagonálnej matici $G_{y,v}(s)$ plne určuje možný výber a obmedzenia na túto maticu.

Určenie matice K:

Využijeme rozklad (3.8) na maticové parciálne zlomky (3.12), (3.13) a pri rovnosti charakteristických polynómov u obidvoch rozkladov určíme hľadanú maticu K porovnaním maticových reziduí. Vyberieme z každej matice Q_i jeden stĺpec $q_j(s_i)$ tak, až získame n lineárne nezávislých stĺpcov. Analogicky, z každej matice P_i vyberieme jeden stĺpec $p_j(s_i)$ tak, až získame tiež n lineárne nezávislých stĺpcov. Dostaneme sústavu, z ktorej určíme matice stavového regulátora K (nejednoznačné riešenie)

$$K\left[q_j(s_1), \dots q_j(s_n)\right] = \left[p_j(s_1), \dots p_j(s_n)\right],$$

$$K = \left[p_j(s_1), \dots p_j(s_n)\right]\left[q_j(s_1), \dots q_j(s_n)\right]^{-1}. \tag{3.14}$$

Vyššie uvedený postup návrhu stavového rozväzbovacieho regulátora si v nasledujúcich krokoch ukážeme na minimálne fázovom systéme štyroch nádrží. Výpočet bude len naznačený a nebude dopodrobna rozpísaný, budú uvedené len dôležité výsledky. V prílohe je odpovedajúci m-file, kde sú uvedené všetky výpočty. Systém je popísaný stavovými rovnicami, kde matice A, B, C sú určené podľa (2.7). Systém je riaditeľný a pozorovateľný. Odpovedajúca matica prenosových funkcií je

$$G_S(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{5.22}{1+62.7s} & \dfrac{2.98}{(1+22.47s)(1+62.7s)} \\ \dfrac{2.8371}{(1+30.58s)(1+90.3s)} & \dfrac{5.67}{1+90.3s} \end{bmatrix}.$$

Navrhneme stavový rozväzbovací regulátor $u(t) = -Kx(t) + Rv(t)$ nasledovným postupom:

1) Riešiteľnosť úlohy zistíme z Falb-Wolovichovho testu

   $\det W = \det\begin{bmatrix} c_1^T A^{k_1} B \\ c_2^T A^{k_2} B \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0.0833 & 0 \\ 0 & 0.0628 \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ úloha je riešiteľná,

   $k_1 = k_2 = 0.$

2) Určíme prípustné $G_{y,v}(s) = \mathrm{diag}\left(\lambda_{ii} \cdot \beta_{ii}(s)/\alpha_{ii}(s)\right);\ i = 1,2.$

   Zvolíme $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 1$. Pre splnenie vyššie uvedených podmienok, zistíme že minimálny relatívny rád v oboch riadkoch $G_S(s)$ je 1, a spoločné faktory polynómov čitateľov jednotlivých prenosov matice $G_S(s)$ budú zvolené konštanty.

   To znamená, že prenosy na diagonále $G_{y,v}(s)$ musia byť relatívneho rádu 1 a v čitateli môžu mať iba konštantu. Zvolíme teda tvar výsledného uzavretého systému ako dva zhodné systémy prvého rádu, s dobou ustálenia 40 sekund,

$$G_{y,v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+10s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+10s} \end{bmatrix}.$$

Podmienka (3.11) bude mať tvar

$$\lim_{s\to\infty} \left\{ R \begin{bmatrix} \frac{1+10s}{1} & 0 \\ 0 & \frac{1+10s}{1} \end{bmatrix} G_S(s) \right\} = I_r \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 1.2012 & 0 \\ 0 & 1.5920 \end{bmatrix}.$$

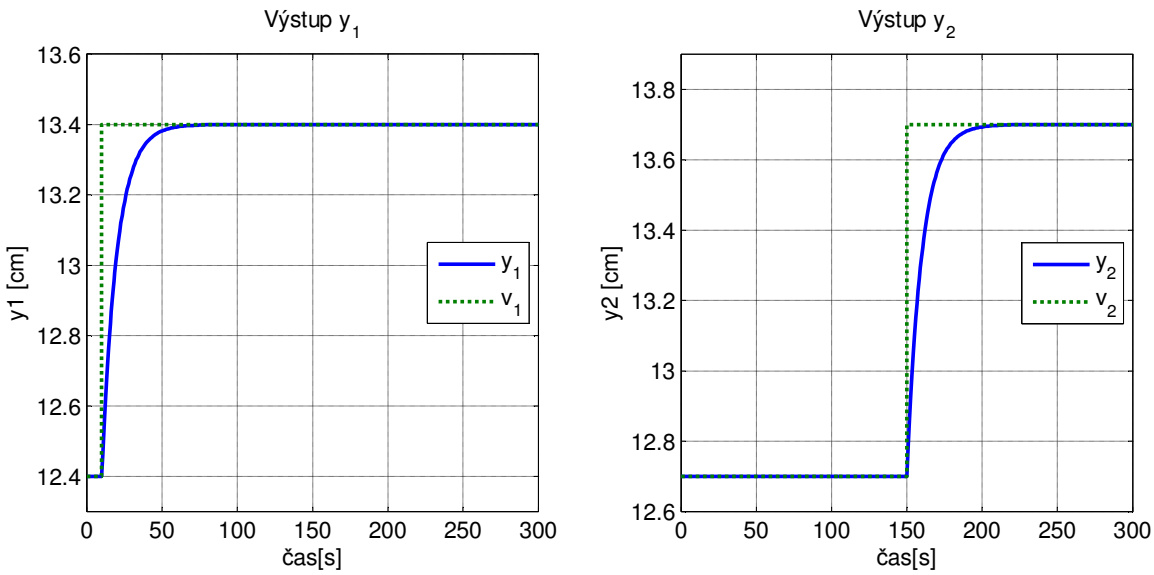
3) Splníme požiadavku, aby platil základný vzťah (3.8). Po rozklade na maticové zlomky vypočítame podľa (3.12) a (3.13) maticové reziduá Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 a P_1, P_2, P_3, P_4 pre $s_1 = -0.0445,\ s_2 = -0.0327, s_3 = -0.0159,\ s_4 = -0.0111.$

4) Maticu K určíme podľa (3.14), kde stĺpce $q_j(s_i)$ a $p_j(s_i)$ boli vybrané následovne,

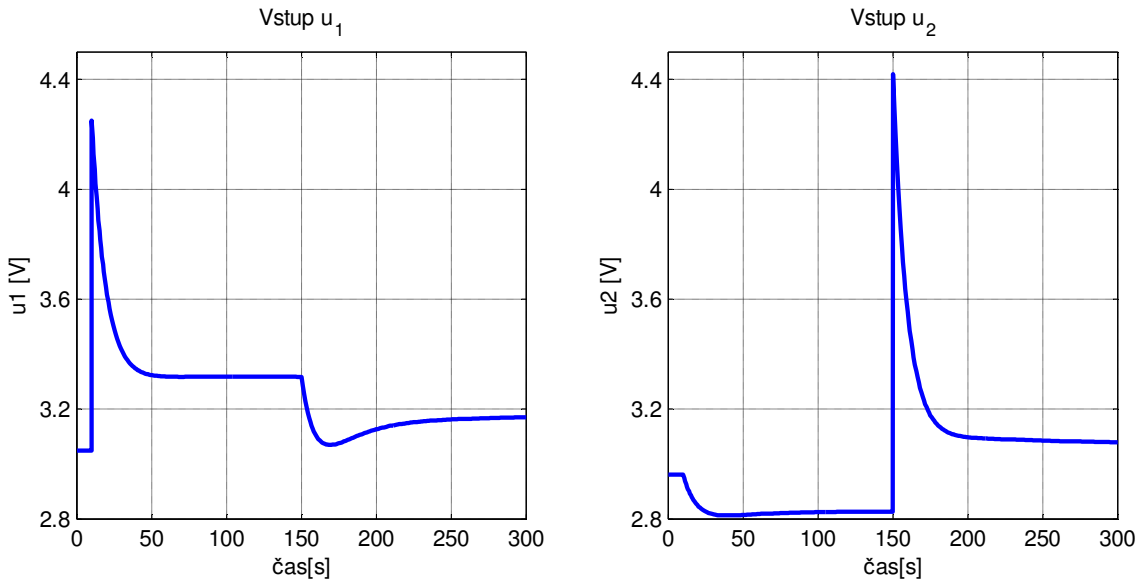
$$K = [p_2(s_1),\ p_1(s_2),\ p_1(s_3),\ p_2(s_4)\,][q_2(s_1),\ q_1(s_2),\ q_1(s_3),\ q_2(s_4)\,]^{-1} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1.0096 & 0 & 0.5347 & 0 \\ 0 & 1.4158 & 0 & 0.5207 \end{bmatrix}.$$

Voľba prenosov $\beta_{ii}(s)/\alpha_{ii}(s)$ na diagonále $G_{y,v}(s)$ je obmedzená tým, že musí mať rovnaký relatívny rád ako prvok s minimálnym relatívnym rádom v i-tom riadku matice prenosov $G_S(s)$, pričom polynómy $\beta_{ii}(s)$ môžu byť zvolené iba ako spoločné faktory polynómov čitateľov jednotlivých prenosov v i-tom riadku matice prenosových funkcií $G_S(s)$ [3]. Z toho vyplýva, že rád rozväzbeného systému s diagonálnou maticou $G_{y,v}(s)$ bude daný relatívnym rádom pôvodného systému. V našom prípade je náš uvažovaný systém nádrží $G_S(s)$ štvrtého rádu, ale na diagonále $G_{y,v}(s)$ sú dva prenosy prvého rádu. Táto situácia nastane, lebo systém $G_S(s)$ má nuly, ktoré nie sú spoločnými faktormi jednotlivých prenosov v riadkoch $G_S(s)$. Stavový regulátor preto tieto nuly vykráti proti zavedeným pólom odpovedajúcej hodnoty a dôjde k zníženiu rádu. Z hľadiska vnútornej stability je však povolené iba krátenie stabilných núl, preto je tento návrh vhodný len pre minimálne fázový systém.

Na obrázku 3.19 je odozva systému s regulátormi na jednotkový skok na vstupe v_1 v čase 10s a na vstupe v_2 v čase 150s. Priebeh odpovedá nami navrhnutému prenosu $G_{y,v}$. Je vidieť, že interakcie boli tiež potlačené. Na obrázku 3.20 je akčný zásah na vstupoch u_1 a u_2.

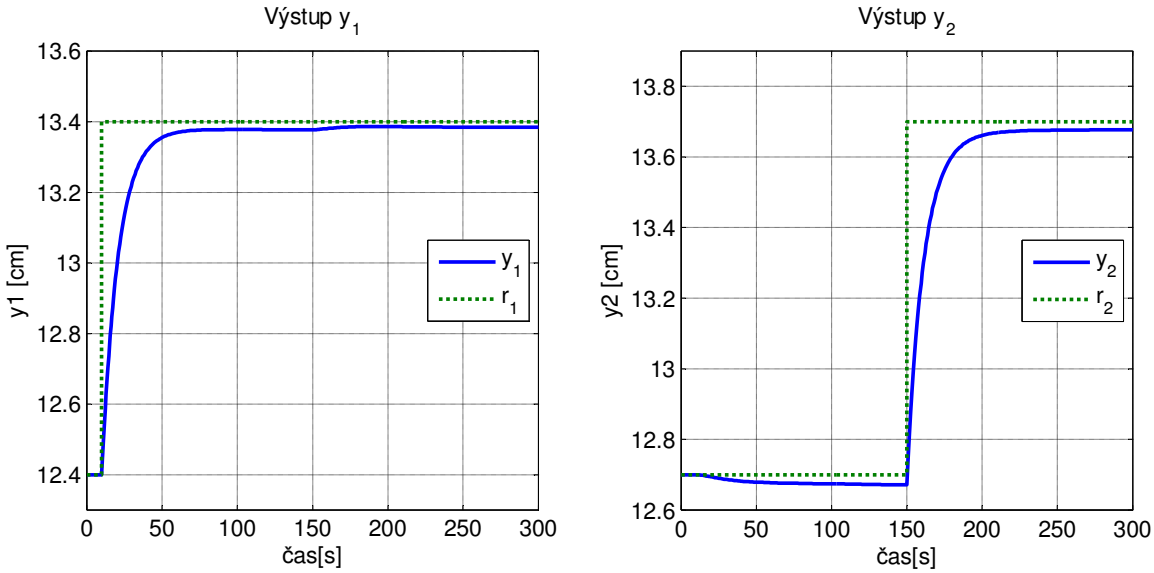


Obrázok 3.19: Reakcia systému so stavovým rozväzbujúcim regulátorom na jednotkové skoky

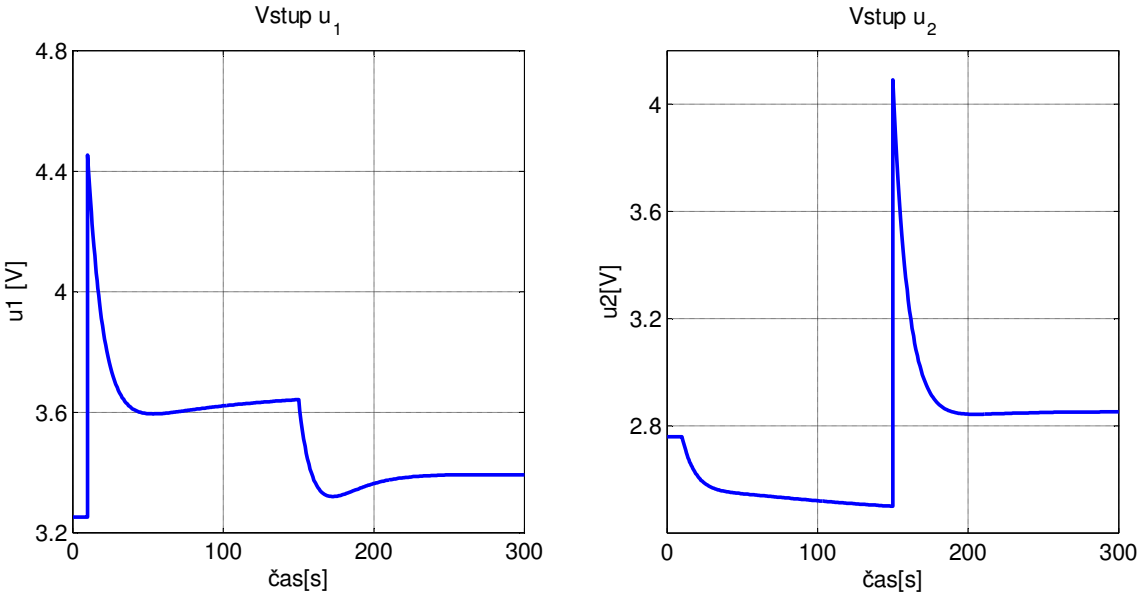


Obrázok 3.20: Akčný zásah na vstupe do sústavy

Ak nastane chyba alebo zmena v nastavení ventilov na hodnoty $\gamma_1 = 0.63$ a $\gamma_2 = 0.54$, tak pri riadení systému s vyššie navrhnutým stavovým rozväzbovacím regulátorom, nebude mať systém požadovanú ustálenú hodnotu na výstupe, viď obrázok 3.21. Odpovedajúci priebeh vstupov je na obrázku 3.22.



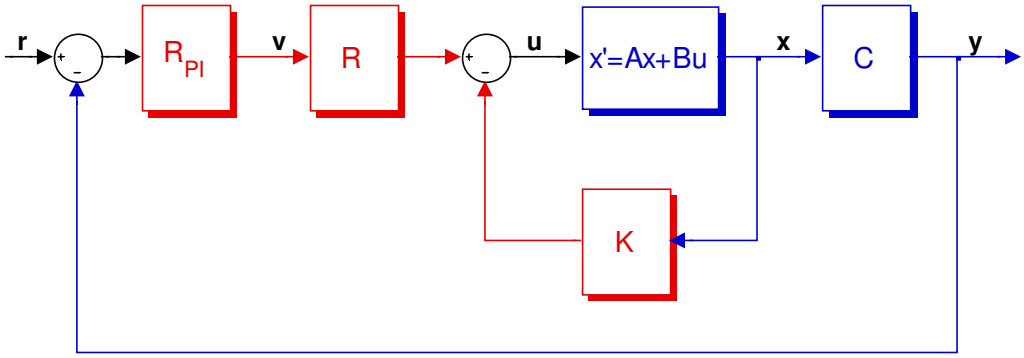
Obrázok 3.21: Reakcia systému so stavovým rozväzbujúcim regulátorom na jednotkové skoky



Obrázok 3.22: Akčný zásah na vstupe do sústavy

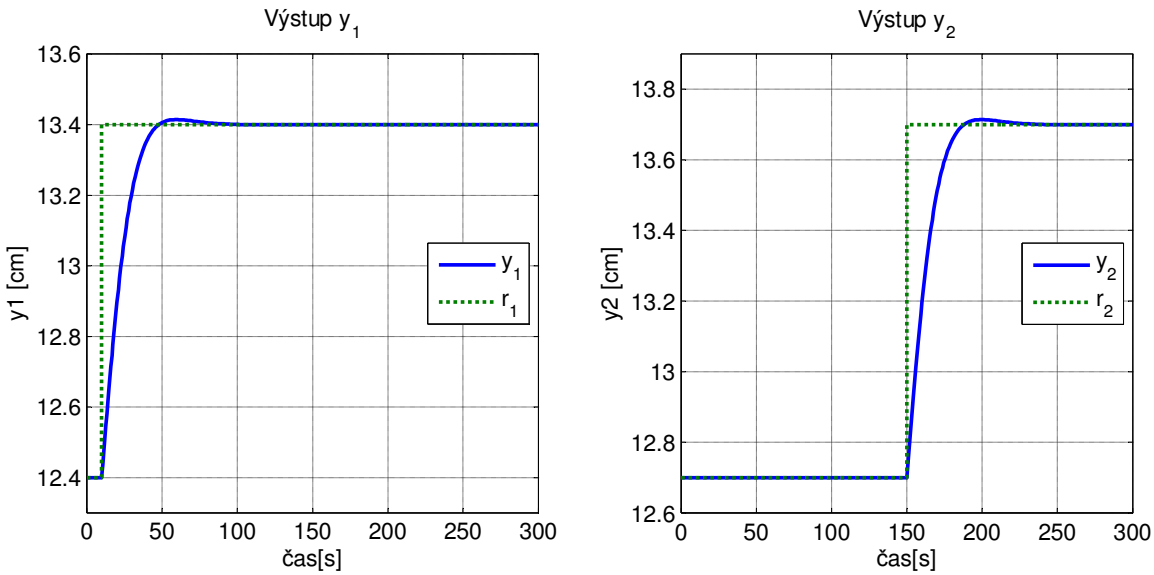
Aby sme zaručili požadovanú ustálenú hodnotu systému aj pri chybe alebo zmene v nastavení pomerových ventilov, musíme stavový rozväzbovací regulátor rozšíriť o decentralizovaný regulátor s integračnou zložkou. Schematické znázornenie tejto situácie je na obrázku 3.23. V našom prípade použijeme PI regulátory, navrhnuté metódou umiestňovania pólov, pre prenosy matice $G_{y,v}(s)$, ktorej tvar sme zvolili pri návrhu stavového rozväzbujúceho regulátora. PI regulátory budú mať tvar

$$R_{PI} = \begin{pmatrix} \frac{0.086 + 0.53s}{s} & 0 \\ 0 & \frac{0.086 + 0.53s}{s} \end{pmatrix}.$$

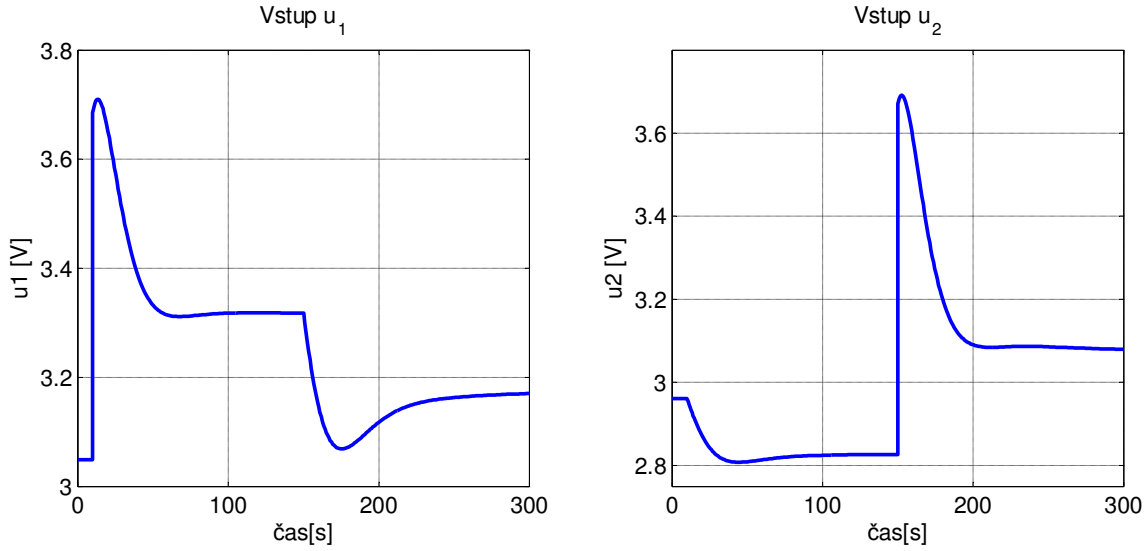


Obrázok 3.23: Znázornenie stavového rozväzbujúceho regulátora s PI regulátorom.

Na obrázku 3.24 je odozva tohto systému na jednotkový skok v referencii r_1 v čase 10s a v r_2 v čase 150s. Odpovedajúci priebeh vstupov do sústavy je na obrázku 3.25.

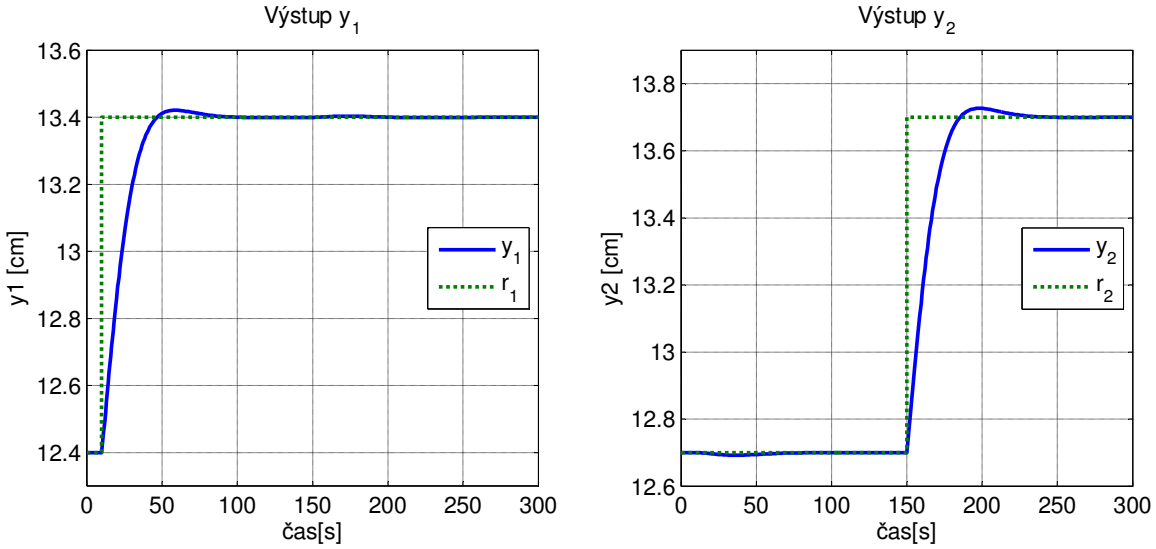


Obrázok 3.24: Reakcia riadeného systému na jednotkové skoky

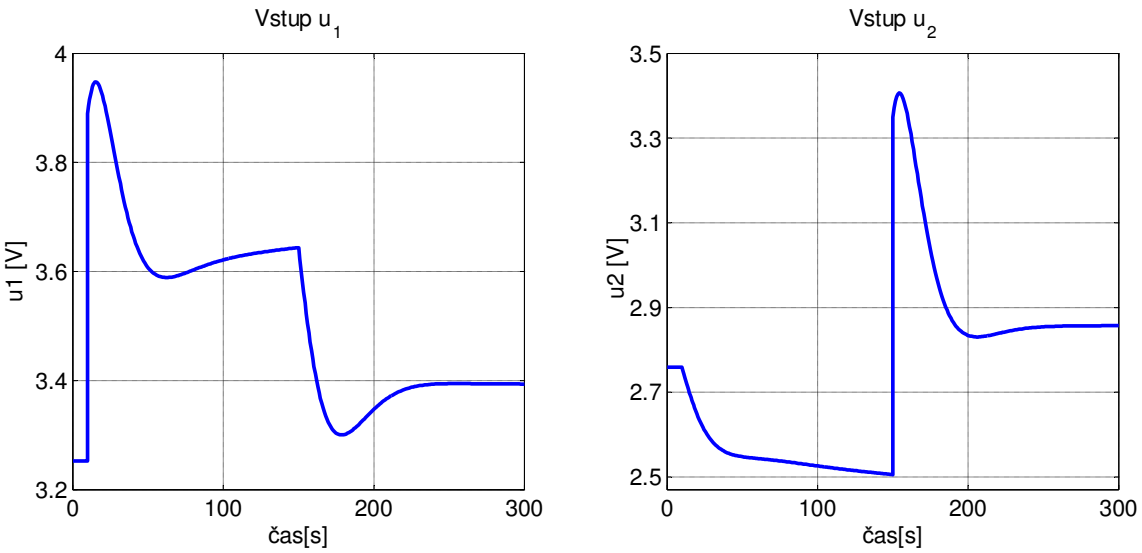


Obrázok 3.25: Akčný zásah na vstupe do sústavy

Uvažujme opäť prípad, kedy sa zmení nastavenie pomerových ventilov na hodnoty $\gamma_1 = 0.63$ a $\gamma_2 = 0.54$. Výstup tohto systému so stavovým rozväzbujúcim regulátorom a PI regulátorom na zmenu referencie r_1 v čase 10s a v r_2 v čase 150s je na obrázku 3.26. Odpovedajúci priebeh vstupného signálu je na obrázku 3.27. Ako môžeme vidieť z obrázka 3.26, tak interakcie sú aj napriek tejto zmene v nastavení ventilov stále potlačované dostatočne silne a ustálená odchýlka je v tomto prípade nulová.



Obrázok 3.26: Reakcia riadeného systému na jednotkové skoky



Obrázok 3.27: Akčný zásah na vstupe do sústavy

4 Návrh regulátorov pre neminimálne fázový systém

V kapitole 2.2 sme zistili, že pri istom nastavení pomerových ventilov γ_1, γ_2 u systému nádrží, ma sústava nulu v nestabilnej pravej polrovine. To znamená, že systém je neminimálne fázový. V tejto kapitole si ukážeme, že neminimálne fázové MIMO systémy kladú isté obmedzenia pri návrhu regulácie.

Budú uvedené dve podkapitoly, v ktorých uvedieme návrh decentralizovaného PI regulátora a centralizovaného LQ regulátora.

Návrh dynamického a stavového rozväzbovacieho regulátora ako boli spomenuté v kapitole 3.3 nebude možný. V prípade dynamického rozväzbovacieho kompenzátora nebude splnená podmienka jeho realizovateľnosti (3.3). Ako ukážeme v nasledujúcej časti, párovanie vstupov a výstupov bude zamenené kvôli splneniu podmienky párovania RGA, $\lambda > 0$. Tým pádom by prenosy navrhovaného dynamického rozväzbovacieho kompenzátora dostali tvar

$$\left(\frac{g_{12}(s)}{g_{11}(s)}\right)^{-1} \text{ a } \left(\frac{g_{21}(s)}{g_{22}(s)}\right)^{-1}.$$

Pre neminimálne fázový systém tieto prenosy nie sú realizovateľné, preto nie je možný tento návrh.

Stavový rozväzbujúci regulátor nebude tiež možné pre neminimálne fázový systém použiť. Uzavretý systém by bol nedetekovateľný a obsahoval by nestabilné a nepozorovateľné stavy, čo je neprípustné.

4.1 Decentralizovaný PI regulátor

V časti 3.1 sme navrhovali decentralizovaný PI regulátor pre minimálne fázový systém, v tejto časti bude podobný návrh pre systém neminimálne fázový. Návrh môžeme rozdeliť na dva kroky:

- Výpočet RGA pre zvolenie vhodného párovania vstupov a výstupov.
- Návrh SISO regulátorov pre jednotlivé vstupno-výstupné páry.

Máme neminimálne fázový systém štyroch nádrží určený maticou prenosov

$$G_+(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{3.048}{1+63.2s} & \dfrac{4.68}{(1+39.79s)(1+63.2s)} \\ \dfrac{5.36}{(1+55.05s)(1+91.4s)} & \dfrac{3.195}{1+91.4s} \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

RGA vypočítame podľa

$$\mathrm{RGA}\big(G_+(0)\big) = \Lambda\big(G_+(0)\big) = G_+(0) \times \big(G_+^{-1}(0)\big)^T = \begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.6357 & 1.6357 \\ 1.6357 & -0.6357 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že $\lambda < 0$, to znamená že párovanie $u_1 - y_1$ a $u_2 - y_2$ nie je vhodné pre návrh decentralizovaného riadenia. Musíme teda zameniť riadky matice $G_+(s)$, tým pádom sa zmení párovanie vstupov a výstupov na $u_1 - y_2$ a $u_2 - y_1$. K tomuto výsledku sme tiež došli aj v kapitole 2.4 všeobecne.

PI regulátory budeme navrhovať pre nediagonálne prenosy matice $G_+(s)$, teda pre dva systémy druhého rádu. Opäť použijeme metódu umiestňovania pólov [8]. Postup návrhu naznačíme len pre $g_{12}(s)$. Pre $g_{21}(s)$ bude postup rovnaký.

$$g_{12}(s) = \frac{4.68}{(1+39.79s)(1+63.2s)}$$

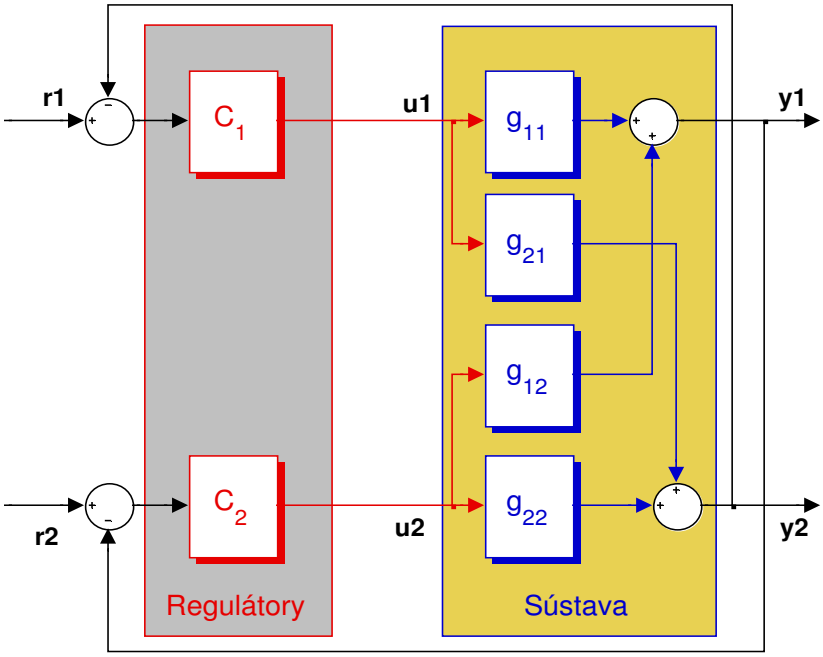
PI regulátor ma tvar

$$C_1(s) = k_{p_1}\left(1 + \frac{1}{T_{i_1}.s}\right).$$

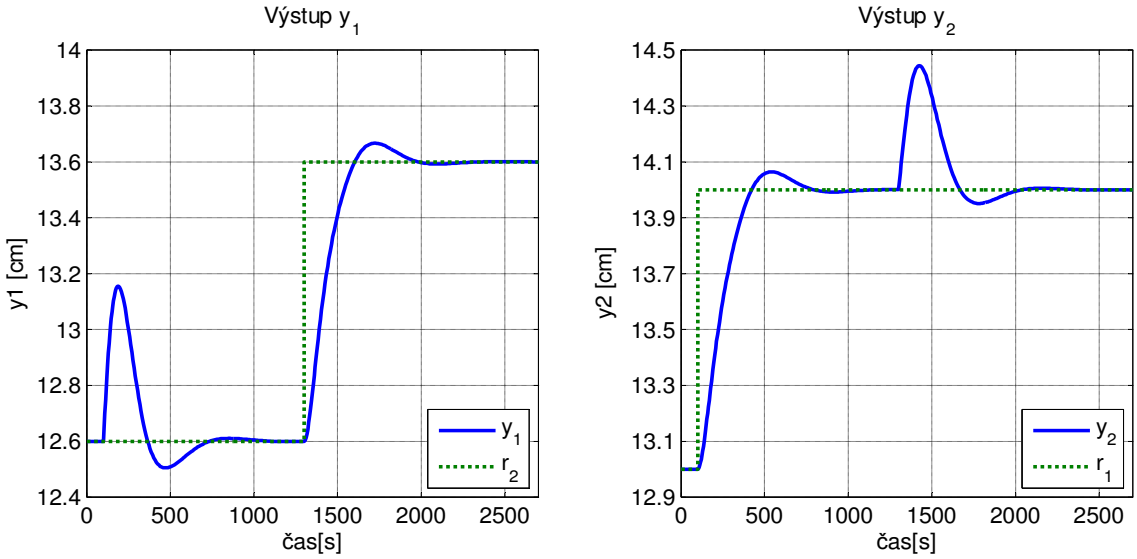
Pri zvolenej požiadavke na dobu ustálenia $t_s < 800\mathrm{s}$ a prekmit $OS < 10\%$ dostávame PI regulátory v tvare

$$C_1(s) = 0.2531\left(1 + \frac{1}{98.4s}\right), \quad C_2(s) = 0.15\left(1 + \frac{1}{50.17s}\right).$$

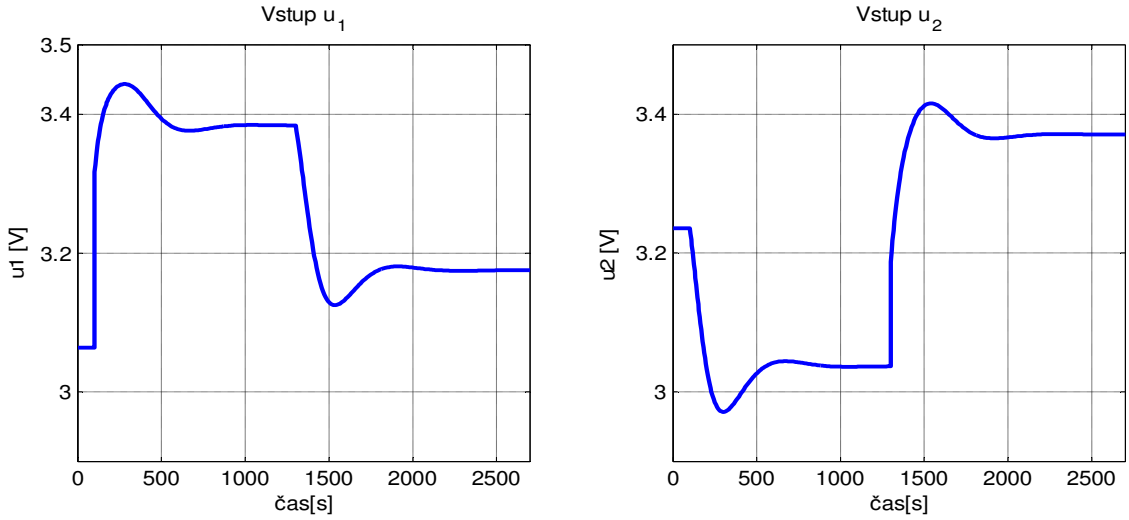
Na obrázku 4.1 je zobrazená Simulinková schéma zapojenia neminimálne fázového systému s PI regulátormi. Na nasledujúcom obrázku 4.2 je odozva systému s regulátormi na jednotkový skok na vstupe r_1 v čase 100s a na vstupe r_2 v čase 1300s. A na obrázku 4.3 je akčný zásah regulátorov na vstupoch u_1 a u_2. Ako je vidieť tak priebehy sú niekoľkonásobne pomalšie ako v prípade minimálne fázového systému. Interakcie sú v tomto prípade silné. Z tohto je názorná aj fyzikálna interpretácia tohto problému. Uvedeným párovaním sme dosiahli to, že hladiny v spodných nádržiach y_1 a y_2 riadime tokom do horných nádrží. Preto má systém v tomto prípade silné interakcie a je pomalší. Túto skutočnosť naznačoval už rozbor fyzikálnej interpretácie umiestnenia nuly na strane 9, kedy sme ukázali, že keď je systém neminimálne fázový, tak je do horných nádrží väčší tok ako do spodných.



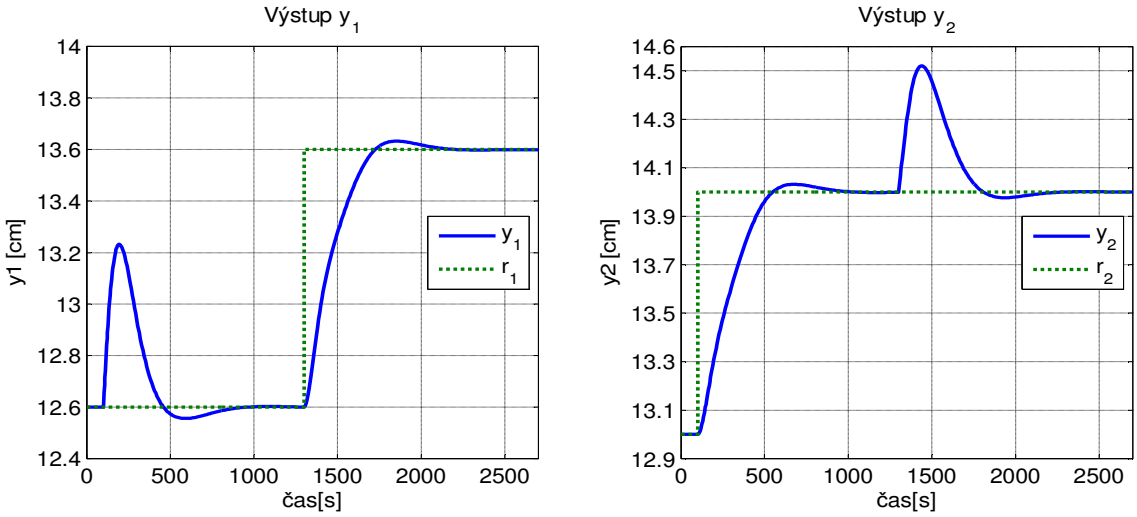
Obrázok 4.1: Schéma decentralizovaného riadenia neminimálne fázového systému



Obrázok 4.2: Odozva systému na výstupe

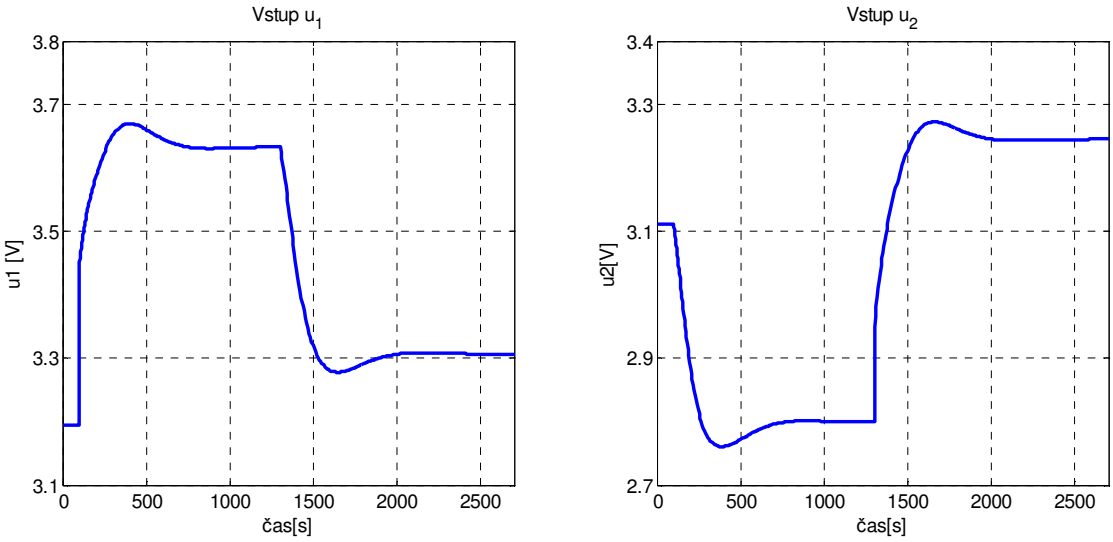


Obrázok 4.3: : Akčný zásah na vstupe do sústavy



Obrázok 4.4: Odozva systému na výstupe

Pri zmene v nastavení pomerových ventilov na hodnoty $\gamma_1 = 0.47$ a $\gamma_2 = 0.37$, bude mať systém s vyššie navrhnutým decentralizovaným PI regulátorom silnejšie interakcie. Regulátor je pre reguláciu pri takýchto zmenách ešte postačujúci a dostatočne robustný. Daná situácia je znázornená na obrázku 4.4, kde je odozva systému na jednotkový skok na vstupe r_1 v čase 100s a na vstupe r_2 v čase 1300s. Na obrázku 4.5 je priebeh vstupného signálu do systému.



Obrázok 4.5: Akčný zásah na vstupe do sústavy

4.2 LQ regulátor

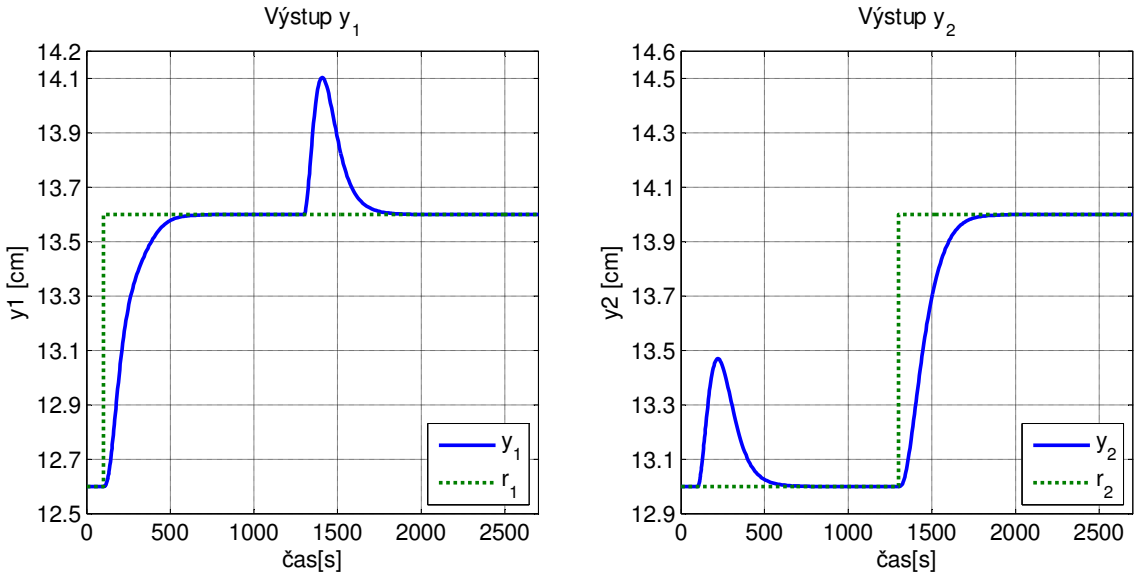
V kapitole 3.2 bol všeobecne popísaný spôsob návrhu LQ regulátora s integrálom regulačnej odchýlky. Tomuto návrhu odpovedá schéma na obrázku 3.7. V prípade neminimálne fázového systému bude návrh LQ regulátora rovnaký ako u minimálne fázového systému, preto ho nebudeme znova uvádzať. Bude znovu vytvorený systém s rozšírenými maticami $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ a k nemu bude vypočítane $\widehat{K}$. Našou úlohou teda ostáva vhodne zvoliť matice Q a R pre dosiahnutie požadovaných výsledkov. Metódou pokusu a omylu boli nastavené hodnoty

$$Q = \text{diag}\{1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0.1,\ 0.1\} \text{ a } R = \text{diag}\{1000,\ 1000\}.$$

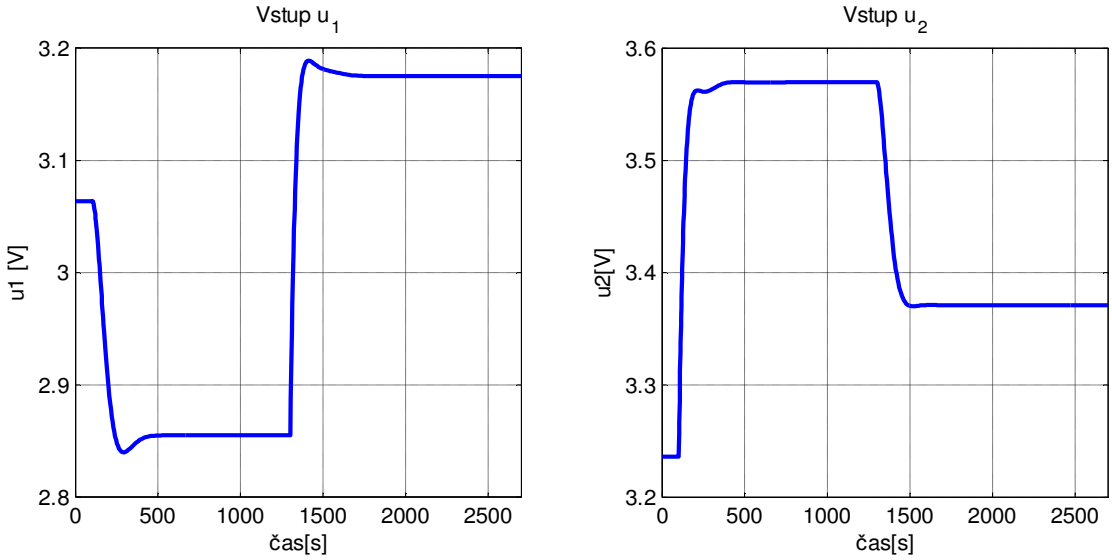
Odpovedajúca matica zosilnenia bude

$$\widehat{K} = \begin{bmatrix} -0.141 & 0.684 & -0.202 & 0.52 & -0.0002 & -0.01 \\ 0.495 & -0.224 & 0.390 & -0.28 & -0.01 & 0.0002 \end{bmatrix}.$$

Na obrázku 4.6 je znázornená odozva y_1 a y_2 systému s regulátorom na jednotkový skok v referenčnom signáli r_1 v čase 100s a na r_2 v čase 1300s. Obrázok 4.7 popisuje priebeh signálov na vstupoch do systému u_1 a u_2.



Obrázok 4.6: Odozva riadeného systému na výstupe.

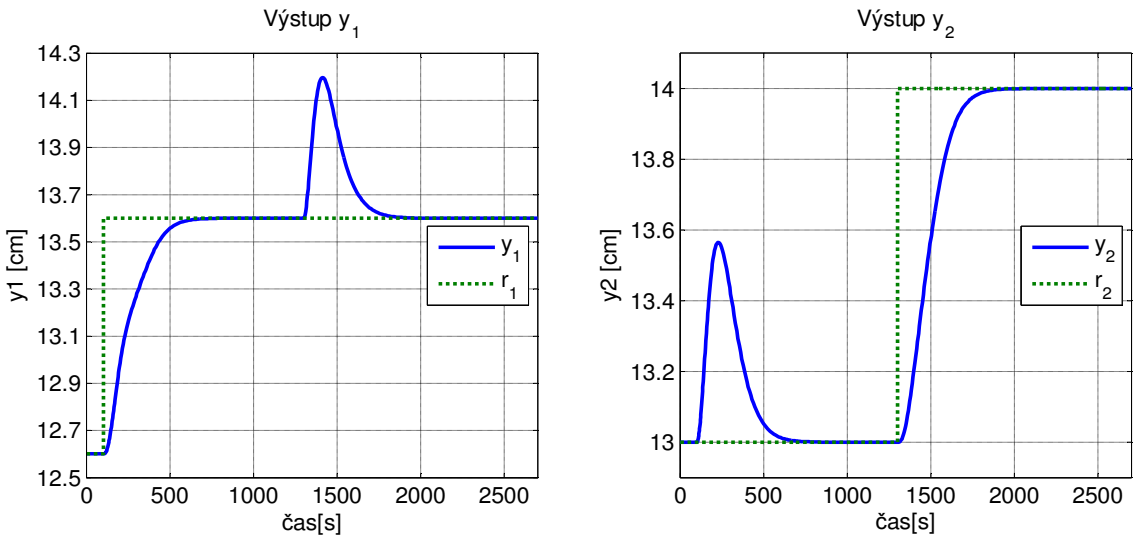


Obrázok 4.7: Akčný zásah na vstupe do sústavy.

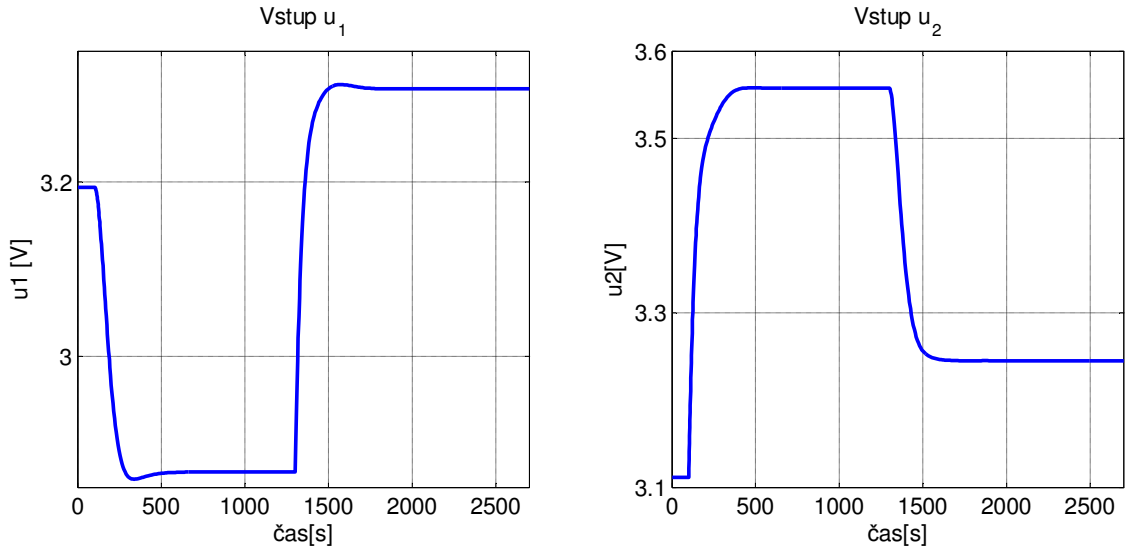
Pri porovnaní vyššie uvedených priebehov riadeného neminimálne fázového systému s priebehmi pri decentralizovanom riadení, je podstatný rozdiel v tom, že v tomto prípade je odozva na zmenu referencie r_1 výstup y_1, a na r_2 výstup y_2.

U decentralizovaného návrhu to bolo naopak. Interakcie sú však aj v tomto prípade silné.

Uvažujme teraz prípad, kedy nastane zmena v nastavení ventilov na hodnoty $\gamma_1 = 0.47$ a $\gamma_2 = 0.37$. V tomto prípade bude mať systém s vyššie navrhnutým LQ regulátorom odozvu na jednotkový skok referencie r_1 v čase 100s a r_2 v čase 1300s na obrázku 4.8. Na obrázku 4.9 je odpovedajúci priebeh vstupu do systému. Z obrázkov je zrejmé, že v tomto prípade interakcie mierne zosilneli. Navrhnutý regulátor je ale ešte stále pomerne robustný a odolný voči takýmto zmenám v parametroch.



Obrázok 4.8: Odozva riadeného systému na výstupe.



Obrázok 4.9: Akčný zásah na vstupe do sústavy.

5 Záver

V tejto práci sme sa zoznámili s modelom štvor – nádržovej vodárne a navrhli sme tomuto systému riadenie. Pred samotným návrhom regulátorov bolo potrebné pochopiť chovanie tohto MIMO systému. Ukázali sme, že tento systém môže byť minimálne fázový ale aj neminimálne fázový, čo závisí len od nastavenia pomerových ventilov. Od nastavenia pomerových ventilov závisí tiež smer nuly tohto systému a tiež RGA. U MIMO systémov sú teda dôležité smery. V našom prípade bolo uvedené, že pokiaľ má systém nestabilnú nulu, tak sa jej efekt prejaví, iba keď bude sústava vybudená v odpovedajúcom smere nuly. Ďalším problémom u mnohorozmerových systémov sú interakcie medzi jednotlivými vstupmi a výstupmi. Mieru interakcií vyjadruje RGA, čo je dobrý nástroj na určovanie párovania vstupov a výstupov pred návrhom decentralizovaného riadenia. Je zrejmé, že návrh decentralizovanej PI regulácie a centralizovanej LQ regulácie bol možný jak pre minimálne fázový tak aj pre neminimálne fázový systém. Tieto dva spôsoby regulácie priniesli v oboch prípadoch očakávané a uspokojivé výsledky. Z uvedených výsledkov je zrejmé, že v prípade neminimálne fázového systému, je jeho regulácia niekoľko násobne pomalšia oproti minimálne fázovému prípadu. To plynie aj z fyzikálnej interpretácie a rozdielnosti chovania v týchto dvoch prípadoch.

Uvedený návrh dynamického a stavového rozväzbovacieho regulátora bolo možné použiť len na minimálne fázový systém. Interakcie sú s použitím týchto regulátorov naozaj eliminované. Pre neminimálne fázový systém nie je možné navrhnúť regulátor, ktorý by eliminoval interakcie.

Model systému štyroch nádrží je názorným príkladom MIMO systému. Pre svoju jednoduchosť je preto vhodný ako výukový model pre názornú demonštráciu základných vlastností a riadenia MIMO systémov.

Literatúra

[1] Skogestad S., Postlethwaite I.: *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design.* Second ed., Wiley, Chichester, UK, 2005.

[2] Johansson, K. ,H.: The Quadruple-Tank Process: A Multivariable Laboratory Process with an Adjustable zero. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 8, (3), 456-465, 2000.

[3] Melichar, J.: *Decentralizované a hierarchické řízení: Učební text*. ZČU, Plzeň, 2008.

[4] Goodwin, G., Graebe, S., Salgado, M.,: *Control System Design*. Prentice Hall, New Jersey, USA, 2001.

[5] Johansson, K. H., Horch, A., Wijk , O., Hansson, A.: *Teaching Multivariable Control Using the Quadruple-Tank Process*. IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, USA, 1999.

[6] Havlena, V.; Štecha, J.: *Moderní teorie řízení*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2000.

[7] Havlena, V.; Štecha, J.: *Teorie dynamických systémů.* Vydavatelství ČVUT, Praha, 1999.

[8] Šebek, M.: *Systémy a řízení.* Prezentácie k prednáškam, ČVUT FEL, 2008, http://dce.felk.cvut.cz/e-kurzy.

[9] Katedra řídící techniky, FEL ČVUT.: *Internetová učebnice SARI*. 2008, http://dce.felk.cvut.cz/sari.

Príloha A
Obsah priloženého CD

K tejto práci je priložené CD, na ktorom je väčšina zdrojových kódov, simulačných schém a obrázkov použitých v tejto práci. Priložené CD obsahuje:

- Adresár DP_matlab: Zdrojové kódy a modely pre Matlab a Simulink.
- Adresár DP_text: Elektronickú verziu tejto diplomovej práce.