

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Návrh regulátorů typu lead/lag zajišťující
amplitudovou a fázovou bezpečnost

Praha, 2010

Autor: Jan Zábojník

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická
Katedra řídicí techniky

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: **Jan Zábojník**

Studijní program: Elektrotechnika a informatika (bakalářský), strukturovaný
Obor: Kybernetika a měření

Název tématu: **Návrh regulátorů typu lead/lag zajišťující amplitudovou a fázovou bezpečnost**

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se s metodou návrhu regulátorů zaručující amplitudovou a fázovou bezpečnost.
2. Navrhněte a v prostředí Matlab implementujte proceduru, která umožní tento návrh pro lead/lag regulátory.
3. Na základě experimentů se pokuste vytvořit univerzální metodiku pro tento způsob návrhu lead/lag regulátorů.

Seznam odborné literatury:

- [1] G.F. Franklin, J.D. Powell, A. Emami-Naeini: Feedback Control of Dynamic Systems. Prentice Hall, 2006
- [2] T. Bouška: Frekvenční metody návrhu regulátorů typu Lead a Lag. Bakalářská práce, katedra řídicí techniky, FEL ČVUT v Praze, 2009

Vedoucí: Ing. Petr Hušek, Ph.D.

Platnost zadání: do konce zimního semestru 2010/2011



prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry



doc. Ing. Boris Šimák, CSc.
děkan

V Praze dne 15. 1. 2010

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne _____

_____ podpis

Poděkování

Děkuji především vedoucímu této bakalářské práce Ing. Petru Huškovi, PhD., bez jehož cenných rad a odborných připomínek by tato práce nikdy nemohla vzniknout. Dále bych chtěl poděkovat všem, kteří mě v průběhu této práce přímo i nepřímo motivovali a podporovali.

Abstrakt

Cílem této bakalářské práce bylo vytvořit v MATLABu soubor procedur, který by umožňoval grafický návrh optimálních regulátorů typu Lead/Lag s ohledem na požadovanou fázovou a amplitudovou bezpečnost.

Implementovaná metoda návrhu je aplikovatelná na libovolný stabilní model soustavy - jeho přenos. Je založena na frekvenční metodě návrhu, která využívá tvarování Bodeho charakteristiky otevřené smyčky podle zadané fázové a amplitudové bezpečnosti. Nalezené regulátory jsou v uživatelské aplikaci znázorněny jako křivky v rovině, přičemž všechna řešení splní uživatelem zadané požadavky na fázovou a amplitudovou bezpečnost. Metoda, která vznikla na základě hledání univerzální metodiky návrhu Lead/Lag regulátorů, je dále obohacena o automatický výběr optimálních řešení, beroucí v úvahu polohou dominantních pólů a nul regulátorů.

Díky této práci byl rozšířen jednoduchý nástroj, který vznikl v rámci bakalářské práce na blízké téma, o návrh optimálních Lead/Lag regulátorů.

Abstract

The purpose of this bachelor thesis was to create in MATLAB a procedure set, that would allow the graphic design of optimal Lead/Lag controllers with regard to the required phase and amplitude margin.

The implemented design method is applicable to any model of a stable system - its transfer function. It is based on frequency design method, which uses the shaping of an open-loop Bode characteristic according to a given phase and amplitude margin. Computed regulators are illustrated in the user application as curves in the plane. All solutions meet exact user specified requirements for the phase and amplitude margin. Method, which was based on finding a universal design methodology of the Lead/Lag controllers, is further enhanced by automatic selection of optimal solutions, according to the location of the dominant poles and zeros of the regulator.

Through this thesis a simple tool, that was developed within the thesis with a close subject, was extended of optimal design of Lead/Lag controllers.

Obsah

Seznam obrázků	vii
1 Úvod	1
1.1 Cíl bakalářské práce	1
2 Teoretický rozbor	2
2.1 Řízení pomocí zpětné vazby	2
2.2 Regulátory typu Lead/Lag	4
2.2.1 Lag regulátor	5
2.2.2 Lead regulátor	6
2.3 Vliv polohy pólů a nul na dynamiku systému	7
2.3.1 Amplitudová bezpečnost (GM)	10
2.3.2 Fázová bezpečnost (PM)	11
3 Implementace metody	12
3.1 Návrh regulátoru Lead/Lag	12
3.1.1 Návrh splňující fázovou bezpečnost	15
3.1.2 Návrh splňující amplitudovou bezpečnost	16
3.2 Hledání optimálního regulátoru	17
3.2.1 Lag regulátor	20
3.2.2 Lead regulátor	22
3.3 Implementace do GUI	26
4 Příklady	28
4.1 Porovnání s běžně používanou metodou	28
4.1.1 Standardní metoda návrhu	29
4.1.2 Implementovaná metoda návrhu	32
4.2 Návrh pomocí aplikace	35

4.2.1	Optimální Lead regulátor	36
4.2.2	Optimální Lag regulátor	38
5	Závěr	40
	Literatura	42
A	Obsah příloženého CD	I

Seznam obrázků

2.1	Blokové schéma zpětnovazebního obvodu	2
2.2	Frekvenční charakteristika Lag regulátoru	5
2.3	Frekvenční charakteristika Lead regulátoru	6
2.4	Přechodová charakteristika	7
2.5	Polohy pólů a přechodové charakteristiky	8
2.6	Polohy pólů a přechodové charakteristiky	9
2.7	Nyquistova charakteristika s vyznačenou PM a GM	10
2.8	Bodeho charakteristika s vyznačenou PM a GM	11
3.1	Podmínky existence regulátorů [-, dB]	14
3.2	Nalezené regulátory pro $PM < PM_G$	18
3.3	Nalezené regulátory pro $PM > PM_G$	18
3.4	Nalezené regulátory pro $GM < GM_G$	19
3.5	Nalezené regulátory pro $GM > GM_G$	19
3.6	Řešení a přechodové charakteristiky (Lag: $PM < PM_G$)	20
3.7	Řešení a přechodové charakteristiky (Lag: $PM > PM_G$)	21
3.8	Řešení a přechodové charakteristiky (Lag: $GM < GM_G$)	21
3.9	Řešení a přechodové charakteristiky (Lag: $GM > GM_G$)	22
3.10	Řešení a přechodové charakteristiky (Lead: $PM < PM_G$)	23
3.11	Řešení a přechodové charakteristiky (Lead: $PM > PM_G$)	24
3.12	Řešení a přechodové charakteristiky (Lead: $GM < GM_G$)	25
3.13	Řešení a přechodové charakteristiky (Lead: $GM > GM_G$)	25
3.14	Ukázka vypočtených křivek v GUI	26
3.15	Ukázka vybrané metody návrhu v GUI	27
4.1	Př 1. - bodeho charakteristika nekompensovaného systému	29
4.2	Př 1. - Bodeho charakteristika kompenzovaného systému	30
4.3	Př 1. - Bodeho charakteristika kompenzovaného systému	31

4.4	Př 1. - Přechodová charakteristika kompenzovaného systému	32
4.5	Př 1. - Bodeho charakteristika kompenzovaného systému	33
4.6	Př 1. - Přechodové charakteristiky kompenzovaných systémů	34
4.7	Př 1. - Přechodové charakteristiky pro různé ω_C	34
4.8	Př 2. - Okno aplikace s provedeným návrhem $PM = 25^\circ$	35
4.9	Př 2. - Vybraná řešení	36
4.10	Př 2. - Přechodové charakteristiky vybraných řešení	36
4.11	Př 2. - Porovnání regulátorů	37
4.12	Př 2. - Nalezená řešení	38
4.13	Př 2. - Vybraná řešení	38
4.14	Př 2. - Přechodové charakteristiky vybraných řešení	39
4.15	Př 2. - Porovnání regulátorů	39

Kapitola 1

Úvod

Již od pradávna lidé toužili kontrolovat a řídit přírodní i umělé děje kolem sebe. Od touhy udržet oheň, spoutat vítr až po rozbití jádra a cesty ke hvězdám. Zprvu jednoduché stroje a mechanismy se tak s pokrokem stávaly stále složitější a lidé na jejich plné řízení přestali stačit. Logickým krokem bylo svěřit kontrolu nad těmito procesy k tomu speciálně navrženým stojům, regulátorům. Jejich použití v kombinaci se všudypřítomnou zpětnou vazbou umožnilo skutečný rozvoj techniky až do podoby, jak jí známe dnes.

S vývojem ve všech oblastech vědy se měnily i metody návrhu. Z experimentálních, ve 40. letech minulého století (Ziegler-Nicols), přes sofistikované frekvenční, až po dnešní nejmodernější polynomiální metody ležící na nejnovějších poznacích matematiky. Komplexnost většiny z nich jim, v době jejich objevení, znemožňovala masové nasazení do praxe. Proto se hledaly a stále hledají postupy pro jejich zjednodušení.

1.1 Cíl bakalářské práce

Cílem této bakalářské práce je popis, implementace a aplikace obdobné zjednodušující metody návrhu Lead/Lag regulátoru s ohledem na fázovou a amplitudovou bezpečnost u spojitých SISO¹ systémů.

Úvodní část je zaměřena na analýzu vlivu polohy pólů a nul na dynamiku systému a na vlastnosti Lead/Lag regulátorů ve časové a frekvenční oblasti. V následující části je odvozen matematický popis implementované metody a hledání jejího optimálního řešení. Závěrečná část se věnuje popisu GUI a ověření funkčnosti metody na několika vybraných systémech.

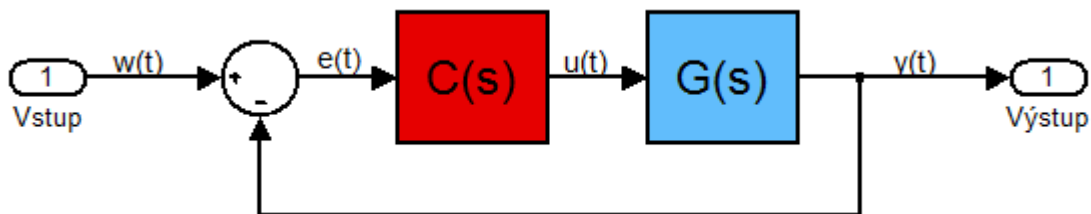
¹Systém s jedním vstupem a jedním výstupem.

Kapitola 2

Teoretický rozbor

2.1 Řízení pomocí zpětné vazby

Abychom se mohli začít zabývat návrhem řídicích systémů je třeba zavést a odvodit některé pojmy, které se využijí při popisu systémů a jejich vlastností. Základem je zapojení regulačního obvodu na obr. 2.1.



Obrázek 2.1: Blokové schéma zpětnovazebního obvodu

Blok označený $G(s)$ obsahuje přenos¹ řízené soustavy. V teorii řízení se vyjadřuje následujícím vzorcem.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (2.1)$$

Má-li soustava pouze jediný vstup u a výstup y hovoříme o tzv SISO systému. Jeho přenos, který budeme nadále využívat, má tvar

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.2)$$

¹Přenos je označení podílu Laplaceova obrazu výstupu systému ku jeho vstupu.

Blok $C(s)$ obsahuje přenos regulátoru. Stejně jako soustavy je i jeho přenos tvořen podílem dvou Laplaceových obrazů, výstupu a vstupu.

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \quad (2.3)$$

Vstupem do regulátoru je regulační odchylka e , která je definována jako rozdíl žádané tzv referenční hodnoty w a hodnoty na výstupu soustavy $G(s)$ y . Výstup regulátoru² u je přiveden na vstup řízené soustavy.

Sériovou kombinací přenosů regulátoru a soustavy získáme přenos otevřené smyčky

$$L(s) = C(s)G(s), \quad (2.4)$$

popisující chování soustavy bez zavedené záporné zpětné vazby na vstup. Použitím pouze této sériové kombinace získáme tzv přímo-vazební řízení. Jeho výhody proti zpětnovazebnímu jsou především jednodušší návrh a schopnost řídit jakoukoliv stabilní soustavu. Mezi nevýhody patří nemožnost regulovat nestabilní soustavu. V praxi se přenos otevřené smyčky používá ke zjištění některých základních vlastností systému, který získáme uzavřením záporné zpětné vazby.

Nejběžnějším případem je jednotková záporná vazba z výstupu, po jejím uzavření má výsledná soustava přenos

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}. \quad (2.5)$$

Její zavedením získáme informaci o chování výstupní veličiny a změníme dynamiku celého systému. Výhody z toho plynoucí jsou následující. Vhodnou volbou regulátoru dokážeme stabilizovat i nestabilní soustavu a zrychlit její dynamiku přemístěním pólů uzavřené smyčky. Mezi nevýhody patří složitější návrh a při špatném návrhu regulátoru dokonce destabilizace stabilní soustavy.

Mezi nejběžněji používané regulátory patří P, PI, PD, PID, Lead, Lag. Z nichž poslední dva mají ekvivalentní přenosy a liší se pouze vlastnostmi.

²Akční zásah.

2.2 Regulátory typu Lead/Lag

Skupina regulátorů typu Lead/Lag obsahuje regulátory s přenosem v následujícím tvaru (převzato z [4])

$$C(s) = K \frac{\alpha T s + 1}{T s + 1}, \quad \alpha, T, K \in (0, \infty), \quad (2.6)$$

kde α a T jsou konstanty typické pro tento typ regulátoru. Konstanta K je zde zavedena z jediného důvodu a to jako kompenzace jednotkového zesílení regulátoru. Bez ní by nebylo možné ovlivňovat ustálenou hodnotu³ výsledného systému, pro kterou platí vzorec

$$y_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{C(0)G(0)}{1 + C(0)G(0)} = \frac{K \cdot \frac{b_0}{a_0}}{1 + K \cdot \frac{b_0}{a_0}} = \frac{K b_0}{K b_0 + a_0}. \quad (2.7)$$

Konstanty a_0 , b_0 odpovídají koeficientům přenosu soustavy u členů s^0 . Obsahuje-li soustava astatismus alespoň prvního řádu pak $a_0 = 0$ a $y_{ss} = 1$. Výsledný systém sleduje skokovou referenci bez odchylky.

Jednoduchou úpravou získáme vzorec umožňující výpočet zesílení K pro žádanou ustálenou hodnotu

$$K = \frac{a_0}{b_0} \frac{y_s}{1 - y_s}. \quad (2.8)$$

V praxi se běžně nejprve zesílení K pro požadovanou ustálenou hodnotu vypočte předem a zahrne do soustavy. Konkrétní návrh regulátoru se pak provádí pro již kompenzovanou soustavu. Vyjmutím zesílení získá rovnice regulátoru tvar

$$C(s) = \frac{\alpha T s + 1}{T s + 1}. \quad (2.9)$$

Z této rovnice plyne následující:

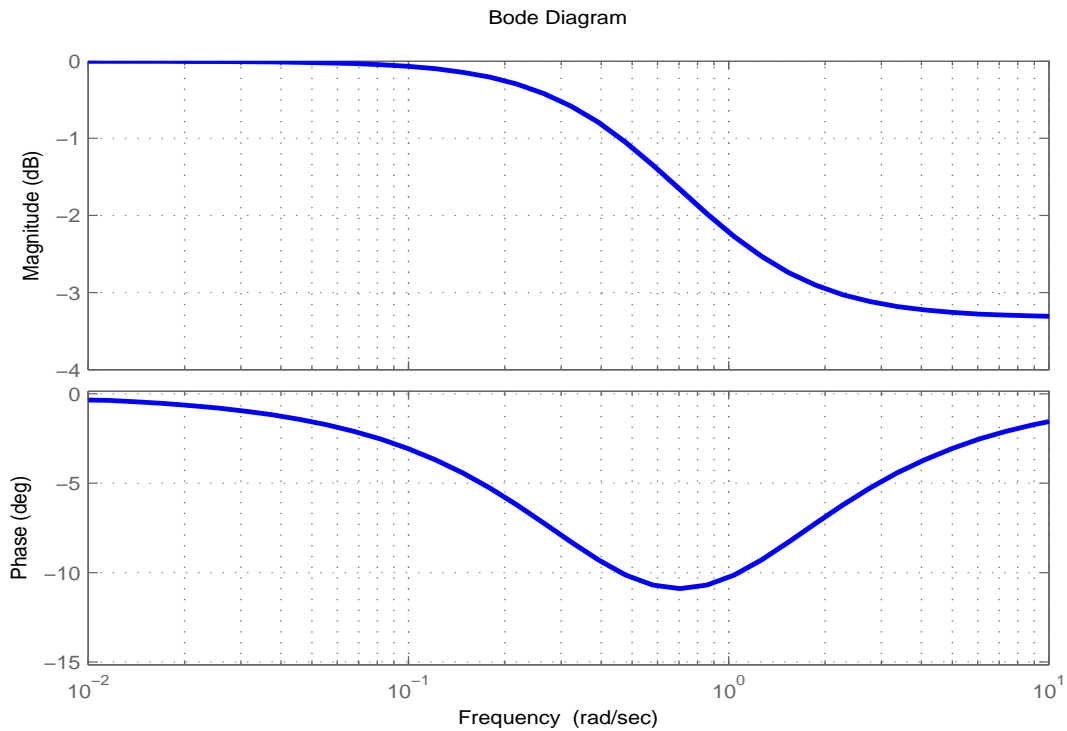
- $-\frac{1}{\alpha T}$ je jedinou nulou regulátoru
- $-\frac{1}{T}$ je jeho jediným pólem.

Koeficient α tedy udává vzdálenost nuly regulátoru od pólu. Rozdělením intervalu α na $\alpha < 1$ a $\alpha > 1$ získáme dva druhy regulátorů. První z nich má dominantní pól a druhý nulu. Pro $\alpha < 1$ se regulátor nazývá Lag, ekvivalentně k tomu se regulátor s $\alpha > 1$ nazývá Lead.

³Na jednotkovou změnu reference, tzv jednotkový skok.

2.2.1 Lag regulátor

Pro konkrétní metodu návrhu je nutná znalost jeho *frekvenční charakteristiky*, neboli průběhu fáze a zesílení vstupního signálu v závislosti na jeho frekvenci. Pro Lag regulátor má charakteristika typický průběh:



Obrázek 2.2: Frekvenční charakteristika Lag regulátoru

Z frekvenční charakteristiky je patrné, že u něj dochází k zápornému fázovému posunu. Tento posun se nachází v intervalu $(-90^\circ, 0^\circ)$ a je závislý pouze na parametru α . V limitním případě $\alpha \rightarrow 0$ se blíží -90° .

Pro výpočet maximálního záporného fázového posunu platí vztah:

$$\varphi_m = \arctan(\sqrt{\alpha}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right). \quad (2.10)$$

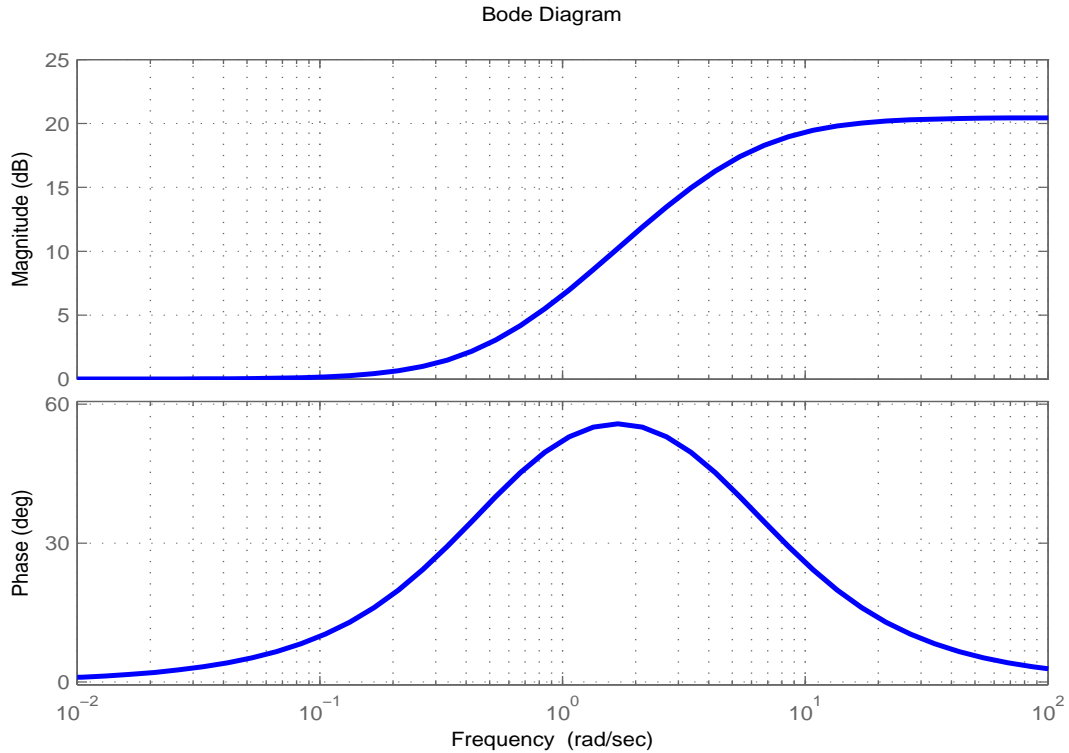
Frekvence ω_m , na které se nachází maximální záporný fázový posun, lze vypočítat ze vztahu:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot T}. \quad (2.11)$$

Mezi obecné vlastnosti Lag regulátoru popsaného přenosem (2.9) patří: Zmenšení šířky přenášeného pásma. Jednotkové zesílení neovlivňující ustálenou hodnotu. Maximum akčního zásahu při jednotkové změně reference nikdy nepřekročí svou velikostí 1.

2.2.2 Lead regulátor

Obdobně jako u Lag regulátoru je i u Lead regulátoru nutná znalost jeho frekvenční charakteristiky. Ta má pro Lead regulátor typický průběh:



Obrázek 2.3: Frekvenční charakteristika Lead regulátoru

Z frekvenční charakteristiky je patrné, že u něj dochází, na rozdíl od Lag regulátoru, ke kladnému fázovému posunu. Ten se nachází v intervalu $(0^\circ, 90^\circ)$ a je závislý pouze na parametru α . V limitním případě $\alpha \rightarrow \infty$ se blíží 90° . Pro výpočet jeho maxima a frekvenci ω_m , na které se nachází, platí vzorce (2.10), (2.11), uvedené u Lag regulátoru.

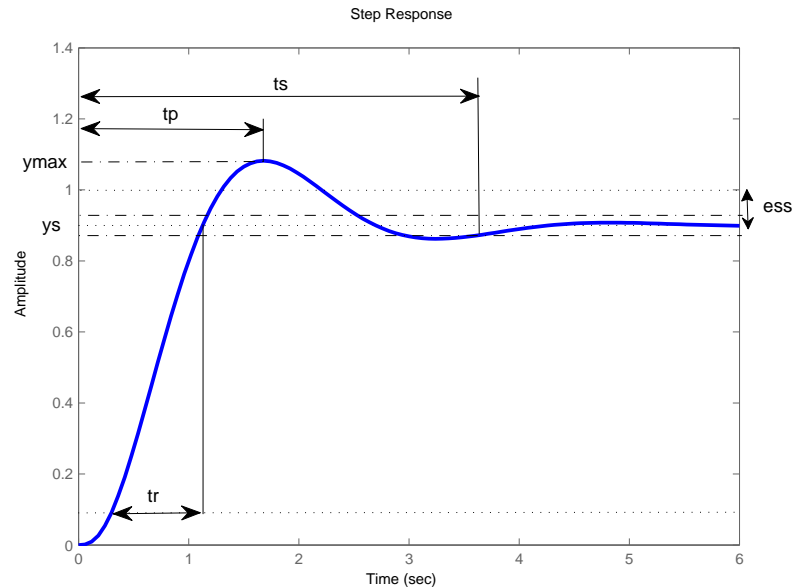
Mezi obecné vlastnosti Lead regulátoru popsaného přenosem (2.9) patří: Zvětšení šířky přenášeného pásma. Jednotkové zesílení neovlivňující ustálenou hodnotu. Maximum akčního zásahu při jednotkovém skoku vždy překročí svou velikostí 1 a nastává v čase $t = 0$.

Zmíněné maximum lze vypočítat dle vzorce:

$$u_{\max} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\alpha \cdot T \cdot s + 1}{T \cdot s + 1} = \alpha \quad (2.12)$$

2.3 Vliv polohy pólů a nul na dynamiku systému

Nejvíce o systému prozradí jeho přechodová charakteristika, neboli odezva systému na jednotkovou změnu reference. Její parametry jsou znázorněny na obr. 2.4.



Obrázek 2.4: Přechodová charakteristika

V závislosti na konkrétních požadavcích se jejím parametrům přiřazuje různá důležitost. Všeobecně nejdůležitějším parametrem je t_s , udávající čas, za který se výstupní veličina $y(t)$ přiblíží k ustálené hodnotě y_s s určitou odchylkou, zpravidla 2%.

Dalšími parametry jsou doba prvního překmitu t_s a jeho amplituda y_{\max} . Systém s překmitem má kratší dobu ustálení než systém bez něj. Ustálená regulační odchylka e_{ss} udává rozdíl reference a výstupní veličiny. Doba regulace t_r označuje čas, za který se hodnota výstupu změní z $0,1y_s$ na $0,9y_s$.

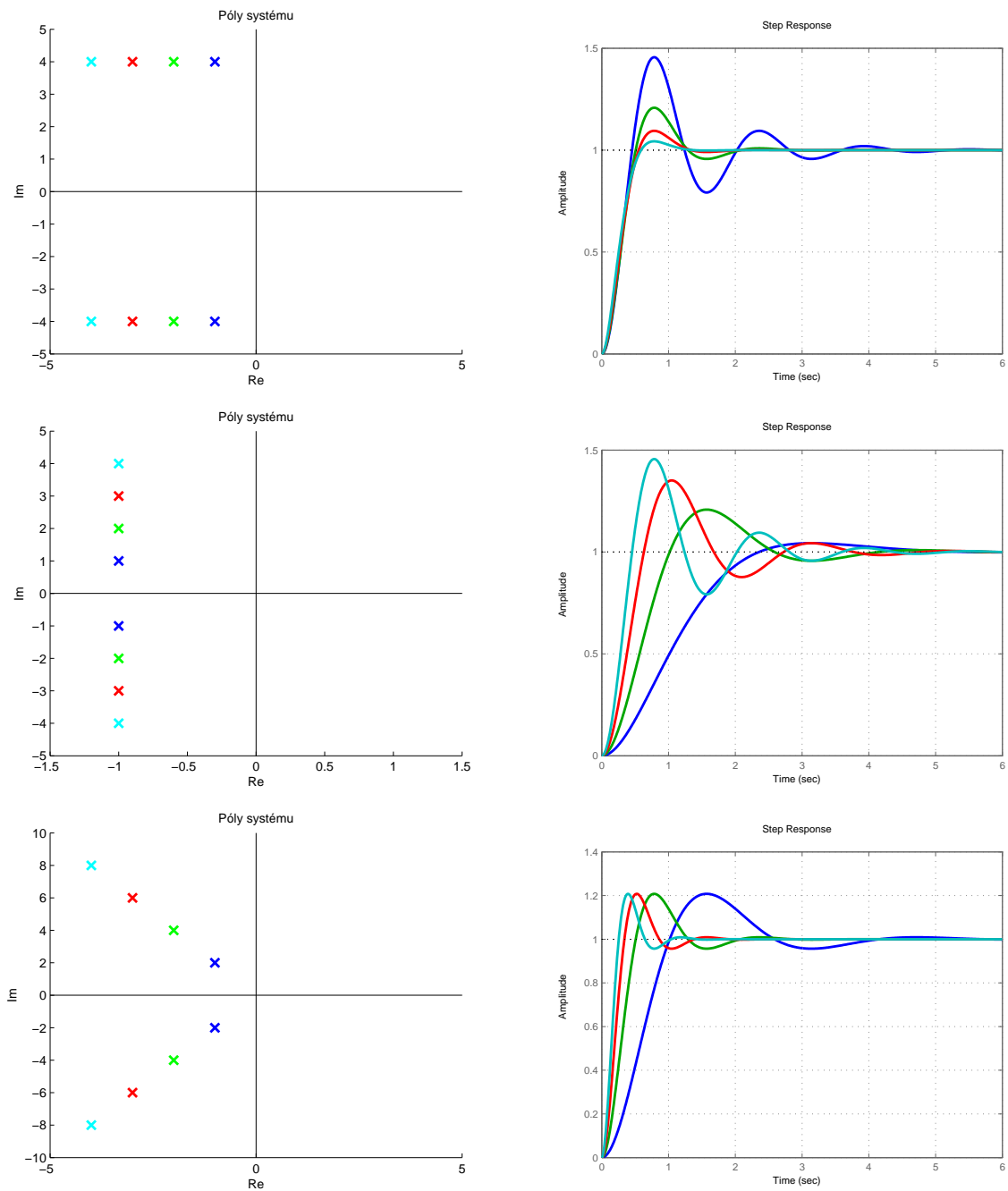
Pro pochopení průběhu přechodové charakteristiky je třeba zaměřit na způsob jakým vzniká. Z rovnice (2.5) je vidět, že výsledný systém se dá, stejně jako soustava, popsat podílem Laplaceových obrazů.

Převědeme-li přenos (2.5) do tvaru

$$T(s) = \frac{(s + n_b)(s + n_{b-1}) \dots (s + n_0)}{(s + p_a)(s + p_{a-1}) \dots (s + p_0)}, \quad (2.13)$$

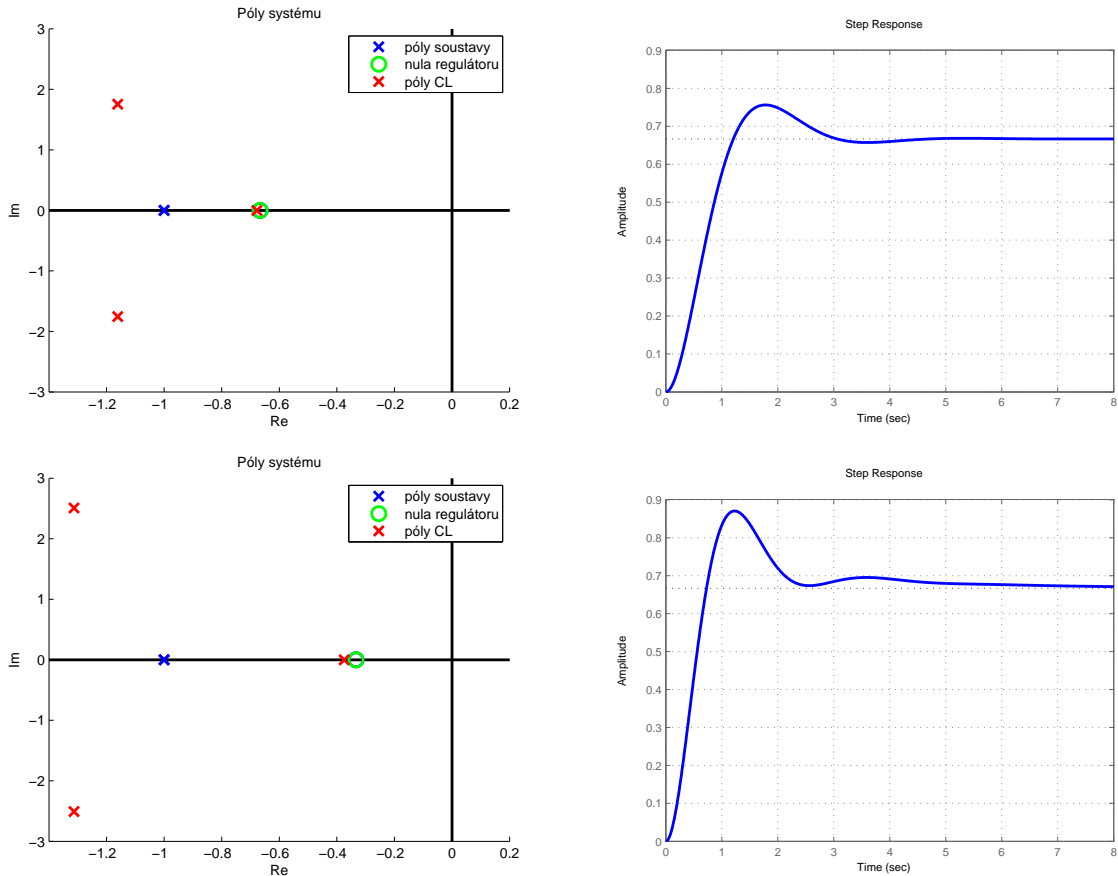
pak koeficienty $-n_b, -n_{b-1}, \dots, -n_0$ nazýváme nuly systému a $-p_a, -p_{a-1}, \dots, -p_0$ jeho póly. Říkáme, že je přenos ve tvaru pólů a nul.

Právě poloha pólů a nul určuje dynamiku systému. Na obr. 2.5 je znázorněno několik typických umístění pólů a jim odpovídajících přechodových charakteristik.



Obrázek 2.5: Polohy pólů a přechodové charakteristiky

Změna dynamiky systému po přidání nuly a uzavření ZZV je znázorněna na následujícím obrázku. Pro jeho vykreslení byla zvolena soustava s trojnásobným pólem v nule a regulátor s jednou proměnnou nulou.



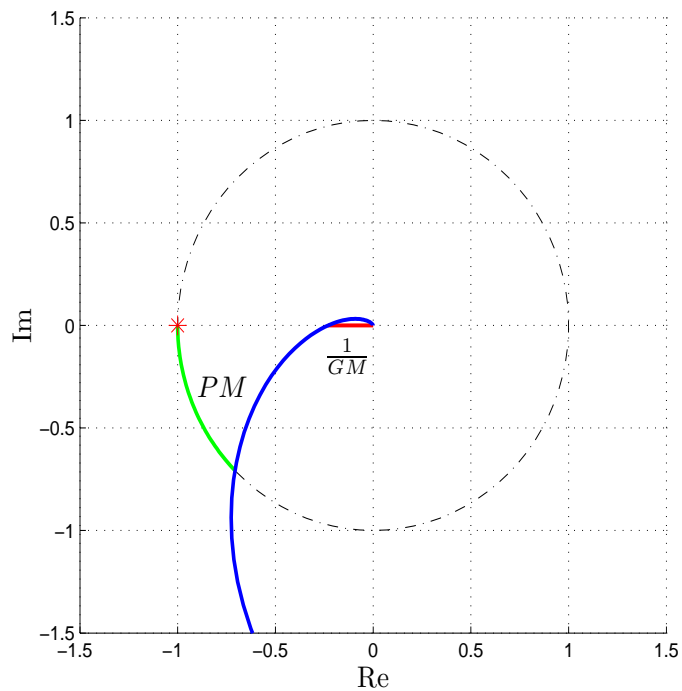
Obrázek 2.6: Polohy pólů a přechodové charakteristiky

Z obr. 2.6 je vidět, že přidaná nula po uzavření ZZV nezmění svojí polohu, má ovšem tendenci k sobě „přitahovat“ jeden z pólů. Pokud se nachází blízko reálné osy, způsobí nežádoucí integrační charakter celé soustavy, jak je vidět z druhého průběhu.

Nyní, když je rozebrán vliv pólů a nul na výslednou soustavu v časové oblasti, se zaměříme na oblast frekvenční. Tu popisují Bodeho a Nyquistova charakteristika. Jejich vhodným tvarováním lze bez konkrétní znalosti polohy pólů a nul ovlivnit dynamika systému, který vznikne uzavřením ZZV. Pro tuto metodu jsou stěžejní pojmy fázová a amplitudová bezpečnost.

2.3.1 Amplitudová bezpečnost (GM)

Udává hodnotu, kolikrát lze zvětšit zesílení v přímé větvi, než se zpětnovazební systém dostane na mez stability. Je tedy ochranou soustavy vůči nejistotě v zesílení⁴. Nejlépe se znázorňuje v Nyquistově charakteristice znázorněné na obr. 2.7.



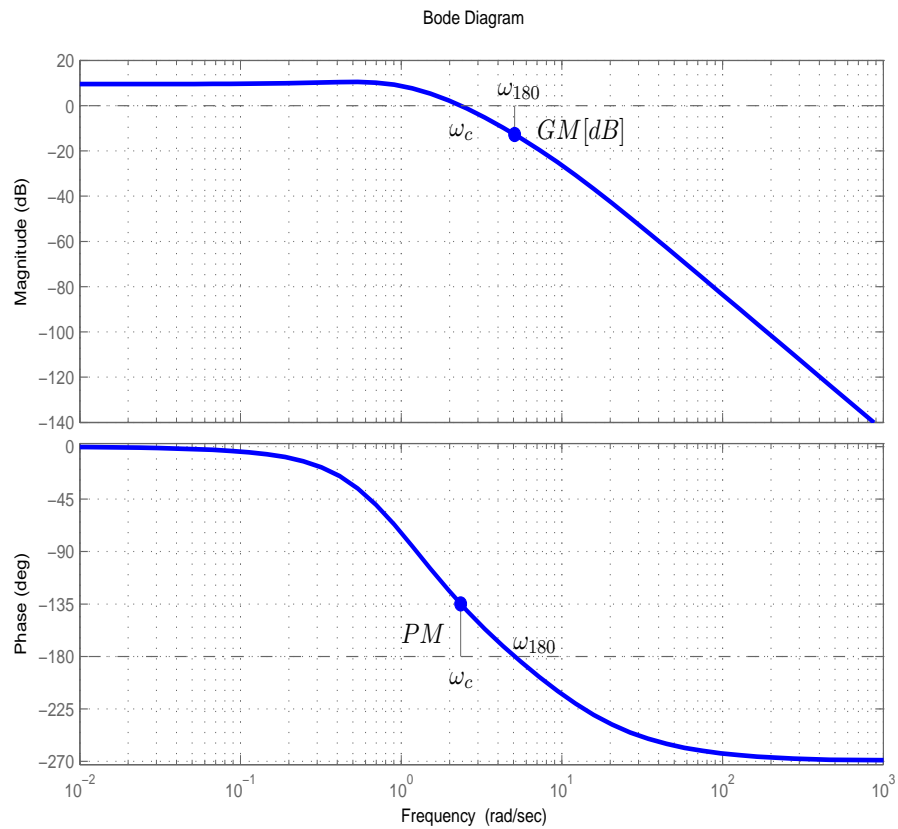
Obrázek 2.7: Nyquistova charakteristika s vyznačenou PM a GM

Klíčová je vzdálenost průsečíku reálné osy a charakteristiky od bodu -1. Pokud se nachází v intervalu $(-1,0)$ je systém stabilní. Překročí-li hodnotu -1, soustava se stane nestabilní.

⁴Splnění konkrétní GM zajistí určitou míru robustnosti systému.

2.3.2 Fázová bezpečnost (PM)

Určuje o kolik se může při jednotkovém zesílení změnit fáze systému, než dojde k protnutí kritického bodu -1 . Jedná se o ochranu systému vůči neurčitosti v jeho fázi, která může vzniknout například dopravním zpožděním. Na obr. 2.8 je přehledně znázorněna spolu s GM.



Obrázek 2.8: Bodeho charakteristika s vyznačenou PM a GM

Kapitola 3

Implementace metody

Níže uvedená metoda návrhu Lead/Lag regulátorů (kapitola 3.1) byla převzata z [5] a dále rozšířena o dodatečné podmínky umožňující návrh množiny Lead/Lag regulátorů, které po spojení s regulovanou soustavou zajistí požadovanou fázovou či amplitudovou bezpečnost. Postup je totožný pro obě varianty návrhu, liší se pouze ve stanovených podmínkách, dvě pro každou bezpečnost. Princip metody spočívá v opakovaném tvarování frekvenční charakteristiky¹ pro všechny vhodné frekvence. Na rozdíl od běžně používané iterativní metody, popsané v [4](doplňkové příklady ke 4. přednášce, str. 40), zaručí požadované bezpečnosti bez odchylky.

Nejprve pomocí elementárních úprav přenosů soustavy i regulátoru odvodíme rovnice a stanovíme podmínky pro jednotlivé bezpečnosti. Poté se budeme zabývat určením odpovídajícího rozsahu frekvencí, pro který má smysl rovnice řešit a závěr kapitoly bude věnován experimentální metodice hledání optimálních řešení a jejich implementaci v upraveném GUI.

3.1 Návrh regulátoru Lead/Lag

Regulátory, splňující pro určitou frekvenci PM a GM, budeme hledat jako přenosy ve tvaru (2.9), které upraví zesílení a fázi otevřené smyčky $L(j\omega)$ na požadované hodnoty.

Vyjdeme ze znalosti vztahů pro amplitudu A a fázi regulátoru p na frekvenci ω_C .

$$|G(j\omega_C)| = 10^{\frac{A}{20}} = c \quad , \quad \angle G(j\omega_C) = p. \quad (3.1)$$

Umocněním první rovnice a dekompozicí druhé na fázový příspěvek od čitatele

¹V zahraniční literatuře je tato metoda běžně označována jako tzv Loop-Shaping.

a jmenovatele získáme rovnice

$$\frac{1 + (\alpha T \omega_C)^2}{1 + (T \omega_C)^2} = c^2 \quad , \quad \tan^{-1}(\alpha T \omega_C) - \tan^{-1}(T \omega_C) = p. \quad (3.2)$$

Dále, pro zpřehlednění postupu, zavedeme substituce

$$\sigma = \alpha T \omega_C \quad , \quad \delta = \tan(p) \quad (3.3)$$

a využijeme součtový vzorec pro tangens

$$\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \tan(y)}. \quad (3.4)$$

Výsledné rovnice upravíme do podoby, která umožní jejich vzájemné dosazení.

$$\frac{1 + \sigma^2}{1 + (\frac{\sigma}{\alpha})^2} = c^2 \quad , \quad \frac{\sigma}{\alpha} = \frac{\sigma - \delta}{1 + \sigma \delta} \quad (3.5)$$

Dosazením druhé rovnice do první získáme rovnici pouze s neznámou σ

$$(1 + \sigma^2)(1 + \sigma \delta)^2 = c^2[(1 + \sigma \delta)^2 + (\sigma - \delta)^2], \quad (3.6)$$

která lze zjednodušit na tvar

$$(1 + \sigma^2)[(1 + \sigma \delta)^2 - c^2(1 + \delta^2)] = 0. \quad (3.7)$$

Rovnici (3.7) lze za předpokladu $\alpha, \omega_C, T > 0$, pramenícího ze základních požadavků na Lead/Lag regulátor, převést na rovnici kvadratickou

$$\delta^2 \sigma^2 + 1 - c^2(1 + \delta^2) = 0, \quad (3.8)$$

která má pro $\alpha, \omega_C, T > 0$ jediné řešení

$$\sigma = \frac{c\sqrt{1 + \delta^2} - 1}{\delta}. \quad (3.9)$$

Nyní lze, pomocí matematických úprav rovnic (3.3),(3.5) a (3.9) , získat vzorce pro výpočet konstant α, T

$$\alpha = \frac{c(c\sqrt{1 + \delta^2} - 1)}{c - \sqrt{1 + \delta^2}} \quad , \quad T = \frac{c - \sqrt{1 + \delta^2}}{c\omega_C(c\sqrt{1 + \delta^2} - 1)}. \quad (3.10)$$

Z rovnic (3.10) pramení jistá omezení, daná jejich řešením.

- Pro Lead regulátor musí vždy platit

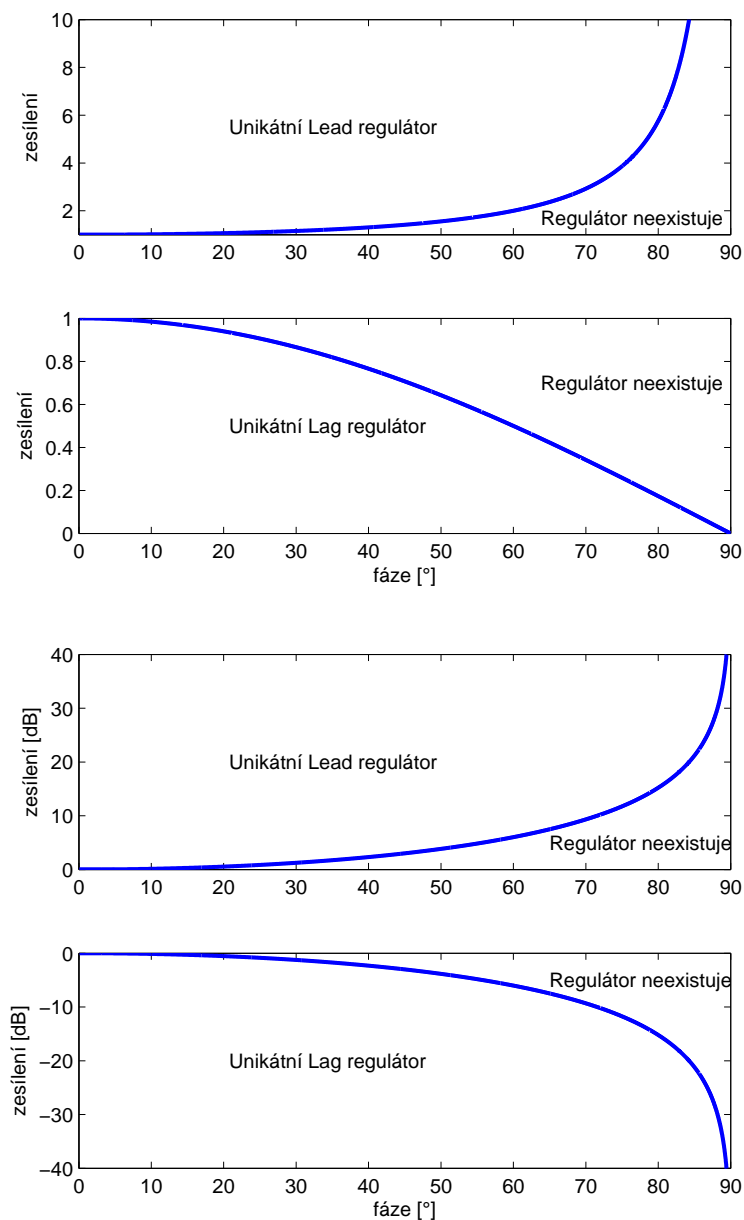
$$\sqrt{1 + \delta^2} < c. \quad (3.11)$$

- Pro Lag regulátor musí vždy platit

$$\sqrt{1 + \delta^2} > c. \quad (3.12)$$

Platí-li výše uvedené podmínky, řešení rovnic (3.10) existuje a je unikátní.

Na obr. 3.1 jsou podmínky popsané rovnicemi (3.11) a (3.12) vyneseny v lineárních a logaritmických souřadnicích.



Obrázek 3.1: Podmínky existence regulátorů [-, dB]

Nyní již známe vztahy, umožňující výpočet konstant regulátoru pro určitou frekvenci. Jejich modifikací lze provést návrh splňující jednu ze zadaných bezpečností.

3.1.1 Návrh splňující fázovou bezpečnost

Pro splnění požadavku PM musí výsledný přenos otevřené smyčky splňovat následující podmínky

$$|L(j\omega_C)| = 0dB \quad , \quad \angle L(j\omega_C) = -180^\circ + PM. \quad (3.13)$$

Jedná se o korekci skutečných hodnot amplitudy $|G(j\omega_C)|$ a fáze $\angle G(j\omega_C)$ soustavy na požadované hodnoty amplitudy $|L(j\omega_C)|$ a fáze $\angle L(j\omega_C)$ otevřené smyčky. Tuto změnu zajistí regulátor, pro jehož návrh platí rovnice

$$\delta = \tan(-180^\circ - \angle G(j\omega_C) + PM) \quad , \quad c = \frac{1}{|G(j\omega_C)|} \quad (3.14)$$

Jejich dosazení do (3.10) stojí v cestě pouze zjištění frekvence ω_C . Zvolením ω_C jako parametru vyvstává otázka, pro jaký rozsah frekvencí má smysl uvedenou soustavu řešit. Z kapitol 2.2.1 a 2.2.1 známe limitní případy hodnoty fáze regulátoru. Právě tyto hodnoty tvoří okrajové podmínky ohraničující pásmo frekvencí ω_C .

Následující postup hledání těchto frekvencí vychází z [1]. Liší se pouze svou jednotností pro oba regulátory, popsané přenosem (2.9).

Využijeme možnosti definovat frekvenční přenos soustavy $G(j\omega)$, pro určitou frekvenci ω ,jako komplexní číslo z , pro které platí

$$\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} = \tan(\arg(G(j\omega))). \quad (3.15)$$

Dosazením tohoto přenosu do předchozí rovnice, spolu s uvážením maximálního fázového posunu Lag regulátoru -90° , získáme rovnici umožňující jednoduchý výpočet frekvence ω_{\min}

$$\frac{\text{Im}(G(j\omega))}{\text{Re}(G(j\omega))} = \tan(PM - 180 + 90). \quad (3.16)$$

Tuto rovnici je vhodné upravit do tvaru umožňujícího její analytické řešení

$$\text{Im}(G(j\omega)) - \text{Re}(G(j\omega)) \cdot \tan(PM - 180 + 90) = 0. \quad (3.17)$$

Jejími řešeními jsou kandidáti na minimální frekvenci. Správnou hodnotu ω_{\min} získáme volbou nejmenší hodnoty po vytrídění komplexních a záporných čísel (frekvence musí být kladné reálné číslo).

Analogicky k tomu lze stanovit maximální frekvenci ω_{\max} . Postup je totožný, pouze uvažujeme maximální fázový posun Lead regulátoru $+90^\circ$. Dosazením této hodnoty do (3.16) získáme rovnici

$$\frac{\text{Im}(G(j\omega))}{\text{Re}(G(j\omega))} = \tan(PM - 180 - 90). \quad (3.18)$$

Porovnáním (3.16) a (3.18) dojdeme k závěru, že jsou totožné. Funkce tangens totiž má periodu π . Tohoto poznatku lze využít k jejich jednoduchému řešení. Rovnici (3.17) vyřešíme pouze jednou a vybereme první dvě nejmenší vyhovující hodnoty². Ty prohlásíme za ω_{\min} a ω_{\max} .

3.1.2 Návrh splňující amplitudovou bezpečnost

Pro splnění požadavku GM musí pro výsledný přenos otevřené smyčky platit následující podmínky

$$|L(j\omega_C)| = \frac{1}{GM} \text{ dB} \quad , \quad \angle L(j\omega_C) = -180^\circ. \quad (3.19)$$

Jedná se stejně jako v předchozím případě o korekci zesílení a fáze soustavy na výše uvedené hodnoty. Pro tento typ návrhu samozřejmě platí jiné rovnice

$$\delta = \tan(-180^\circ - \angle G(j\omega_C)) \quad , \quad c = \frac{1}{GM \cdot |G(j\omega_C)|}. \quad (3.20)$$

Nyní se zaměříme na hledání frekvencí, pro něž má smysl hledat řešení. Vyjdeme ze vztahu (3.15) a dosadíme do něj maximální fázový posun Lag regulátoru -90° .

$$\frac{\text{Im}(G(j\omega))}{\text{Re}(G(j\omega))} = \tan(-180 + 90) \quad (3.21)$$

Rovnice tedy popisuje hledání průsečíku frekvenční charakteristiky s reálnou osou. Proto ji upravíme do tvaru

$$\text{Re}(G(j\omega)) = 0. \quad (3.22)$$

Jejím vyřešením získáme vhodné kandidáty na frekvenci ω_{\min} . Pro ně platí stejná omezení, jako v 3.1.1. Pro určení frekvence ω_{\min} dosadíme do vztahu (3.15) maximální fázový posun Lead regulátoru $+90^\circ$.

$$\frac{\text{Im}(G(j\omega))}{\text{Re}(G(j\omega))} = \tan(-180 - 90) \quad (3.23)$$

Rovnice (3.21) a (3.23) jsou opět totožné. Stejně jako v případě PM vybereme z vyhovujících nalezených řešení dvě nejmenší a prohlásíme je za ω_{\min} a ω_{\max} .

²Při nalezení pouze jediné frekvence ω_{\min} můžeme uměle vypočítat nové hodnoty $\omega_{\max} = 10^3 \cdot \omega_{\min}$ a $\omega_{\min} = 10^{-3} \cdot \omega_{\min}$. Tato volba zajistí nalezení většiny Lead/Lag regulátorů i pro astatické systémy.

3.2 Hledání optimálního regulátoru

Jak bylo zmíněno v 2.3, nároky, kladené na průběh přechodové charakteristiky, se liší v závislosti na konkrétní aplikaci. Abychom mohli rozhodovat o kvalitě vybraného regulátoru, přiřadíme parametrům přechodové charakteristiky výsledného systému určitou váhu. Váhy parametrů z následujícího seznamu postupně klesají.

1. Doba ustálení t_s musí být co nejkratší.
2. Nežádoucí integrační charakter systému musí být co nejmenší.
3. Doba regulace t_r by měla být co nejkratší.

Pokud nějaký regulátor splní všechna tato kritéria, bude vybrán jako optimální. Ideálním cílem by bylo nalezení univerzálního postupu, který by umožnil jeho jednoduchý návrh, pouze na základě znalosti frekvenční charakteristiky systému $G(s)$. Abychom se o to mohli pokusit, je třeba provést několik kroků.

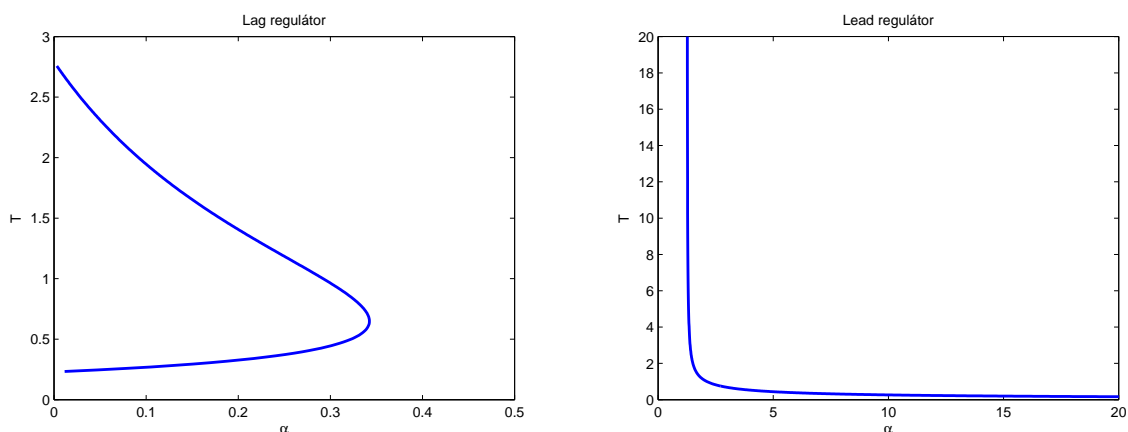
1. Vypočítat všechny regulátory splňující zadané parametry.
2. Na základě experimentu vybrat z řešení jeden bod či pásmo, v němž se nachází „optimální“ regulátory.
3. Ověřit platnost předchozího bodu pro různé soustavy.

Při hledání algoritmu pro nalezení optimálního regulátoru se budeme držet tohoto vytyčeného postupu. Nejprve je třeba zjistit, jaký tvar mají křivky nalezených Lead a Lag regulátorů, pro určité parametry. Experimentálně byly porovnány odlišnosti tvaru křivek pro různé hodnoty PM a GM. Jejich tvar je v určitém pásmu téměř neměnný. Ke změně dojde, pokud velikosti požadovaných hodnot překročí přirozené hodnoty PM_G a GM_G soustavy. Rovněž se průběhy liší pro konkrétní typ regulátoru. Tvary křivek pro všechny případy kombinace regulátorů a bezpečností jsou znázorněny na obr. 3.2, obr. 3.3, obr. 3.4 a obr. 3.5.

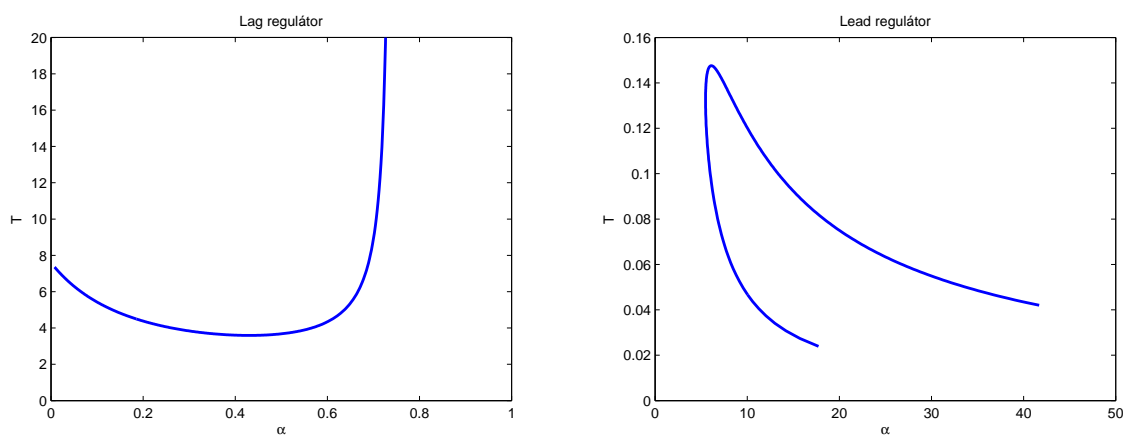
Pro jejich vykreslení využijeme soustavy s přenosem

$$G = \frac{3}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}. \quad (3.24)$$

Fázová bezpečnost soustavy je $PM = 41,7^\circ$ a amplitudová bezpečnost $GM = 2,67$. Na obr. 3.2 a obr. 3.3 jsou znázorněny křivky pro návrh splňující $PM = 30^\circ$, respektive $PM = 60^\circ$

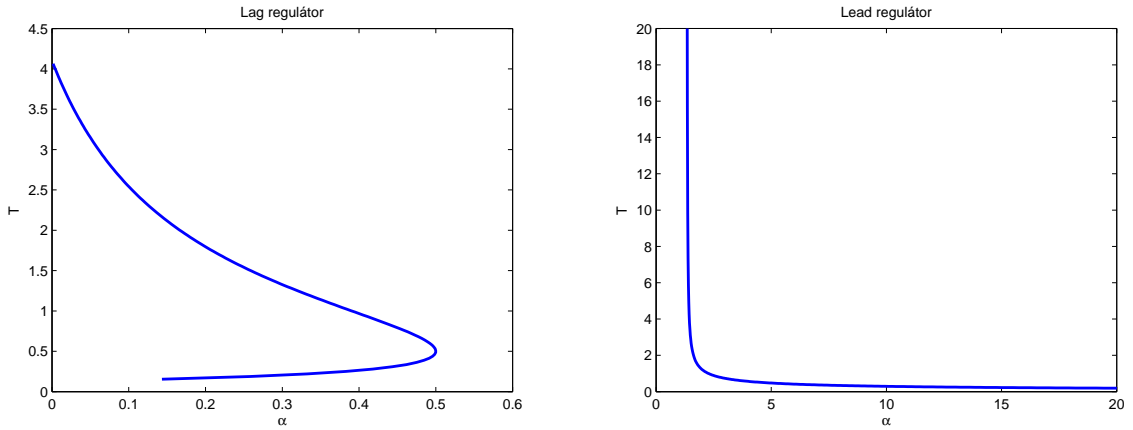


Obrázek 3.2: Nalezené regulátory pro $PM < PM_G$

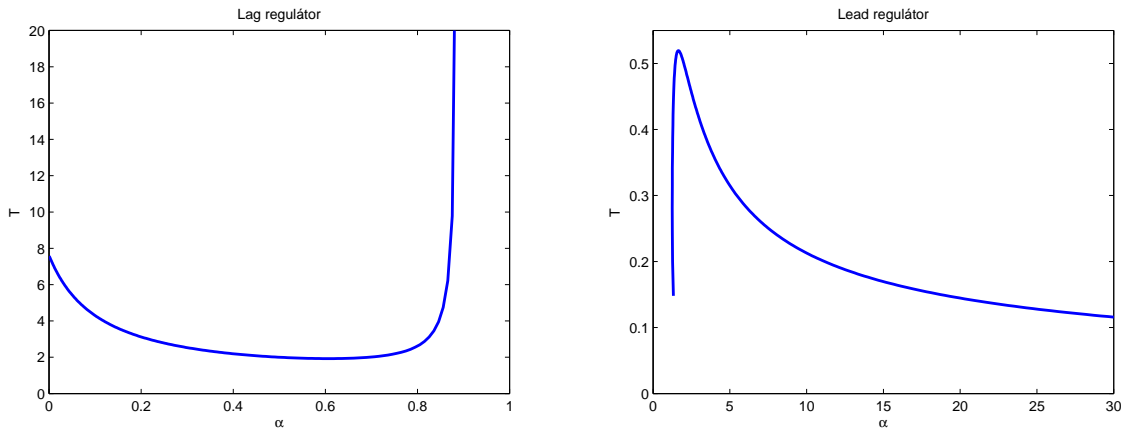


Obrázek 3.3: Nalezené regulátory pro $PM > PM_G$

Na obr. 3.4 a obr. 3.5 jsou znázorněny křivky pro návrh splňující $GM = 2$, respektive $GM = 3$.



Obrázek 3.4: Nalezené regulátory pro $GM < GM_G$



Obrázek 3.5: Nalezené regulátory pro $GM > GM_G$

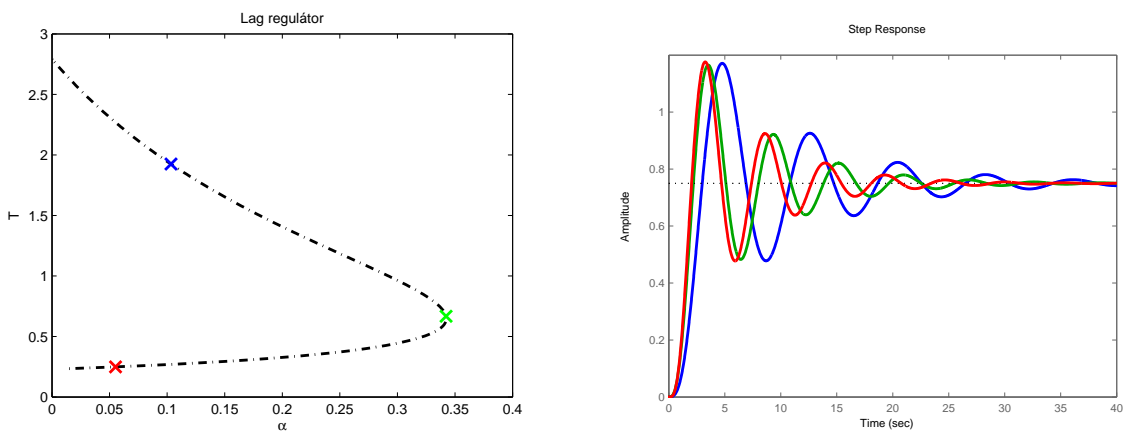
Z vyobrazených řešení je vidět, že křivky s ekvivalentními podmínkami mají podobné průběhy. Výběr optimálního regulátoru by tedy měl jít, obdobně jako v případě hledání nejvhodnějšího PI regulátoru [6], zobecnit jak na PM tak i na GM. V další části se zaměříme na nalezení optimálních regulátorů. Z důvodu odlišnosti křivek se budeme zabývat odděleně nejprve Lag a potom Lead regulátorem.

3.2.1 Lag regulátor

Následující postup je výsledkem porovnávání vlastností mnoha regulátorů a soustav. Pro demonstraci zvolíme soustavu s přenosem (3.24).

Vlastnosti regulátorů se mění v závislosti na frekvenci, pro kterou byly vypočteny. Sousední řešení se liší jen nepatrně, abychom získali spojitost mezi vlastnostmi regulátorů a jejich polohou na křivce, zobrazíme přechodové charakteristiky regulátorů z rozdílných míst na ní.

Jako první se zaměříme na případ $PM < PM_G$, popsany obr. 3.2.



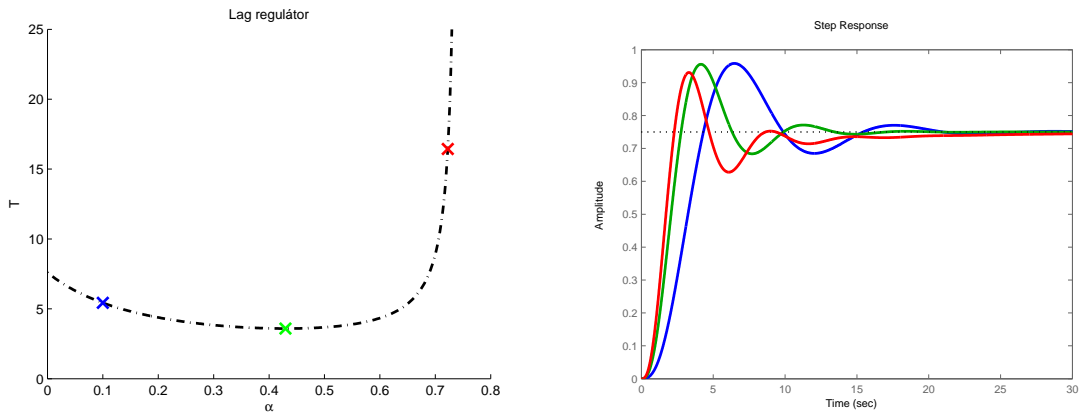
Obrázek 3.6: Řešení a přechodové charakteristiky (Lag: $PM < PM_G$)

Porovnáním přechodových charakteristik zjistíme, že soustavě dodá nejlepší dynamiku regulátor, který má nejmenší konstantu T . Jeho konstanty označíme jako α_{\min} a T_{\min} . Dosazením T_{\min} do (2.9) zjistíme, že námi vybraný optimální regulátor umístí dominantní pól $-\frac{1}{T_{\min}}$ nejdále od imaginární osy. Zároveň vybráním koncového řešení z křivky, získáme systém s největší možnou šířkou přenášeného pásma.

Optimální regulátor v případě $PM < PM_G$ má nejmenší možnou konstantu T a odpovídá poslednímu nalezenému řešení pro největší frekvenci ω_C .

Dále si můžeme všimnout amplitudy překmitu y_{\max} , zhruba odpovídajícího umístění pólů z třetího případu na obr. 2.5. Jeho velikost je pro všechny regulátory, splňující zadanou PM , téměř konstantní.

Další případ popsaný obr. 3.3 nastane, bude-li splněna podmínka $PM > PM_G$.

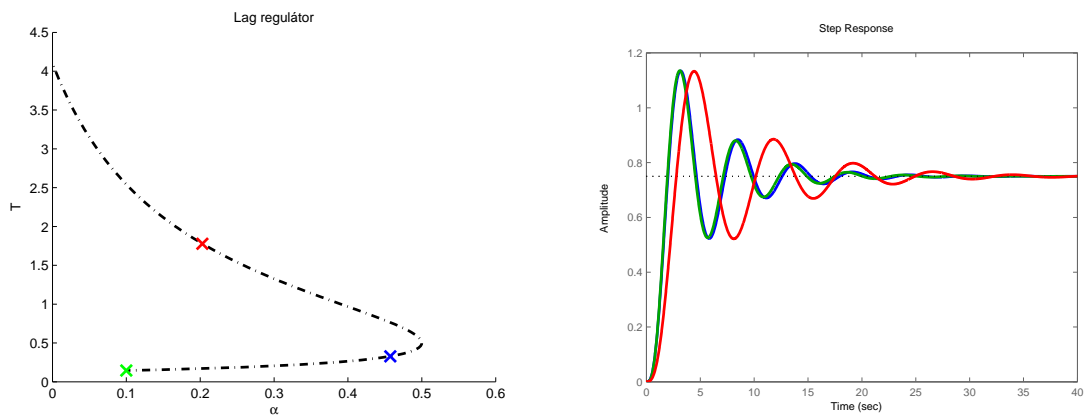


Obrázek 3.7: Řešení a přechodové charakteristiky (Lag: $PM > PM_G$)

Porovnáním přechodových charakteristik zjistíme, že nejlepších výsledků dosahuje opět regulátor s nejmenší konstantou T . Ten, stejně jako v předchozím případě, umístí dominantní pól $-\frac{1}{T_{\min}}$ nejdále od imaginární osy. Zbylé regulátory, s větší frekvencí ω_C , způsobují nežádoucí integrační charakter. Optimální regulátor v případě $PM > PM_G$ je ten s nejmenší možnou konstantou T .

Návrhu s podmínkou $PM = PM_G$ nelze kvůli zaokrouhlování při výpočtech dosáhnout. Přibližováním k této hodnotě shora či zdola získáváme křivky ekvivalentní předchozím podmínkám. Tuto možnost tedy nebudeme dále uvažovat.

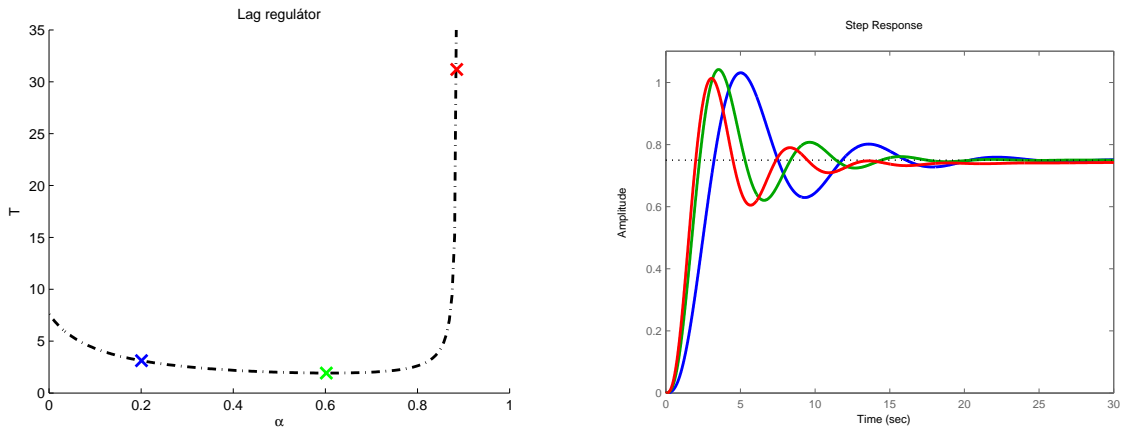
Obdobně určíme optimální regulátory v případě zadané GM . Nejdříve se zaměříme na návrh s podmínkou $GM < GM_G$.



Obrázek 3.8: Řešení a přechodové charakteristiky (Lag: $GM < GM_G$)

Průběhy zobrazených přechodových charakteristik se od průběhů na obr. 3.6 téměř neliší. K určení polohy nejlepšího regulátoru na křivce využijeme stejného postupu, jako v případě $PM < PM_G$.

Jako poslední zůstává návrh s podmínkou $GM > GM_G$.



Obrázek 3.9: Řešení a přechodové charakteristiky (Lag: $GM > GM_G$)

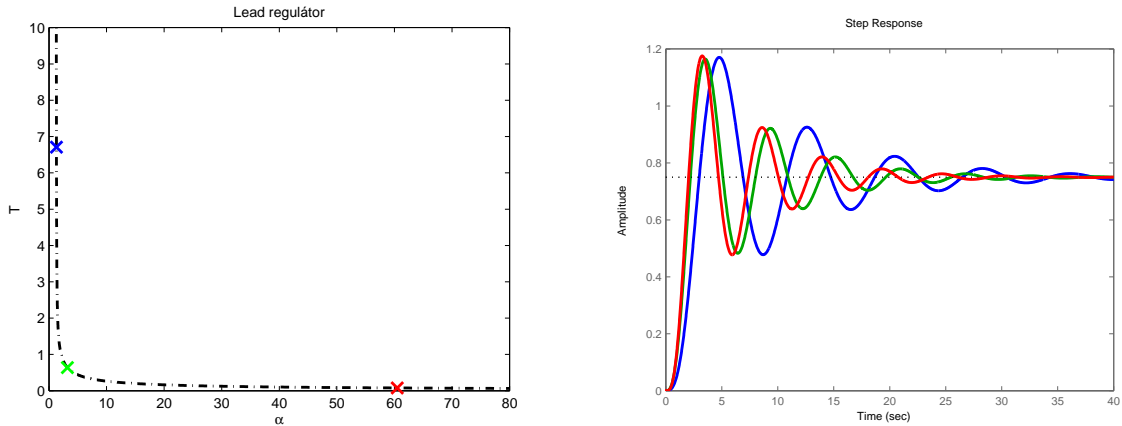
Stejně jako v předchozím případě se průběhy přechodových charakteristik liší od průběhů na obr. 3.7 jen minimálně. K určení polohy nejlepšího regulátoru na křivce tedy lze využít stejného postupu, jako v případě $PM > PM_G$.

3.2.2 Lead regulátor

Je regulátor s dominantní nulou, proto u něj můžeme očekávat značný vliv jevu popsaného v kapitole 2.3, obr. 2.6. Jeho nevýhodou oproti Lag regulátoru je závislost polohy nuly na obou parametrech α i T , které jsou v součinu.

Z výše uvedených důvodů plyne, že určení přesné polohy „optimálního“ regulátoru bude v porovnání s Lag regulátorem obtížnější. Vhodnější bude hledat místo jednoho bodu pásmo, ve kterém se nachází regulátory s podobně kvalitní odezvou. Obdobně, jako v případě Lag regulátoru, probereme všechny kombinace požadované PM, GM s přirozenou PM_G, GM_G soustavy popsané přenosem (3.24).

Jako první se zaměříme na případ $PM < PM_G$.



Obrázek 3.10: Řešení a přechodové charakteristiky (Lead: $PM < PM_G$)

Z porovnání přechodových charakteristik by se mohlo zdát, že nejvýhodnější je vybrat řešení z konce křivky. Tento předpoklad je ovšem mylný, neboť na obr. 3.10 je znázorněn pouze výřez ze všech nalezených řešení. Skutečné hodnoty koeficientů α a T bývají u tohoto typu regulátoru v rozsahu $T \in (0, 100)$ a $\alpha \in (1, 10000)$. Ve skutečnosti se do systému se vzrůstající frekvencí ω_C zavádí nechtěný integrační charakter znázorněný na obr. 3.7.

Vyjdeme-li z předpokladu jevu popsaného v kapitole 2.3, obr. 2.6, logicky vybereme jako nejlepší regulátor ten, který umístí svou dominantní nulu nejdále od imaginární osy. S přihlédnutím k výše zmíněným vlastnostem, plynoucích z násobení obou parametrů, je vhodné určit dva body, mezi kterými se nejčastěji nacházejí vhodná řešení.

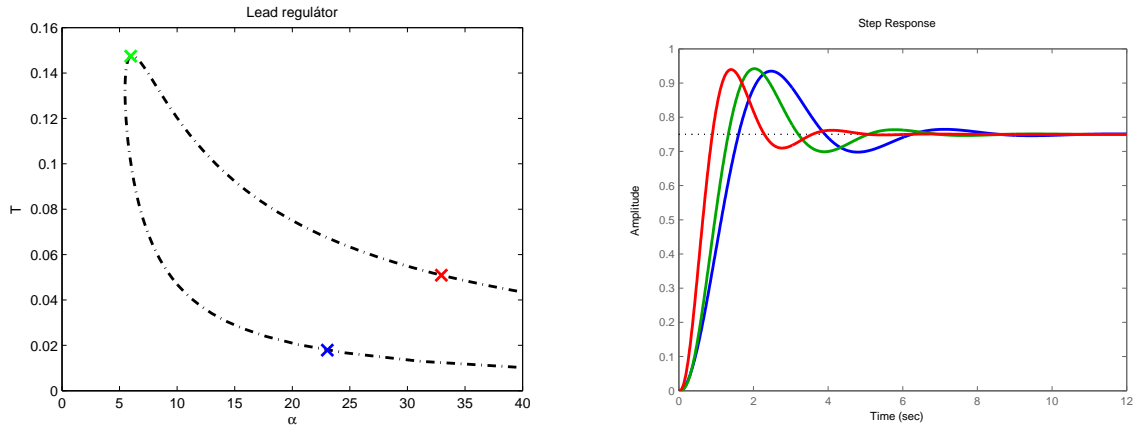
Těmito body jsou :

1. Bod, ve kterém je hodnota $-\frac{1}{\alpha T}$ největší.
2. Bod, ve kterém poloha nuly odpovídá $-0,625\frac{1}{\alpha T}$ ³.

Podrobnému otestování této volby je věnována 4. kapitola.

³Konstanta 0,625 byla experimentálně stanovena jako optimální vzdálenost druhého bodu od prvního.

Další variantou je případ $PM > PM_G$.



Obrázek 3.11: Řešení a přechodové charakteristiky (Lead: $PM > PM_G$)

Stejně jako v předchozím případě ani zde nelze uplatnit pravidlo volby nejvyšší frekvence ω_C . Důvod je ovšem odlišný. Regulátory z konce křivky mívají velký překmit, způsobený neúměrným akčním zásahem pro vysoké hodnoty α dle vzorce (2.12).

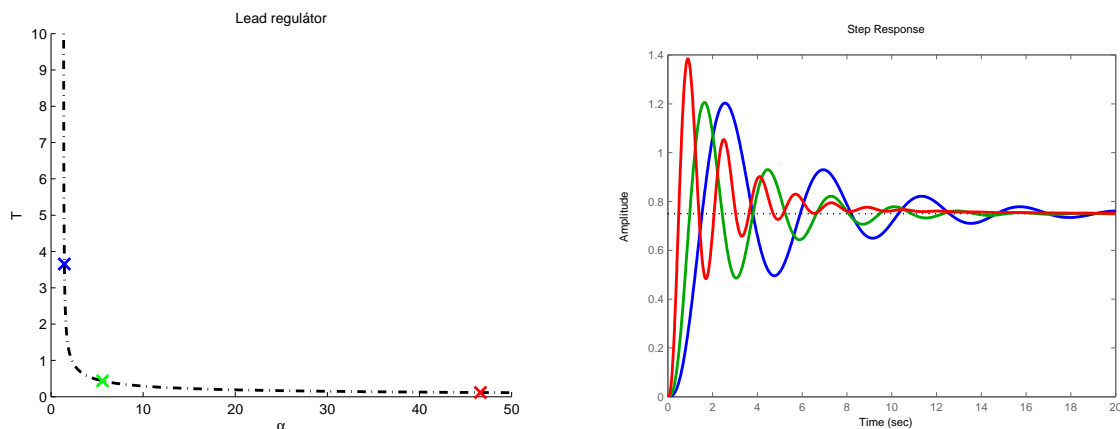
V tomto případě nelze k určení pásma „optimálních“ regulátorů využít pravidla umístění nuly, jako v předchozích případech, neboť funkce polohy nuly $f_{\text{nula}}(\alpha, T)$ je monotónní s minimem v počátku křivky. Ačkoli vybrání prvního regulátoru zajistí umístění nuly hluboko do záporných hodnot na reálné ose, průběh přechodové charakteristiky nebude ideální. Vhodnou volbou je vybrat první vyhovující řešení z maxima křivky, zjistit vynásobením α a T hodnotu jeho nuly, tu vynásobit konstantou a získat tak polohu druhého řešení.

Pásma optimálních řešení je ohraničeno body :

1. Bod, ve kterém je hodnota T_{max} největší.
2. Bod, ve kterém poloha nuly odpovídá $-\frac{1}{3} \frac{1}{\alpha T_{\text{max}}}$ ⁴.

⁴Konstanta $\frac{1}{3}$ byla experimentálně stanovena jako optimální vzdálenost druhého bodu od prvního.

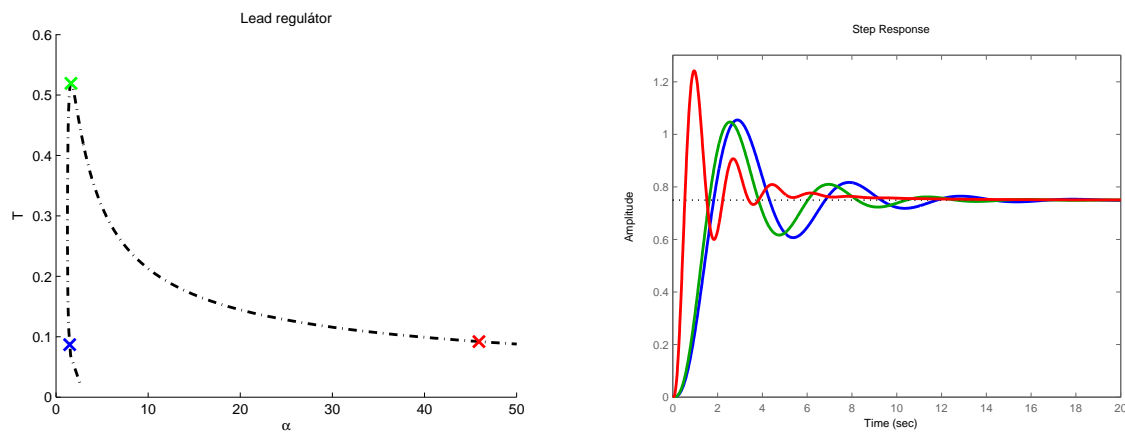
Následují varianty pro GM, první varianta je $GM < GM_G$.



Obrázek 3.12: Řešení a přechodové charakteristiky (Lead: $GM < GM_G$)

Tvar nalezeného řešení spolu s přechodovými charakteristikami je blízký průběhům uvedeným na obr. 3.10. Pro pozici optimálního regulátoru využijeme shodného kritéria.

Druhá varianta je $GM > GM_G$.



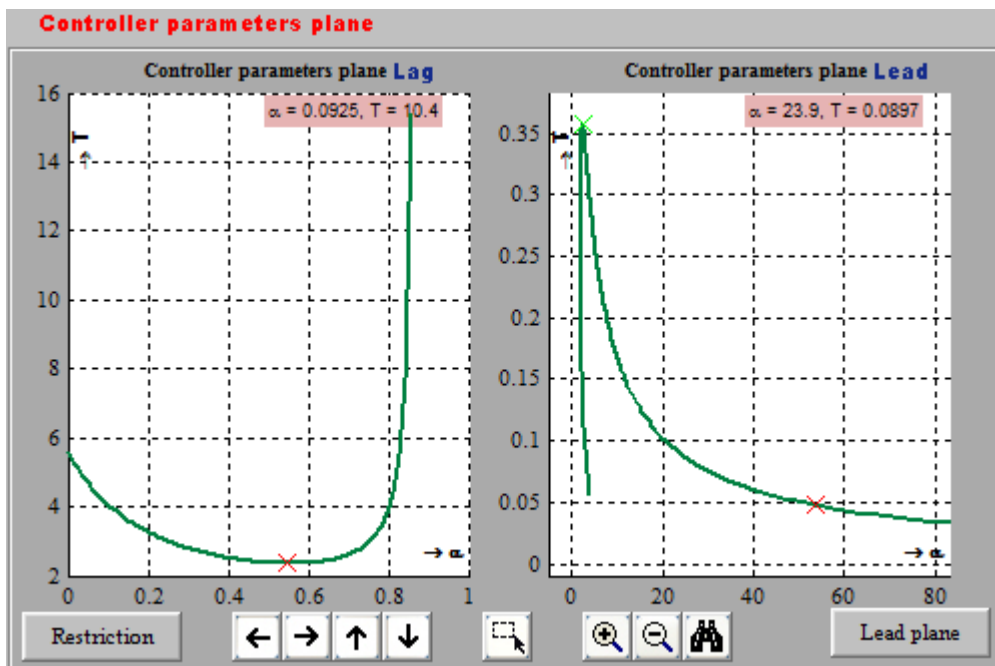
Obrázek 3.13: Řešení a přechodové charakteristiky (Lead: $GM > GM_G$)

I v tomto případě je tvar nalezeného řešení a přechodových charakteristik blízký průběhům uvedeným na obr. 3.11. Pro určení pozice optimálního regulátoru využijeme shodného kritéria.

3.3 Implementace do GUI

Jedním z cílů této práce je implementace výše uvedené procedury do prostředí Matlab. Z důvodu snadné implementace bylo vybráno GUI, které v rámci své bakalářské práce vytvořil Karel Jonáš [3] a dále rozšířil Tomáš Bouška [1]. V současné době se jedná o komplexní nástroj, umožňující návrh široké škály regulátorů pro soustavy bez dopravního zpoždění. Jeho zevrubného popisu se věnuje autor v [3].

Před implementací procedury bylo třeba provést drobné úpravy samotné aplikace. Ta neumožňovala vykreslení separovaných řešení pro Lead a Lag do samostatných grafů. Dále bylo nutné předělat ovládací prvky do podoby, umožňující manipulaci s dvěma grafy. Výsledná podoba je znázorněna na obr. 3.14.



Obrázek 3.14: Ukázka vypočtených křivek v GUI

Nové umístění grafů v GUI si vyžádalo drobnou změnu jeho rozměrů na současných 1016 x 745 pixelů. Doporučené rozlišení 1024 x 768 pixelů zůstalo nezměněno.

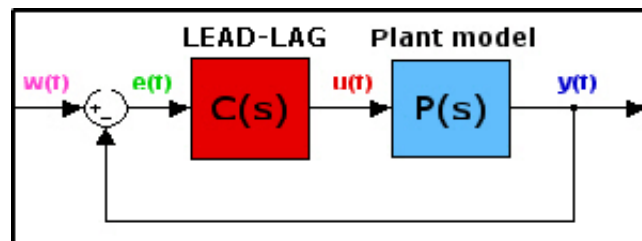
Nyní již ke způsobu implementace výše uvedené procedury. Ta byla rozdělena na dílčí úlohy a každá z nich odděleně naprogramována. Modularita aplikace umožnila jejich snadnou kompletaci.

Seznam modulů spolu s umístěním v aplikaci je následující:

- Hledání adekvátního rozsahu frekvencí je realizováno v souboru `Rozsah_wLL_new.m`.
- Výpočet řešení metodou, popsanou ve 3.1, se nachází v souboru `Navrh_LL_new.m`.
- Hledání optimálních regulátorů se nachází v souboru `Optimal_LL_new.m`.

Konkrétní implementaci zde nebudeme dále popisovat, neboť vytvořený kód je bohatě komentován. Zaměříme se na interpretaci nalezených optimálních řešení. V případě Lag regulátoru získáme vždy jen jeden bod, ten je na příslušné křivce v GUI reprezentován červeným křížkem. Na rozdíl od Lead regulátoru, kde se pásmo optimálních řešení nalézá mezi dvěma body. První je reprezentován zeleným a druhý červeným křížkem. Ukázka křivek s vykreslenými optimálními řešeními se nachází na obr. 3.14.

Procedura se v aplikaci nachází pod volbou LEAD-LAG.



Obrázek 3.15: Ukázka vybrané metody návrhu v GUI

Kapitola 4

Příklady

4.1 Porovnání s běžně používanou metodou

Ze začátku by bylo dobré demonstrovat hlavní výhody a nevýhody metody popsané v kapitole 3.1. Nejvíce vypovídající je srovnání s běžně používanou iterační metodou návrhu, podrobně popsanou v [4].

Uvažujme systém s přenosem

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+50)(s+120)} = \frac{300\,000}{(s+1)(s+50)(s+120)}. \quad (4.1)$$

Je zadán požadavek na maximální překmit $OS = 20\%$ a dobu ustálení $T_s = 0,2s$. Velikost konstanty K byla určena z požadavku na ustálenou hodnotu při jednotkovém skoku $y_s = 0,98w$ dle vzorce (2.8).

Prvním krokem je transformace zadaných kritérií z časové do frekvenční oblasti. K jejich převodu lze využít vzorce odvozené pro systémy druhého řádu. Jejich užitím u systému vyššího řádu získáme pouze přibližnou hodnotu PM. Pro konkrétní demonstraci je ovšem dostačující.

Nejprve vypočteme koeficient ξ , z něj posléze určíme hodnotu PM otevřené smyčky, která přibližně zajistí požadovaný překmit.

$$\xi \cong \frac{-\ln(OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(OS/100)}} \cong 0,456 \quad (4.2)$$

$$PM \cong \tan^{-1}\left(\frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4} - 2\xi^2}}\right) \cong 48,14^\circ \quad (4.3)$$

Dále je postup rozdílný v závislosti na konkrétní metodě návrhu.

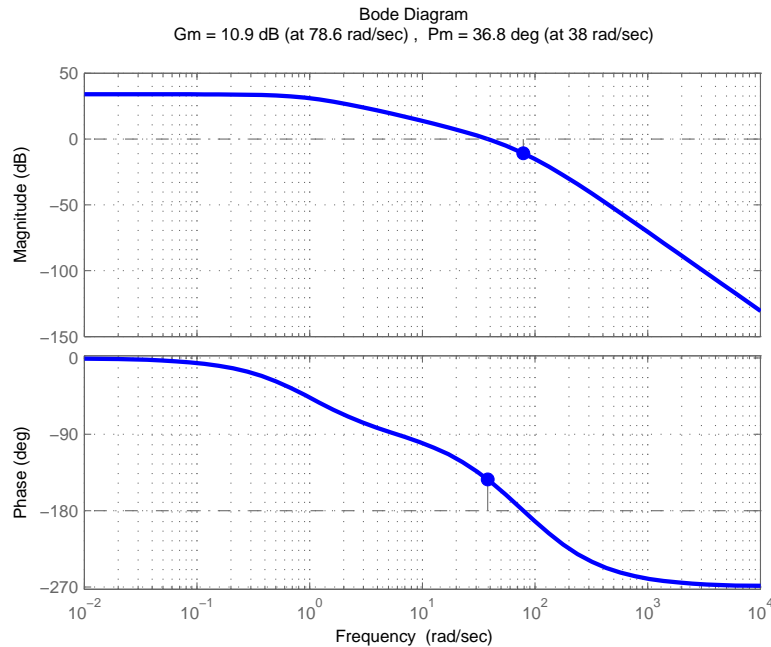
4.1.1 Standardní metoda návrhu

Tato metoda využívá přenosu Lead regulátoru ve tvaru

$$C(s) = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}. \quad (4.4)$$

Od přenosu (2.9) se liší pouze umístěním koeficientu β . Oba tvary jsou navzájem ekvivalentní.

Prvním krokem k úspěšnému řešení je zjištění PM nekompenzované soustavy. Ta lze vyčíst její frekvenční charakteristiky.



Obrázek 4.1: Př 1. - bodeho charakteristika nekompenzovaného systému

Nekompenzovaný systém má $PM = 36,8^\circ$. K dosažení kýžených $48,14^\circ$ je třeba Lead regulátorem zvětšit fázi o $11,34^\circ$. To ovšem nestačí, neboť Lead regulátor zvětšuje přechodovou frekvenci ω_c . Je tedy třeba přidat určitý korekční faktor, který kompenzuje nižší fázi nekompenzovaného systému pro vyšší ω_c .

Volba tohoto faktoru je klíčovou nevýhodou této metody. Nesprávná volba se projeví až ve výsledku, jako odchylka od požadované PM. Opakováním postupu s jiným faktorem se lze této hodnotě posupně přiblížit.

V tomto případě zvolíme jeho hodnotu 20° a zjistíme celkový požadovaný fázový posun Lead regulátoru $\phi_{\max} = 48,14 - 36,8 + 20 = 31,34^\circ$. Koeficient β se vypočte z ϕ_{\max} dle

následujícího vzorce.

$$\beta = \frac{1 - \sin \phi_{\max}}{1 + \sin \phi_{\max}} = 0,3157 \quad (4.5)$$

Frekvenci ω_{\max} , na které dosáhne výsledný systém požadovanou fázovou bezpečnost, odečteme z frekvenční charakteristiky v bodě, pro který platí

$$|C(j\omega_{\max})| = \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 5dB. \quad (4.6)$$

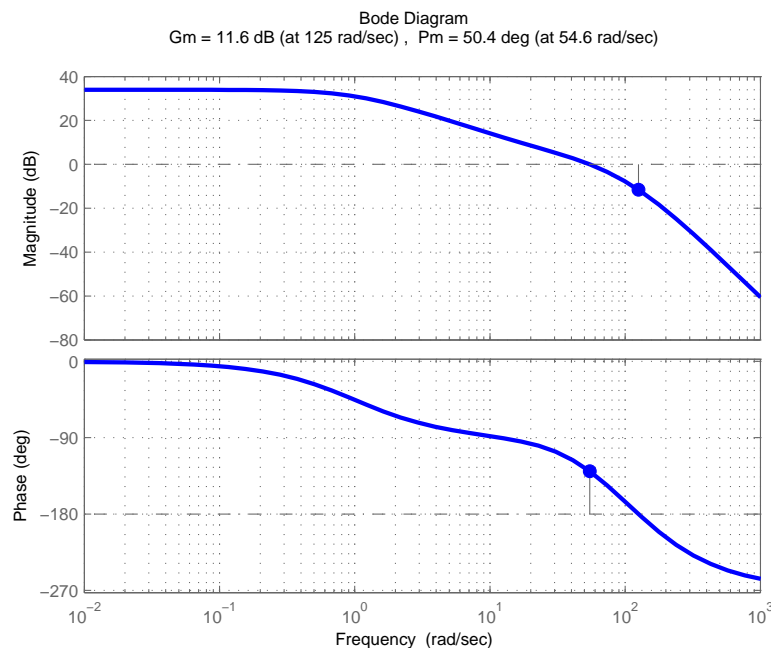
Odečtením frekvence, na které má nekompensovaný systém opačné zesílení $-5dB$, získáme $\omega_{\max} = 54,7rad/s$. Výsledné konstanty regulátoru $T\beta$ a T zjistíme ze vzorců

$$T = \frac{1}{\sqrt{\beta}\omega_{\max}} = 0,0325 \quad a \quad \beta T = 0,0103. \quad (4.7)$$

Jejich dosazením do (4.4) získáme přenos regulátoru

$$C(s) = \frac{0,0325s + 1}{0,00103s + 1} \quad (4.8)$$

Jako kontrola poslouží frekvenční charakteristika kompenzovaného systému na obr. 4.2.



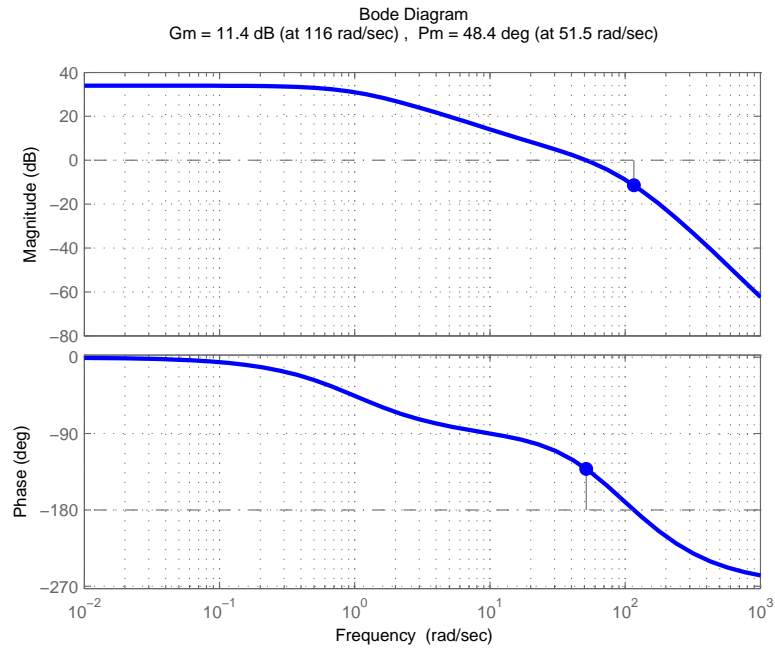
Obrázek 4.2: Př 1. - Bodeho charakteristika kompenzovaného systému

Z frekvenční charakteristiky je vidět, že volba korekčního faktoru byla mylná. Návrh je třeba zopakovat s jinou hodnotou. Nyní zvolíme jeho hodnotu 15° . Stejným postupem

dojdeme k regulátoru s přenosem

$$C(s) = \frac{0,03116s + 1}{0,01201s + 1}. \quad (4.9)$$

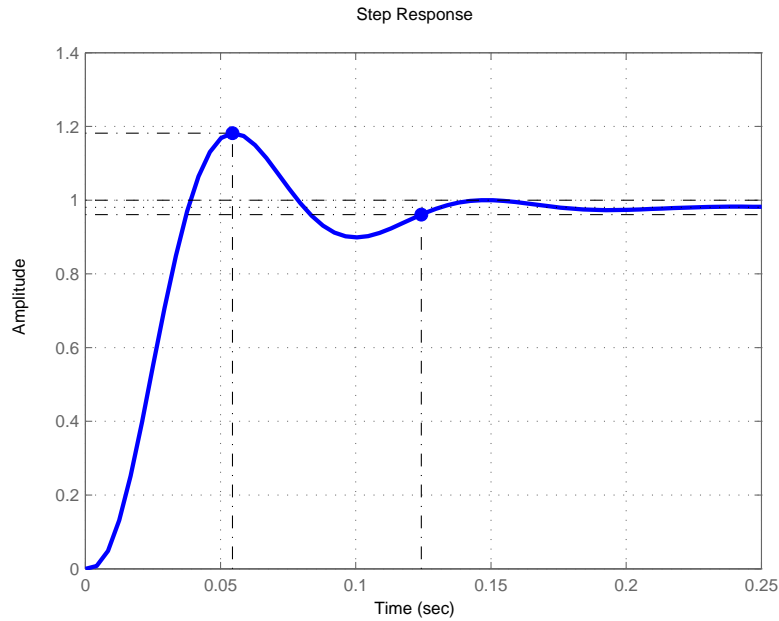
Na obr. 4.3 je zobrazena frekvenční charakteristiku kompenzovaného systému.



Obrázek 4.3: Př 1. - Bodeho charakteristika kompenzovaného systému

Volba konrekčního faktoru byla správná, neboť nová odchylka od žádané PM je pouze 0,26°. Provedením dalších iterací lze tuto odchylku dále zmenšovat, avšak její vliv je pro hodnoty < 0,5° zanedbatelný. Přeřodová charakteristika výsledného systému je na obr. 4.4. Je z ní vidět, že všechna požadovaná kritéria byla splněna.

Hlavní výhodou této metody je výpočet frekvence, na které bude zajištěna požadovaná PM, v závislosti na vypočteném zesílení regulátoru dle vzorce (4.6).



Obrázek 4.4: Př 1. - Přechodová charakteristika kompenzovaného systému

4.1.2 Implementovaná metoda návrhu

Na rozdíl od předešlé metody návrhu zajišťuje požadovanou PM bez odchylky. Její nevýhodou je nutnost zvolení frekvence, na které tuto PM dosáhne. V případě návrhu PD regulátoru se tato frekvence volí shodná s frekvencí přechodovou, neboli $\omega_C = \omega_{180}$. Stejný postup lze uplatnit u Lead regulátoru pouze v případě, kdy pro frekvenci přirozené PM soustavy platí

$$\omega_{PM(G)} \ll \omega_{180}. \quad (4.10)$$

V případech $\omega_{PM(G)} < / \cong / > / \gg \omega_{180}$ je vhodné volit

$$\omega_C = 1,25^1 \omega_{PM(G)}. \quad (4.11)$$

K určení frekvence ω_C využijeme frekvenční charakteristiku systému obr. 4.1. Odečtením získáme hodnotu $\omega_{PM} = 1,25 \cdot 38 = 47,5 \text{ rad/s}$. Na této frekvenci má systém následující parametry.

$$|G(\omega_C)| = 0,71 \quad , \quad \angle G(j\omega_C) = -155,91^\circ \quad (4.12)$$

¹Konstanta 1,25 byla experimentálně stanovena. U systému 3. řádu bez nul zhruba aproximuje frekvenci, na které se nachází optimální regulátor.

Dosazením do (3.14) získáme koeficienty δ, c .

$$\delta = \tan(-180^\circ + 155,91^\circ + 48,14^\circ) = 0,405 \quad , \quad c = \frac{1}{0,71} = 1,4096 \quad (4.13)$$

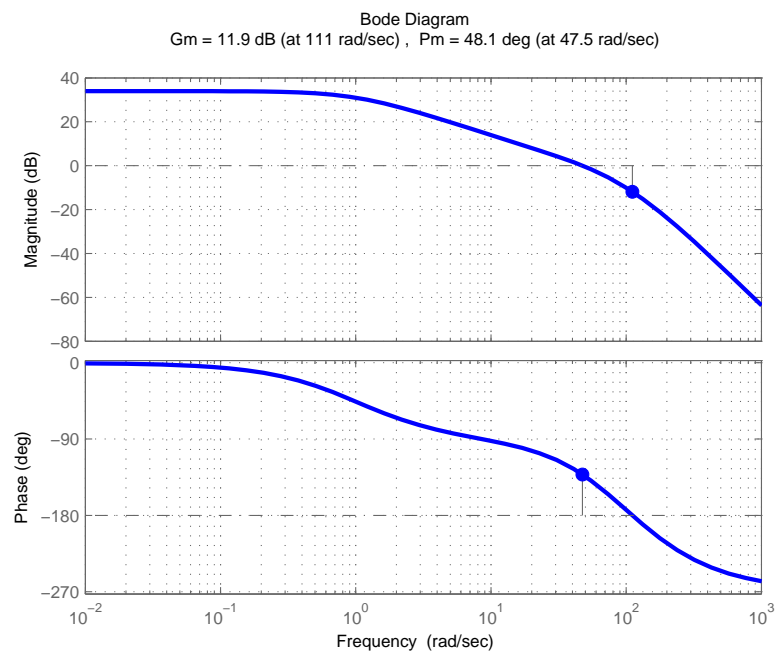
Ty dosadíme do rovnice (3.10) a získáme koeficienty regulátoru.

$$\alpha = 2,2206 \quad , \quad T = 0,0122 \quad (4.14)$$

Výsledný přenos Lead regulátoru je

$$C(s) = \frac{0,02707s + 1}{0.0122s + 1} \quad (4.15)$$

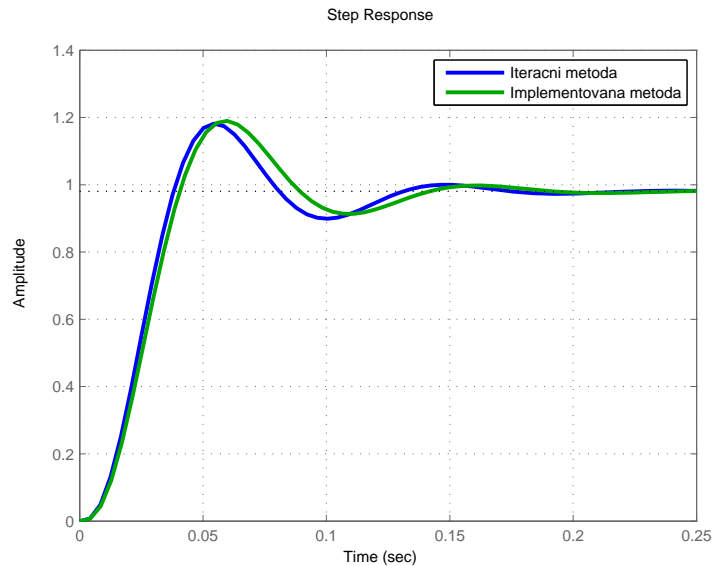
Na rozdíl od předešlého příkladu zajistí nový regulátor téměř nulovou odchylku od požadované PM^2 . Frekvenční charakteristika otevřené smyčky je na obr. 4.5.



Obrázek 4.5: Př 1. - Bodeho charakteristika kompenzovaného systému

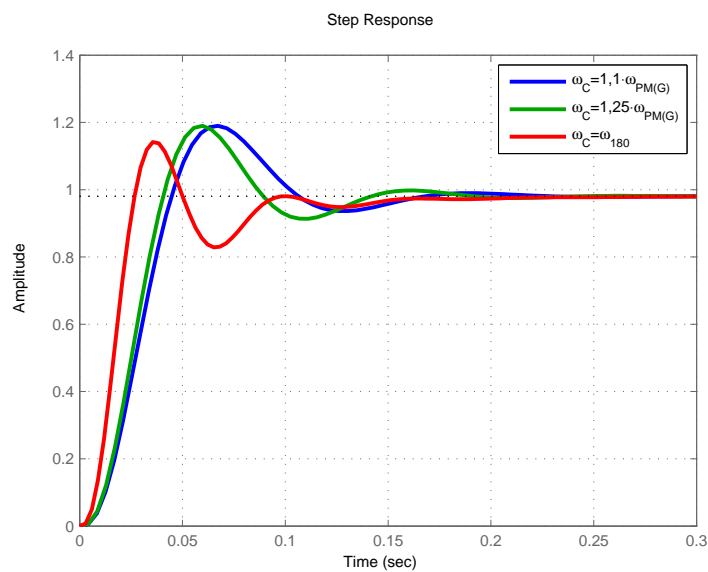
²Chyba vznikla pouze zaokrouhlováním.

Zbývá pouze porovnat přechodové charakteristiky soustav s regulátory (4.9) a (4.15).



Obrázek 4.6: Př 1. - Přechodové charakteristiky kompenzovaných systémů

Shoda průběhů přechodových charakteristik je pouze náhodná. Volbou jiné frekvence ω_C získáme odlišné průběhy. Příslušné odezvy pro $\omega_C = 1, 1 \cdot \omega_{PM(G)}$, $\omega_C = 1,25 \cdot \omega_{PM(G)}$ a $\omega_C = \omega_{180}$ jsou znázorněny na obr. 4.7.



Obrázek 4.7: Př 1. - Přechodové charakteristiky pro různé ω_C

4.2 Návrh pomocí aplikace

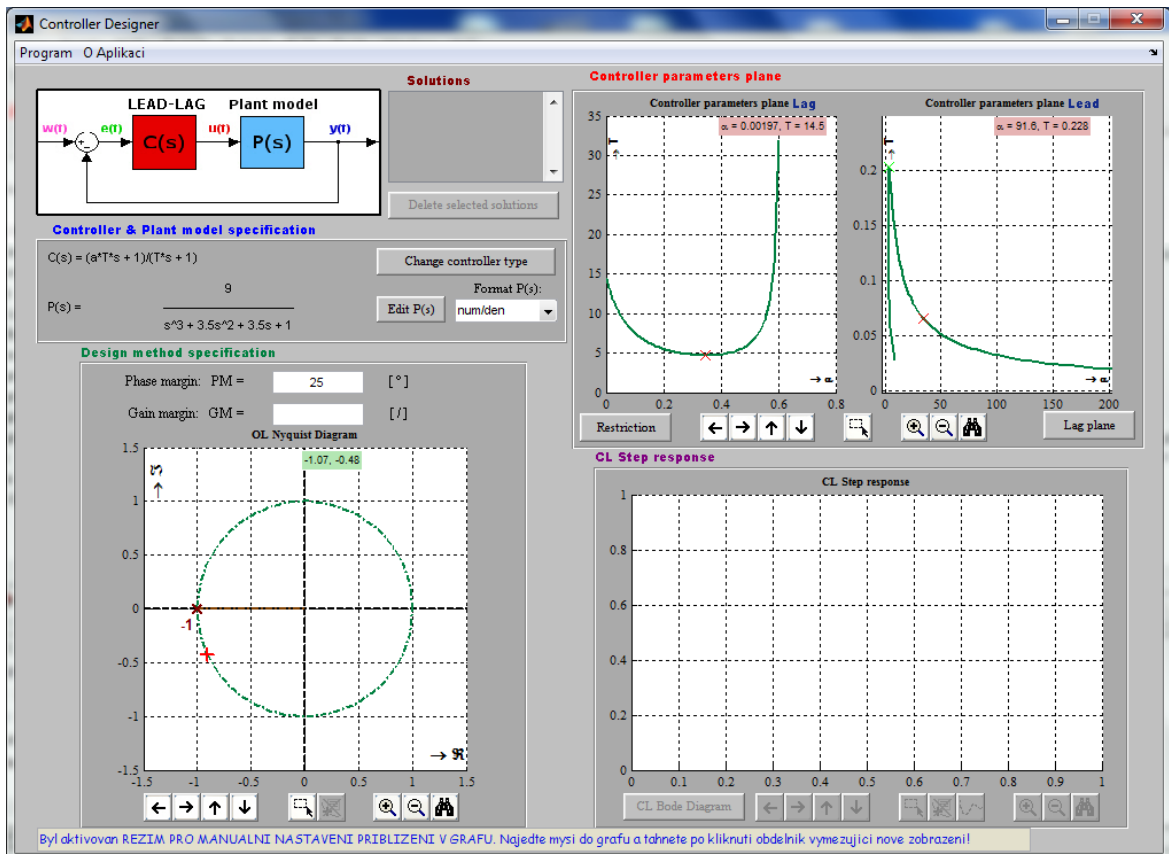
Jako názornou ukázkou použití aplikace ke snadnému nalezení optimálního regulátoru zvolíme příklad 6.15, uvedený v knize [2] a řešený v [1].

Jedná se o tepelný systém s přenosem

$$G(s) = \frac{9}{\left(\frac{s}{0,5} + 1\right)(s + 1)\left(\frac{s}{2} + 1\right)}. \quad (4.16)$$

Je požadováno zajištění fázové bezpečnosti alespoň 25° , zvolíme $PM = 25^\circ$.

K návrhu v aplikaci není nutná znalost frekvenční charakteristiky systému. Pokud řešení existují, algoritmus je vždy nalezne. Zjištění přirozených hodnot PM_G a GM_G soustavy pouze umožní vybrat vhodný typ regulátoru. V tomto případě se jedná o systém s $PM_G = 7,1^\circ$ a $GM_G = 1,94$. Požadovaný posun fáze zajistí Lead regulátor. Po zadání požadované PM proběhne v aplikaci návrh³. Výsledek je zobrazen na obr. 4.8.

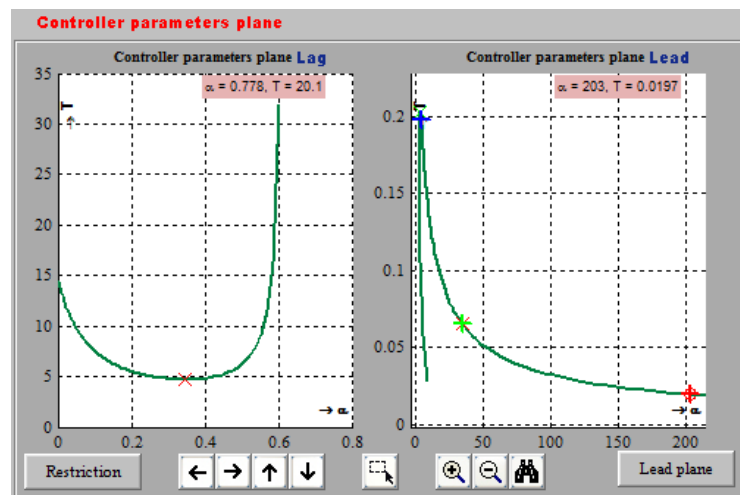


Obrázek 4.8: Př 2. - Okno aplikace s provedeným návrhem $PM = 25^\circ$

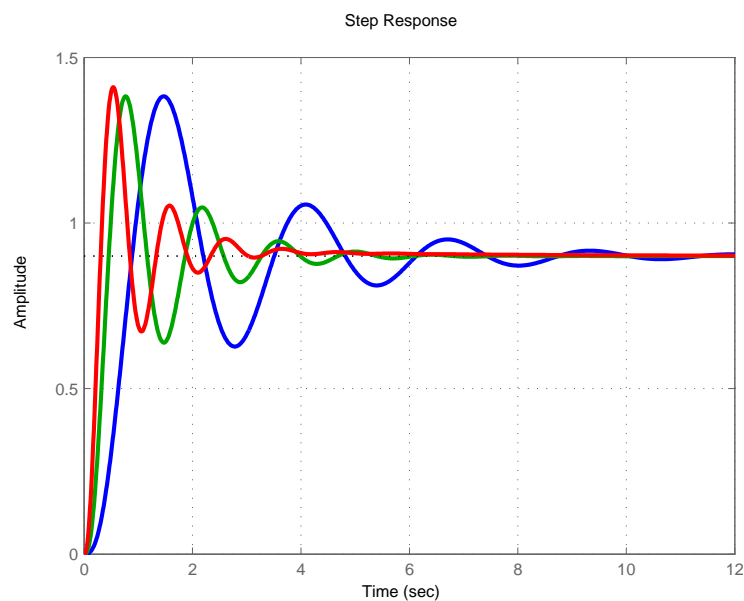
³O probíhajícím návrhu a jeho ukončení je uživatel informován ve stavové liště, nacházející se ve spodní části okna aplikace

4.2.1 Optimální Lead regulátor

Aplikace našla řešení umožňující Lead i Lag regulaci. Pro srovnání zvolíme z křivky nalezených Lead regulátorů obě vypočtená krajní řešení⁴ a jedno mimo doporučený interval.



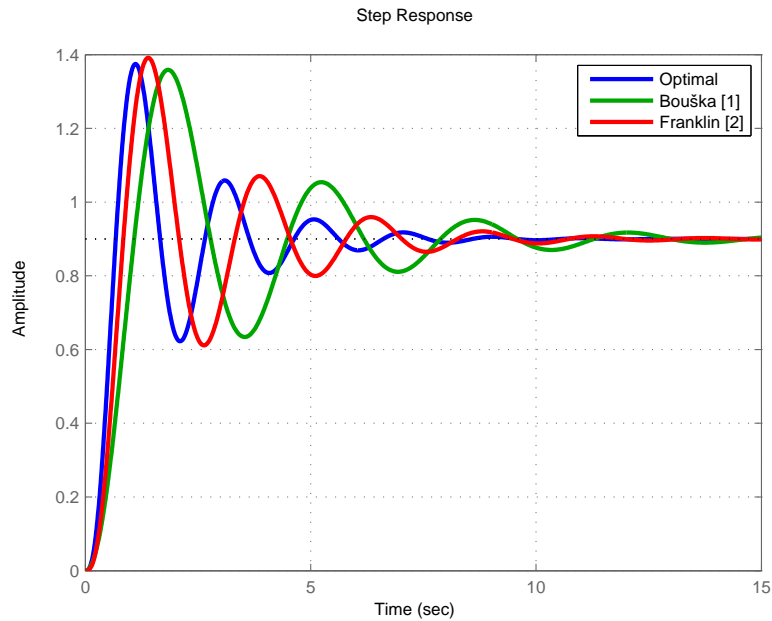
Obrázek 4.9: Př 2. - Vybraná řešení



Obrázek 4.10: Př 2. - Přechodové charakteristiky vybraných řešení

⁴Pásmo optimálních regulátorů je v oblasti Lead plane označeno dvěma křížky. Zelený značí jeho počátek, červený jeho konec.

S přihlédnutím k integračnímu charakteru posledního vybraného regulátoru prohlásíme za optimální druhé řešení. Jeho přechodovou charakteristiku porovnáme s řešením uvedeným v [1] a řešením získaným dle postupu uvedeném v [2](str. 267).

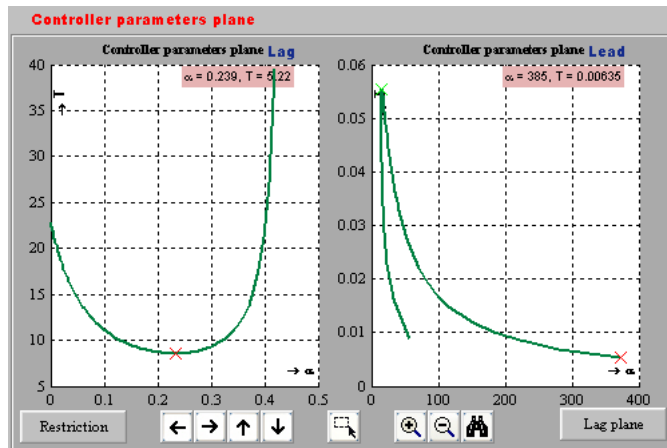


Obrázek 4.11: Příklad 2. - Porovnání regulátorů

V porovnání s ostatními regulátory má námi navržený optimální regulátor nejkratší dobu regulace. Tento výsledek je zaručen způsobem výběru optimálního řešení. Ačkoli je návrh regulátoru, označeného jako Franklin [2], je pevně svázán volbou korekčního faktoru, dosahuje i on velmi kvalitního výsledku. Poslední regulátor, označený jako Bouška [1], byl pravděpodobně vybrán jako náhodné řešení z nalezené křivky. Proto má nejdelší dobu regulace.

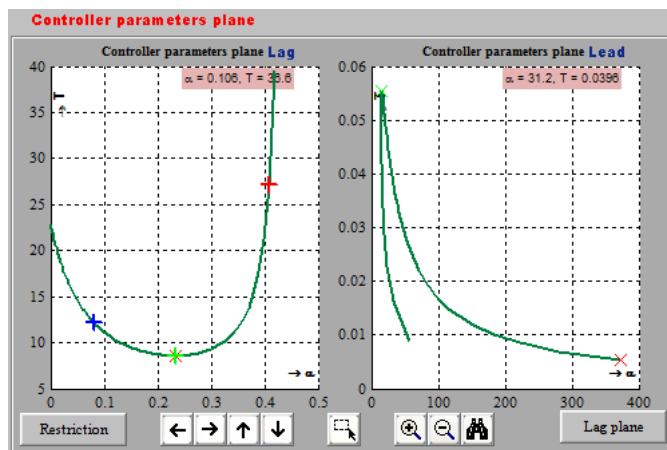
4.2.2 Optimální Lag regulátor

Stejný systém lze regulovat i za použití Lag regulátoru. Abychom zachovali možnost porovnání přechodových charakteristik s [1], stanovíme požadovanou $PM = 40^\circ$. Jejím zadáním do aplikace získáme křivky s nalezenými Lead i Lag regulátory.



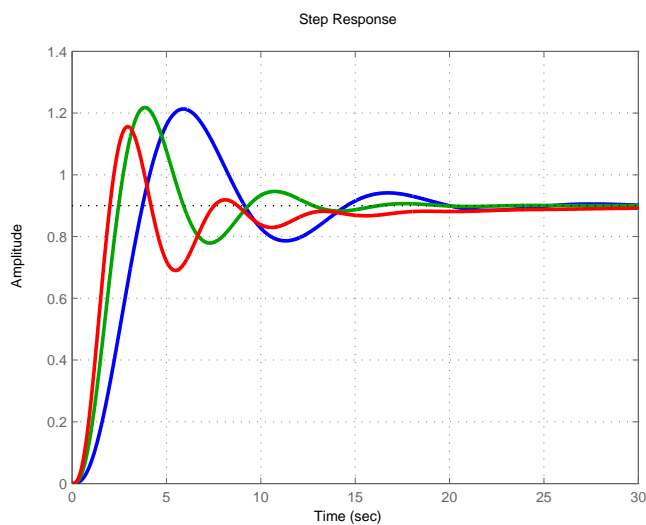
Obrázek 4.12: Příklad 2. - Nalezená řešení

Opět vybereme tři řešení, z nichž druhé bude doporučeno aplikací⁵ a porovnáme jejich přechodové charakteristiky.



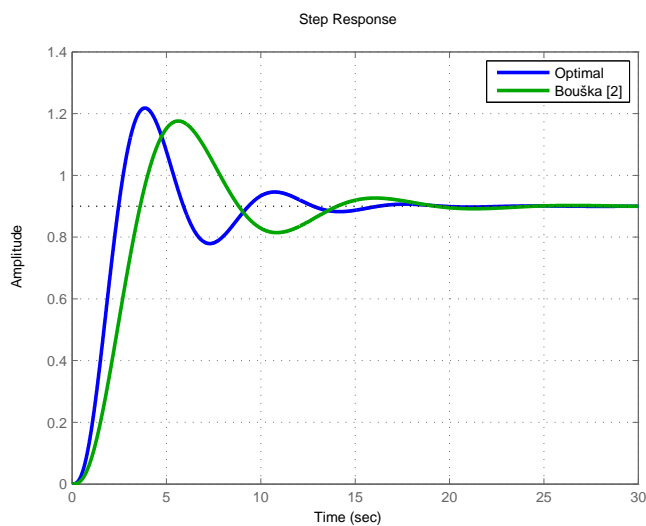
Obrázek 4.13: Příklad 2. - Vybraná řešení

⁵Optimální regulátor je v oblasti Lag plane označen červeným křížkem.



Obrázek 4.14: Příklad 2. - Přechodové charakteristiky vybraných řešení

Za optimální řešení můžeme prohlásit řešení doporučené, s minimální hodnotou konstanty T . Jeho přechodovou charakteristiku vykreslíme spolu s řešením uvedeným v [1].



Obrázek 4.15: Příklad 2. - Porovnání regulátorů

Doporučené řešení je opět výhodnější. Stejně jako v předchozím případě byl druhý regulátor pravděpodobně vybrán jako náhodné řešení z nalezené křivky. Autor nejspíše neměl k dispozici dostatek vypočtených řešení, mezi kterými vybíral regulátor.

Kapitola 5

Závěr

Prvým cílem této bakalářské práce bylo navrhnout a implementovat metodu návrhu regulátorů typu Lead/Lag, která pro regulovanou soustavu, reprezentovanou svým přenosem, nalezne množinu regulátorů splňujících požadovanou fázovou a amplitudovou bezpečnost. Druhým cílem byla tvorba univerzální metodiky pro tento způsob návrhu Lead/Lag regulátorů, která by umožňovala, ať už nepřímo z nalezených řešení, nebo přímo z frekvenční charakteristiky systému, snadný návrh optimálního regulátoru. Oba tyto cíle byly úspěšně splněny.

Zvolená metoda návrhu vychází z myšlenky separace výpočtu konstant regulátoru od koeficientů přenosu regulované soustavy. Odvozené vzorce tak umožňují exaktní návrh pouze na základě znalosti její frekvenční charakteristiky. Výhodou metody je přesné splnění požadovaných hodnot fázové a amplitudové bezpečnosti otevřené smyčky jednoduchým výpočtem. Jejimi nevýhodami jsou :

- Neexistence řešení pokud nejsou splněny podmínky (3.11) a (3.12). Ty se dají obejít změnou zesílení soustavy.
- Nutnost volby frekvence, pro kterou se návrh optimálního regulátoru provede.

Druhá zmíněná nevýhoda byla v použité aplikaci odstraněna výpočtem množiny frekvencí, pro které má daný typ regulace řešení. Z této množiny byly vypočteny příslušné regulátory a dle pravidla, umístění dominantního pólu či nuly do maximální vzdálenosti od imaginární osy, vybrány optimální regulátory. Jejich vybráním se kromě splnění požadovaných bezpečností získá i kvalitní odezva výsledného systému. Nevýhodou této metodiky je využití „hrubé“ síly napočítáním všech řešení.

Její nejjednodušší variantou je výpočet pro jedinou frekvenci, která se zvolí dle empirického pravidla, uvedeného v příkladu na straně 32. Nevýhoda takového řešení plyne

z podstaty nepřesného určení optimální frekvence, na které dojde ke splnění pravidla maximální vzdálenosti pólu či nuly od imaginární osy. Ta je závislá na konkrétních hodnotách amplitudové a fázové charakteristiky a pro její hodnotu nebyl v této práci odvozen vzorec.

Literatura

- [1] BOUŠKA, Tomáš. *Frekvenční metody návrhu regulátorů typu Lead a Lag*. Praha, 2009. iii, 28 s. Bakalářská práce. ČVUT, Fakulta elektrotechnická, Katedra řídicí techniky.
- [2] FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2006. 885 s.
- [3] JONÁŠ, Karel. *GUI pro návrh PID regulátoru*. Praha, 2008. v, 61 s. Bakalářská práce. ČVUT, Fakulta elektrotechnická, Katedra řídicí techniky.
- [4] ŠEBEK, Michal. *Slajdy přednášek předmětu Systémy a řízení – X35SRI* [online]. 2009 [cit. 2010-03-26]. Dostupný z WWW: <http://support.dce.felk.cvut.cz/e-kurzy/course/view.php?id=14>.
- [5] WANG, Fei-Yue. *The Exact and Unique Solution for Phase-Lead and Phase-Lag Compensation*. IEEE TRANSACTIONS ON EDUCATION. 2003, vol. 46, NO. 2, s. 258-262 .
- [6] WANG, Ya-Gang; SHAO, Hui-He. *Optimal tuning for PI controller*. Automatica. 2000, vol.36, s. 147-152.

Příloha A

Obsah přiloženého CD

Součástí této bakalářské práce je přiložené CD obsahující elektronickou verzi textu této bakalářské práce ve formátu .pdf a zdrojové soubory aplikace pro návrh regulátorů v MATLABu.

- Adresář **Text** - vlastní text této bakalářské práce ve formátu .pdf
- Adresář **Source** - zdrojové kódy aplikace a soubory potřebné pro její běh