České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Bakalářská práce

Podpora výuky regulační techniky - virtuální modelování

Praha, 2007 Autor: Michal Vítek

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou (bakalářskou) práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne _____ _____

podpis

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce Ing. J. Roubalovi PhD. za pevné vedení, podnětné rady a čas, který věnoval mé práci. Dále bych rád poděkoval všem mým blízkým za velkou podporu.

Abstrakt

Předkládaná bakalářská práce je myšlena jako materiál určený pro podporu výuky na Katedře řídicí techniky Českého vysokého učení technického v Praze. Práce je rozdělena do dvou částí. První část práce je zaměřena na vytvoření modelu parního generátoru s turbínou řízeného Wattovavým regulátorem v prostředí Matlab Virtual Reality Toolboxu. Druhá část bakalářské práce se zaobírá stabilitou systému, přičemž na problém nahlíží z různých hledisek. Jejím cílem je vytvoření studijního materiálu, dávajícího studentům rychlý přehled této důležité problematiky. Hlavní principy jsou demonstrovány na řešených příkladech, v dílčích kapitolách je též přiložena sada neřešených, ale motivujících příkladů.

Abstract

The aim of presented graduation thesis is to support the education in the Department of Control Engineering at Czech Technical University in Prague. The presented work consists of two main parts. First of these is aimed on developement of a Matlab Virtual Reality Toolbox model of system with steam generator and turbine, which is controlled by a Watt regulator. The second part reviews system stability from various views. The goal is to create a study material that would enable students to get quick review of this importart topic. The main principles are demonstrated on solved examples, but a set of unsolved and motivative examples is also included in the subsections.

České vysoké učení technické v Praze, fakulta elektrotechnická

Katedra řídicí techniky | Školní rok: 2006/2007

Zadání bakalářské práce

Student: Michal Vítek

Obor: Kybernetika a měření

Název tématu: Podpora výuky regulační techniky – virtuální modelování

Zásady pro vypracování:

1. Připravte sadu řešených a neřešených příkladů, které budou součástí sbírky příkladů k výuce předmětů Systémy a modely a Systémy a řízení. Konkrétně k tématu stabilita systémů.
2. Odvoďte matematický model dynamického chování odstředivého regulátoru.
3. Namodelujte tento model v Simulinku a připravte k němu virtuální realitu.

Seznam odborné literatury:

- Petr Horáček, Systémy a modely, Praha 2000
- Jan John, Systémy a řízení, Praha 1999
- Web SARI, http://dce.felk.cvut.cz/sari/
- http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/vr/

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Jiří Roubal, Ph.D.

Datum zadání bakalářské práce: zimní semestr 2005/06

Termín odevzdání bakalářské práce: 15. 8. 2007

Prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry

L.S.

Prof. Ing. Zbyněk Škvor, CSc.
děkan

V Praze, dne 6. 3. 2007

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Kapitola 1

Úvod

1.1 Obecná problematika

Při vytváření modelu regulátoru dle mechanické předlohy je v prvé řadě nutné model detailně rozebrat a matematicky popsat mechanické vztahy platící pro daný systém. V praxi se většina těchto systémů chová nelineárně, avšak díky tomu, že systémy jsou většinou určeny k práci v definovaných mezích, je možné zvolit pro systém vhodný pracovní bod a kolem něj provést linearizaci. Proces linearizace pak následně zjednoduší návrh modelu. Funkcí regulátoru je stabilizace systému na požadovaných hodnotách výstupní veličiny.

1.2 První část práce

V první části práce je rozbor Wattova odstředivého regulátoru, postup při sestavování jeho matematické reprezentace následně použité ve výpočetním programu MATLAB/Simulink a vytvoření jeho vizualizace ve standardu VRML97(dále VR Model) . Funkčnost modelů pak zajišťuje propojení matematického modelu a VR Modelu pomocí Virtual Reality Toolboxu(dále VR Toolbox). V rámci identifikace systému je cílem definovat vztah mezi vstupními otáčkami regulátoru a velikostí jeho akčního zásahu. Tato znalost je následně využita pro návrh matematického modelu i pro vytvoření modelu virtuálního světa odpovídajícího možnému technickému řešení. Dalším cílem je pak vytvoření matematického modelu virtuální soustavy kotle a turbíny, kterou je možno pomocí regulátoru ovládat.

1.3 Druhá část práce

Ve druhé části bakalářské práce je rozebrána stabilita u lineárních systémů a možnost její identifikace, což je v praxi dále využíváno k návrhu regulace daného systému. Kromě obecných definicí stability jsou zde obsaženy též řešené a neřešené příklady k nastíněné problematice. Kritéria sloužící k určení stability systému jsou zmíněna pouze okrajově, přičemž jsou uvedeny zdroje, kde jsou rozvedena více do hloubky.

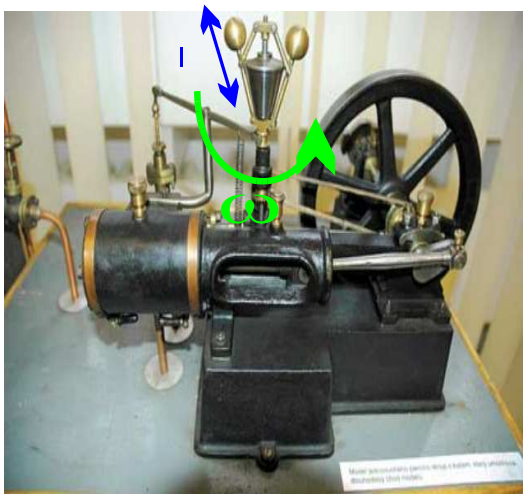
Kapitola 2

Wattův regulátor

2.1 Rozbor

2.1.1 Obecný nástin stavby a funkce regulátoru

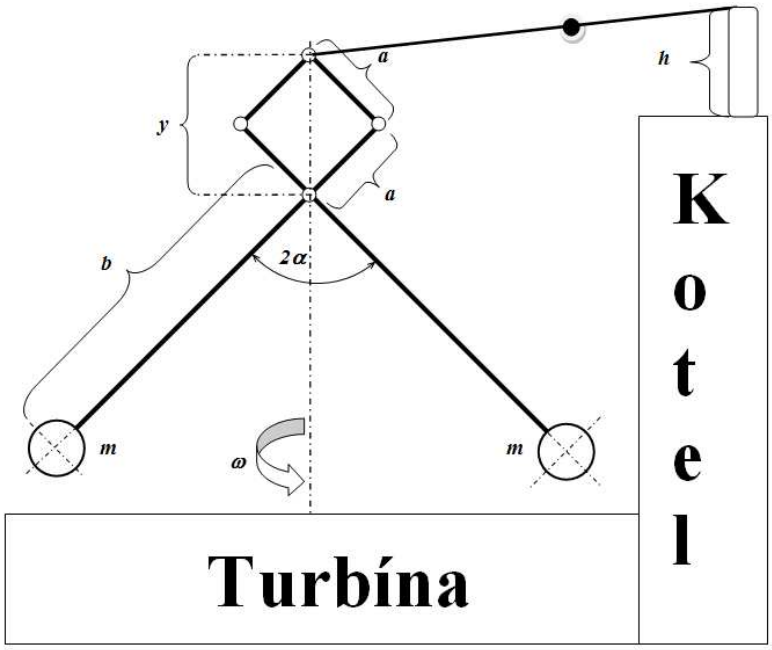
Wattův regulátor se proslavil v době průmyslové revoluce, kdy s prudkým nárůstem počtu parních strojů, bylo třeba mít i spolehlivý a jednoduchý regulační systém stabilizující a optimalizující práci továrních strojů. Regulátor je založen na principu odstředivé síly. I v současné době lze tento regulátor najít v systémech, ve kterých není vhodné z konstrukčních důvodů využít k regulaci pouze elektronické prvky a kde se využívá převod pozorované veličiny na otáčky. Nejčastější současnou aplikací regulátoru je regulace vstřikování u lokomotiv, kde je použit buď samostatně, nebo jako součást sdruženého regulátoru.
Nastavení požadovaných výstupních otáček systému se docílilo pomocí stavitelné délky l rotujících ramen regulátoru, se závažími na koncích, napojených na hnací hřídel parního stroje viz (obr. 2.1). Největším problémem při tvorbě matematického modelu bylo nastavení parametrů regulátoru pro daný systém, přičemž nejúčelnější byla postupná aproximace.



Obrázek 2.1: Parní stroj s Wattovým regulátorem

2.1.2 Technický rozbor

Regulátor je v rámci rozboru uvažován ve dvou možných provedeních. V první verzi jsou závaží na koncích rotujících ramen regulátoru stavitelná manuálně viz (obr. 2.3(a)), ve druhé verzi jsou pak závaží uchycena k ramenům pomocí pružin majících za cíl zlepšit jeho dynamické a regulační vlastnosti viz (obr. 2.3(b)).



Obrázek 2.2: Strukturální schéma Wattova regulátoru

2.1.2.1 Regulátor - verze 1

Ze schématu (obr. 2.2) je patrno, že první uvažovanou verzi regulátoru si lze představit jako dvě vzájemně závislé části. První částí jsou dvě ramena, na kterých jsou ve vzdálenosti b umístěna závaží o hmotnosti m a která rotují úhlovou rychlostí ω kolem osy otáčení (souměrnosti). Délka ramene b (tj. poloha závaží na rameni) je uvažována jako manuálně stavitelná v daných mezích. Rameno b svírá s osou otáčení úhel α .
Druhou částí regulátoru jsou jakési spojené nůžky, jejichž ramena mají shodně délku a a s osou otáčení taktéž svírají úhel α. Spolu se zvyšující se rychlostí rotace ω se nůžky rozevírají a úhel α roste. V závislosti na změně úhlu α se mění i délka y, která je inverzní k výstupní veličině regulátoru. Výstupní veličinou regulátoru je délka h, určující míru otevření ventilu u parního kotle. Pro získání matematického popisu regulátoru je nutno stanovit vztah mezi jeho vstupní a výstupní veličinou.
Nejprve je nutné určit závislost mezi úhlem α a posunem y. Tento vztah se dá vyjádřit jako

$$y = 2a\cos\alpha. \tag{2.1}$$

Následuje určení závislosti mezi úhlem α a úhlovou rychlostí ω. Aby bylo možné tento vztah určit je nutné uvažovat působení sil na závaží (hmotnost ramen a odpory v

čepech jsou zanedbány). Pro lepší pochopení platných vztahů je uveden detail ramena viz (obr. 2.3(a)). Odstředivá síla je obecně vyjádřena jako

$$F_o = m\omega^2 R,$$

což lze upravit na tvar

$$F_o = m\omega^2 b \sin\alpha.$$

Gravitační síla je vyjádřena ve tvaru

$$F_g = mg.$$

Úhel α je možno z těchto rovnic vyjádřit jako

$$\tan(\alpha) = \frac{m\omega^2 b \sin(\alpha)}{mg},$$

přičemž po úpravě dostaneme tvar

$$\alpha = \arccos(\frac{g}{\omega^2 b}). \tag{2.2}$$

Dalším krokem k získání vztahu mezi vstupní veličinou ω a výstupní veličinou h je dosazení vztahu získaného v rovnici (2.2) do rovnice (2.1). Z tohoto dosazení pak vyplývá vztah mezi ω a y

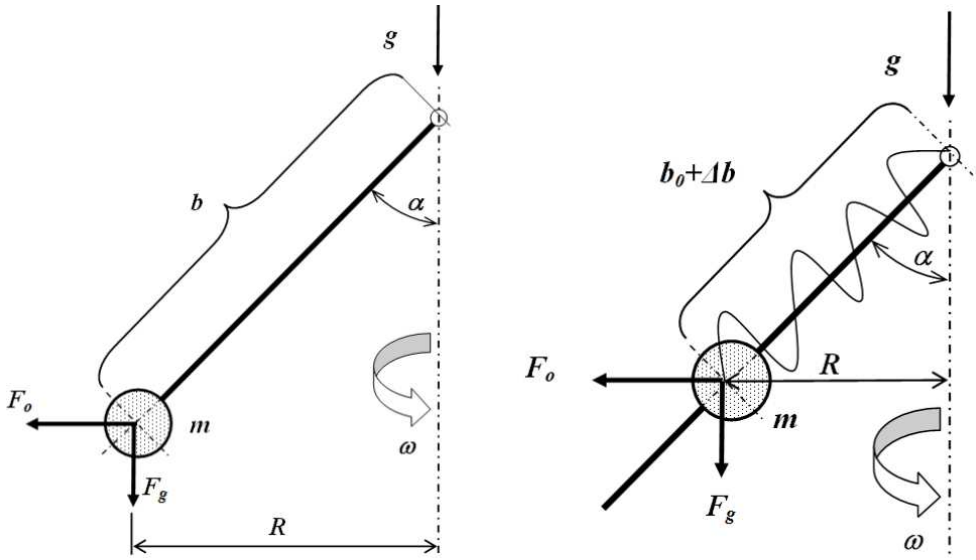
$$y = 2a\frac{g}{\omega^2 b}. \tag{2.3}$$

Závěrem je dosazení tohoto výsledku do vztahu mezi y a h

$$h = -y = -2a\frac{g}{\omega^2 b}. \tag{2.4}$$

2.1.2.2 Regulátor - verze 2

U druhé verze regulátoru je počáteční úvaha o jeho konstrukci též založena na schématu (obr. 2.2). Rozdíl oproti verzi předchozí je ve způsobu uchycení závaží na remenech, které je nastíněno na schématu (obr. 2.3(b)). Diference je v tom, že délka ramene b (poloha závaží na rameni) není konstantní, ale je dána tuhostí pružiny k, úhlem α a hmotností závaží m. Pružina je uvažována jako lineární. K získání vztahu mezi vstupní velčinou je nutno v prvním kroku určit závislost délky b na úhlu α. Délku b lze pojmout jako délku složenou z fixní části b_0, která odpovídá délce pružiny v klidové poloze, a z části $\Delta\ b$, která se mění spolu s úhlem α.



(a) Verze 1 (b) Verze 2

Obrázek 2.3: Detaily ramene regulátoru

Při hledání matematického popisu bylo postupováno v několika krocích.
Byla zavedena direkční síla F_d, kterou lze vyjádřit pomocí hmotnosti gravitační síly F_g, odstředivé síly F_o a úhlu α jako

$$F_d = F_g \cos\alpha + F_o \sin\alpha,$$

pro odstředivou a gravitační sílu platí vztahy

$$F_o = m\omega^2 b \sin\alpha$$

$$F_g = mg.$$

Direkční sílu lze též vyjádřit i z tuhosti pružiny jako

$$F_d = \Delta bk.$$

Nyní je již možno sestavit rovnici rovnováhy

$$mg\cos\alpha + mr\omega^2 \sin\alpha - \Delta bk = 0. \tag{2.5}$$

Vztah pro úhel α pak lze zapsat ve tvaru

$$\alpha = \arccos(\frac{mg}{\Delta bk}).$$

Poloměr r je možno vyjádřit jako

$$r = (b_0 + \Delta b)\sin\alpha = (b_0 + \Delta b)\sin(\arccos(\frac{mg}{\Delta bk})).$$

Původní rovnici (2.5) lze po dosazení těchto vztahů zapsat jako

$$mg\cos(\arccos(\frac{mg}{\Delta bk})) + m(b_0 + \Delta b)\sin(\arccos(\frac{mg}{\Delta bk}))\omega^2\sin(\arccos(\frac{mg}{\Delta bk})) - \Delta bk = 0. \tag{2.6}$$

Z této rovnice je možno vyjádřit rovnici pro výpočet prodloužení $\Delta\ b$ a velikosti úhlu α

$$\alpha = \arccos\frac{mg}{mk\omega^2\frac{b_0}{k-m\omega^2}} \tag{2.7}$$

a

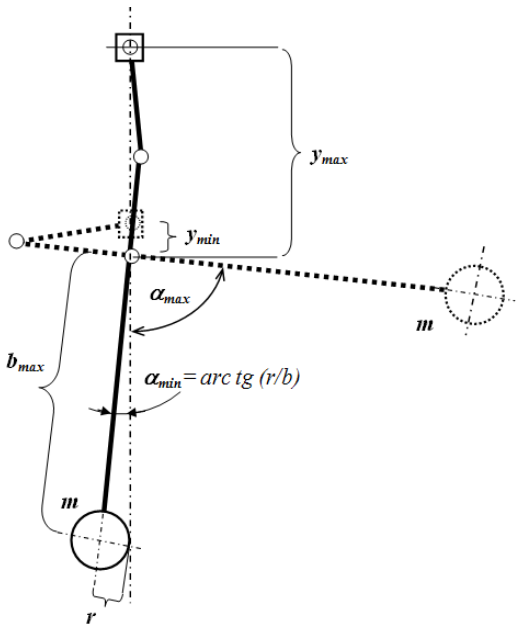
$$\Delta b = m\omega^2\frac{b_0}{k - m\omega^2}\,. \tag{2.8}$$

Posledním krokem je dosazení vztahu (2.7) do rovnice (2.4). Vztah mezi vstupní a výstupní veličinou u druhé verze regulátoru tedy bude

$$h = -y = -2a\frac{g}{\omega^2(b_0 + m\omega^2\frac{b_0}{k-m\omega^2})}\,. \tag{2.9}$$

2.1.3 Omezení regulátoru

K zajištění správného chování VR Modelu je nutné stanovit meze, ve kterých se regulátor může pohybovat. Mezní polohy pro obě navržené verze regulátoru jsou znázorněny na schématu (obr. 2.4).



Obrázek 2.4: Mezní polohy regulátoru

Mezní polohy regulátoru je nutno určit jako průnik všech limit omezujících dílčí části regulátoru z omezení daných fyzikálními zákony. Při pohledu z fyzikálního hlediska je omezení dáno minimálním a maximálním úhlem ramena regulátoru k ose rotace $\alpha_{\min}$ a $\alpha_{\max}$. Minimální úhel $\alpha_{\min}$ je dán poloměrem závaží r a délkou ramena b, přičemž platí vztah $\alpha_{\min} = \arcsin(\frac{r}{b})$. Maximální úhel $\alpha_{\max}$ je u ideální konstrukce regulátoru $\frac{\pi}{2}$, u reálné konstrukce jde předpokládat $\alpha_{\max} < \frac{\pi}{2}$. Z mechanického pohledu je omezení dáno hodnotou zdvihu nůžek regulátoru y, respektive jeho minimální a maximální velikostí $y_{\min}$ a $y_{\max}$. Minimální velikost zdvihu je u ideální konstrukce regulátoru $y_{\min} = 0$, u reálné konstrukce je možno předpokládat $y_{\min} > 0$. Maximální velikost zdvihu $y_{\max}$ je omezena délkou ramen a, přičemž u ideálního konstrukce regulátoru platí $y_{\max} = 2a$. Díky provázanosti úhlu α a zdvihu y plynoucí z rovnice (2.1) je nutné vytvořit průnik těchto dvou pohledů. Pro ideální regulátor tedy platí

$$\begin{aligned} y_{\min} &= 0 \\ y_{\max} &= 2a\cos(\arcsin(\tfrac{r}{b})). \end{aligned} \quad . \tag{2.10}$$

Pro druhou verzi regulátoru je navíc nutno zavést ještě omezení maximálního protažení pružiny $\Delta b_{\max}$, které by u reálného modelu bylo realizováno zarážkou na rameni se závažím. Toto omezní je pak dáno fyzikálními parametry regulátoru jako

$$\Delta b_{\max} = b - b_0. \tag{2.11}$$

Minimální délka pružiny $\Delta b_{\min}$ je zvolena jako

$$\Delta b_{\min} = \frac{b}{2}\,. \tag{2.12}$$

2.1.4 Shrnutí rozboru regulátoru

K vlastnímu zpracování do podoby matematického a VR Modelu byla zvolena první verze se stavitelnými závažími, která skýtá větší potenciál z hlediska interaktivity pro uživatele a je i přehlednější pro zpracování ve virtuální realitě. Z hlediska regulačních vlastností by patrně zajímavější byla druhá verze regulátoru, ovšem její zpracování do VR Modelu se jevilo jako problematické a pro uživatele neznalého dané konstrukce nejasné.

2.2 Regulovaný systém

Aby bylo možno přejít k samotnému vyhotovení modelu, je nejprve nutno nadefinovat regulovaný systém. Hledaný systém by měl mít výstup v otáčkách, které by měly být regulovatelné pomocí akčního zásahu odstředivého regulátoru. Byla zvolena varianta odpovídající historickému užití tohoto regulátoru - kotel s turbínou. V rámci rozboru jsou uvažována dvě možná konstrukční řešení, která jsou dále rozvedena. Při návrhu těchto řešení byla provedena následující zjednodušení oproti reálnému systému:

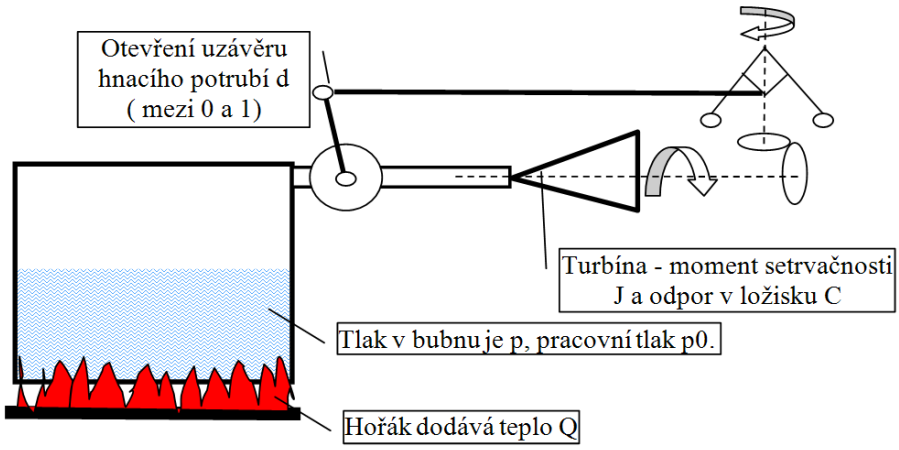
- připouštění vody nemá skokový vliv na teplotu v kotli
- byla provedena linearizace entalpie páry v závislosti na tlaku
- mechanismus akumulace energie při zvyšování teploty i tlaku, kdy se měrná tepelná kapacita nelineárně zvyšuje, je zanedbán
- způsob proudění páry z natlakovaného bubnu je aproximován z Bernoulliho rovnice
- při upouštění páry je hmotnostní průtok vyjádřen rovnicí vytékání ideální kapaliny
- je uvažován kroutící moment páry úměrný průtoku, který je přibližným vyjádřením zavislosti mezi momentem a průtokem na skutečné turbíně.

Při návrhu byli využity poznatky ze (*Bernoulliho rovnice*, ⟨`http://cs.wikipedia.org/wiki/Bernoulliho_rovnice`⟩),(Gaš, ⟨`http://prfdec.natur.cuni.cz/~gas/FCH1_Syl.`

doc⟩),(*Simulátor parní turbíny*, ⟨http://dsp.vscht.cz/konference_matlab/MATLAB06/prispevky/cidl_hyncica/cidl_hyncica.pdf⟩). K vytvoření matematického a VR Modelu byla ve výsledku, pro větší odolnost vůči výkyvům tlaku, vybrána druhá navrhovaná verze systému.

2.2.1 Regulovaný systém - verze 1

Schéma (obr. 2.5) ukazuje strukturu předpokládaného řešení. Je na něm vidět buben kotle na pevné palivo, ve kterém se nachází velké množství vody, jejíž teplota se předpokládá v okolí bodu varu. Dalším předpokladem je konstantní přísun tepla, které vypařuje přes bod varu přibližně konstantní množství vody. To vše platí pouze přibližně, standardně závisí toto teplo na pracovním bodě, tj. na teplotě a tlaku v bubnu. Část tepla je tedy využita k odpařování a druhá část ohřívá už vypařený plyn na vyšší teplotu.



Obrázek 2.5: Schéma kotle s regulátorem - verze 1

Prvkem soustavy, kterému je věnována největší pozornost, je regulační ventil kotle. Ventil je uvažován jako součást hnacího potrubí vedoucího k turbíně, což je jednoduché konstrukční řešení, ovšem při vysokém nárůstu tlaku má omezené regulační možnosti. Menší regulační schopnost je dána principem regulace, kdy míra otevření ventilu určuje množství plynu odtékajícího z kotle do turbíny, což ovlivňuje tlak v kotli a rychlost otáčení turbíny, potažmo regulátoru. Regulátor se snaží udržet kostantní otáčky turbíny, ovšem se vzrůstající rychlostí otáčení turbíny uzavírá ventil a nereflektuje již na prudký nárůst tlaku v kotli, což by u reálné konstrukce hrozilo destrukcí celého systému. I přes tento

nedostatek je popis kotle a turbíny pro toto řešení důležitý, protože zachycuje nelinearity kotle a turbíny, což je využito v rámci řešení druhého konstrukčního návrhu.

2.2.1.1 Popis kotle

V rámci návrhu kotle je použit předpoklad zachování konstantního tlaku pro případ uzavření výpustního ventilu a zastavení dodávky tepla, tudíž tepelné ztráty do okolí jsou pro zjednodušení zanedbány. Při popisu kotle je vyjito ze stavové rovnice plynu

$$pV = nkT,$$

kde p je tlak, V je objem, který je uvažován konstantní, T je teplota v nádobě, která je uvažovaná jako konstantní, a nakonec n je množství molekul v nádobě. Ze čtyř stavových veličin je v tomto případě třeba brát v ohled dvě, a to tlak p a počet molekul n. Počet molekul je ovlivněn jednak otevřením ventilu, kudy se molekuly ze systému ztrácí, a druhak hořákem, který dodává teplo do systému, odpařuje vodu na páru, a tím molekuly dodává. Přírůstek tlaku za čas je možné napsat jako

$$\frac{\partial p}{\partial t} = K_1 Q - K_2 \sqrt{p - p_0} d,$$

kde $K_1 Q$ jsou nové molekuly a $K_2 \sqrt{p - p_0} d$ je výtok ventilem. Výtok z nádoby je podobně jako v případě vody úměrný odmocnině rozdílu tlaku uvnitř bubnu a tlaku za turbínou. Předpokládáme dále pracovní tlak $\bar{p}$, což je pracovní tlak v nádobě, kolem kterého je plánovaný provoz.

2.2.1.2 Popis Turbíny

Turbína je typický rotační stroj, podobný kolu s lopatkou. Protékající plyn působí na lopatky turbíny silou, ta se vůči ose otáčení projeví jako moment. Pokud se sečtou momenty z jednotlivých lopatek, získá se kroutící moment, který otáčí zařízením. Rovnici pro pohyb rotačního zařízení řeší druhá věta momentová:

$$J\ddot{n} = M,$$

kde $\ddot{n}$ je druhá derivace natočeného úhlu podle času, J je moment setrvačnosti a M je kroutící moment, který na turbínu působí. V rovnici je možno dosadit za kroutící moment dva členy. První člen rovnice reprezentuje část systému, která zařízení pohání a která je

úměrná průtoku plynu hnacím potrubím, a druhý člen representuje ztráty v ložisku a odpor turbíny vůči otáčení. Rovnice pak vypadá takto

$$\ddot{n} = K_3 K_2 \sqrt{p - p_0} d - C\dot{n}.$$

2.2.1.3 Linearizace

Závěrečnou fází kompletace soustavy kotel-turbína je linearizace těchto dvou členů systému. Rovnice pro tlak i otáčky jsou nelineární, protože výtok je úměrný odmocnině tlaku. Z tohoto důvodu je třeba provézt linearizaci kolem pracovního bodu. Volba pracovního bodu je důležitá pro hodnoty uvnitř nelineárního členu, a to pro polohu ventilu d a pro tlak p. Hodnota pro klapku je zvolena na $d_0 = \frac{1}{2}$, pro tlak blíže nezvolená hodnota $\bar{p}$. Následně je možno zapsat rovnici

$$\Delta\dot{p} = K_1 Q - K_2 \frac{1}{2\sqrt{\bar{p} - p_0}} d_0 \Delta p - K_2 \sqrt{\bar{p} - p_0} \Delta d$$

$$\ddot{n} = K_3 K_2 \frac{1}{2\sqrt{\bar{p} - p_0}} d_0 \Delta p + K_3 K_2 \sqrt{\bar{p} - p_0} \Delta d - \frac{C}{J} \dot{n}.$$

Akční zásah je potom úměrný rychlosti otáčení $\dot{n}$, která je také řízenou veličinou. Druhá rovnice je tedy pouze rovnicí prvního řádu. Vše lze přepsat do stavového popisu, kde d je řídicí veličina, tlak jeden stav a rychlost otáčení druhý:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{p} \\ \ddot{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_2 \frac{1}{2\sqrt{\bar{p}-p_0}} d_0 & 0 \\ K_3 K_2 \frac{1}{2\sqrt{\bar{p}-p_0}} d_0 & -\frac{C}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p \\ \dot{n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & -K_2\sqrt{\bar{p} - p_0} \\ 0 & K_3 K_2 \sqrt{\bar{p} - p_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ \Delta d \end{bmatrix}$$

Jak je patrno, matice systému je dolní trojúhelníková, vlastní čísla jsou tím pádem na diagonále, jsou záporná a reálná. Regulovaný systém je tedy druhého řádu, stabilní s nekmitavými charakteristikami. Všechny hodnoty v linearizovaném systému jsou měřeny od hodnoty ekvilibra, přičemž pro získání skutečné hodnoty je nutné sečíst diferenci a hodnotu ekvilibria:

$$\begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{n} \\ \bar{Q} \\ \bar{d} \end{bmatrix}$$

2.2.2 Regulovaný systém - verze 2

Druhé navrhované řešení se od prvního liší v umístění regulačního ventilu, který je nyní nezávislý na hnacím potrubí a funguje jako samostatný upouštěcí ventil. Hnací potrubí

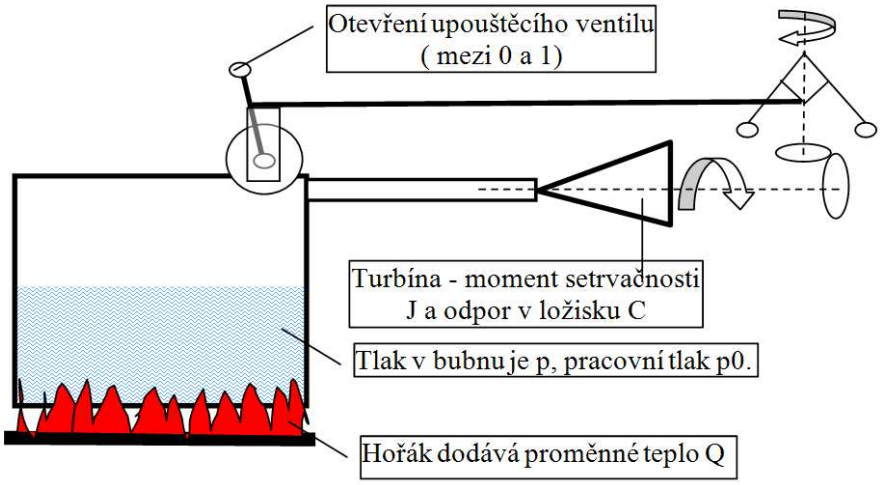
je necháno neregulované s konstantním průměrem. Toto řešení, které je nastíněno na schématu (obr. 2.6), je oproti předchozímu výhodné v tom, že při nárůstu tlaku v kotli a potažmo otáček turbíny a regulátoru, vzroste i míra otevření ventilu, což vede ke snížení tlaku v kotli. Reálný systém s takto umístěným ventilem by tedy měl být odolnější vůči možnosti poškození v důsledku prudkého nárůstu tlaku v kotli. Matematické vyjádření chování kotle a turbíny se oproti předcházející verzi změní takto:
Rovnice pro tlak v kotli

$$\dot{p} = K_1\bar{Q} - K_2\sqrt{p - p_0} - K_A\sqrt{p - p_A}d, \tag{2.13}$$

kde člen s označením A je výpusť do atmosféry, jejíž průřez je manipulační veličina. Rovnice pro rotaci turbíny

$$J\dot{n} = K_3K_2\sqrt{p - p_0} - Cn, \tag{2.14}$$

kde došlo k zjednodušení v důsledku absence členu reprezentujícího změnu průřezu ventilu.



Obrázek 2.6: Schéma kotle s regulátorem - verze 2

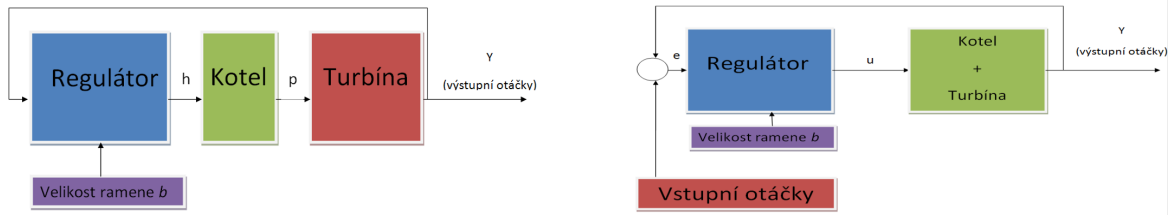
Pro zjednodušení a demonstrační účely při výuce jsou tyto vztahy v rámci jednoho z přiložených matematických modelů nahrazeny přenosem druhého řádu, který aproximuje chování parního kotle a turbíny. Jako možná náhrada matematického modelu kotle s turbínou byl zvolen přenos ve tvaru:

$$P(s) = \frac{15}{s^2 + s + 5}\,. \tag{2.15}$$

2.3 Návrh v prostředí Matlab

2.3.1 Matematický model

V rámci tvorby matematického modelu byli uvažovány dvě možné varianty řízení systému. Tyto varianty jsou znázorněny na schématu (obr. 2.7). První uvažovaná varianta představuje situaci, kdy jediným vnějším vstupem regulovaného systému je velikost délky ramene b, která určuje výslednou hodnotu ustálených otáček systému, který je poháněn konstantní dodávkou tepla. Druhá uvažovaná varianta je pak řiditelná pomocí vstupních otáček i délky ramene b, přičemž tyto parametry určují hodnotu otáček systému po odeznění přechodových jevů. Zkompletovány byli obě uvažované varianty, přičemž pro první variantu byl kotel s turbínou realizován dle odvození z kapitoly (2.2.2) a pro variantu s referenčními otáčkami byla na místo kotle s turbínou zvolena jejich aproximace viz (2.15).



(a) Výstupní otáčky dané mechanickými parametry systému

(b) Výstupní otáčky dané referenčními otáčkami

Obrázek 2.7: Možnosti řízení systému

2.3.2 Simulace modelu - verze 1

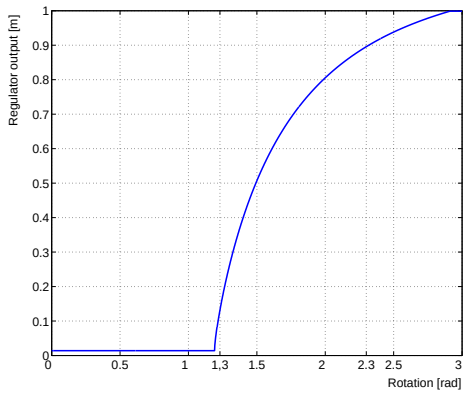
Dokončení matematického modelu uvažovaného v zapojení dle schématu (obr. 2.7(a)) spočívalo ve stanovení konstant modelu, které ovlivňují jeho dynamické a regulační schopnosti. Za cíl bylo stanoveno nalezení takového nastavení konstant, které by umožňovalo získat pro různá nastavení délky b co nejširší možnost změny otáček systému, ovšem se zachováním regulačních schopností a možnosti tyto rozdíly rozeznat při běhu simulace na VR Modelu. Všechny parametry byly stanoveny metodou postupné aproximace, a to tak, aby pro minimální délku ramene b byli ustálené otáčky regulátoru na hodnotě $\frac{\pi}{4} \pm 0,4 rad/s$. Tato hodnota byla zvolena vzhledem k rychlosti průběhu simulace, kdy pro vyšší hodnoty otáček dochází k rozmazání vizualizace. Parametry, které byli pro model

pomocí aproximace vybrány jsou v tabulce (tabulka 2.1).

Tabulka 2.1: Parametry

Parametry Regulátoru		
g	9,8	$[\frac{m}{s^2}]$
r	1.15	$[m]$
a	4	$[m]$
Parametry Kotle a Turbíny		
K_1	62	$[\frac{pa}{j}]$
K_2	0.6	$[\frac{m^3}{pa}]$
K_A	10	$[-]$
p_A	100000	$[pa]$
K_3	1	$[\frac{N.m}{m^3.s}]$
p	300000	$[pa]$
p_0	100000	$[pa]$
c	300	$[\frac{N.m}{rad.s}]$
j	10000	$[kg.m^2]$
d_0	0,5	$[-]$
Q	60	$[Mj]$

Pro zvolené parametry byla pak provedena simulace s různými hodnotami b, přičemž měření proběhlo pro minimální, střední a maximální délku ramene. Pro zjištění regulačních schopností regulátoru byla sejmuta i charakteristika systému s odpojeným regulátorem a výpustním ventilem otevřeným trvale na 50%. Zkoumány byli přechodové charakteristiky tlaku páry v kotli a otáček turbíny, přičemž u charakteristik jsou zapsány hodnoty sledovaných veličin po odeznění přechodového jevu. Charakteristiky, které jsou zachyceny na (obr. 2.9), ukazují, že rozdíl výsledných tlaků, v kotli po ustálení, pro mezní délky b je $240kpa$, což pak odpovídá rozdílu v otáčkách $0,32rad$. Z přechodových charakteristik vyplývá, že pro zvolené parametry je možno, pomocí nastavení regulátoru, ovlivnit výsledné otáčky systému až o 19%, což splňuje daný cíl o maximálním možném rozsahu. Regulační schopnosti jsou pro všechny hodnoty b zhruba stejné, jak je vidět z dob ustálení. Pro neregulovaný systém je doba ustálení téměř trojnásobná oproti systému regulovanému. Doby ustálení regulovaného systému pro různé velikosti b se liší, protože simulace proběhly se stejným počátečním tlakem v kotli, ale různými cílovými tlaky. Jinak



Obrázek 2.8: Převodní charakteristika regulátoru pro střední hodnotu b

lze považovat regulační účinky pro různá nastavení za podobné. Oba v počátku simulace stanovené požadavky na soustavu se zvolenými hodnotami parametrů jsou tedy splněny.

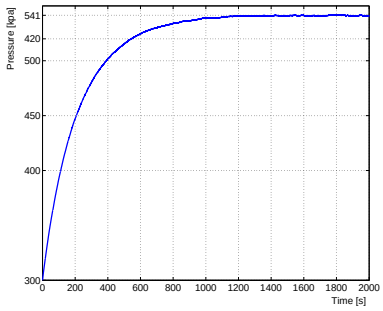
2.3.3 Simulace modelu - verze 2

V druhé navržené verzi modelu je systému uvažován v zapojení dle schématu (obr. 2.7(b)). Systém je složen z regulátoru a z přenosu dle (2.15), nahrazujícího parní kotel s turbínou. Z převodní charakteristiky regulátoru (**??**), s ramenem b nastaveným do střední polohy, bylo pro daný systém určeno pracovní pásmo vstupních otáček jako: $1,3 - 2,3[rad/s]$. Jak je vidět z přechodové charakteristiky (obr. 2.10(b)), pro vstupní otáčky $1,3[rad/s]$ a minimální velikost ramena b, je již regulátor mimo své pracovní pásmo a nebyl by v praxi použitelný, ovšem tohoto jevu lze využít v rámci výuky. Celkové výsledky simulace pro druhou verzi modelu jsou zachyceny viz (obr. 2.10).

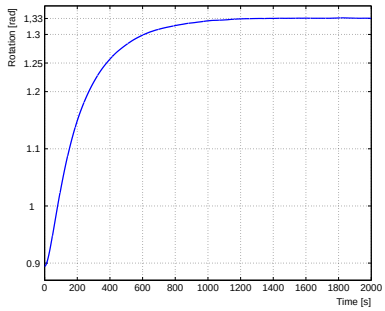
2.4 Modelování regulátoru a regulované soustavy

2.4.1 Programové vybavení

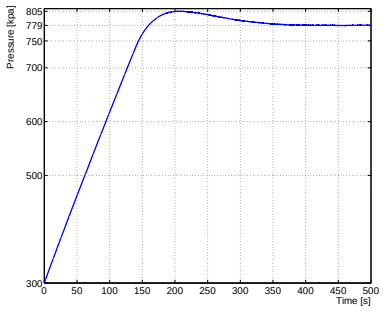
Pro vytvoření VR Modelu regulátoru byl zvolen model ve formátu VRML97. Vytvoření modelu v tomto standardu je možné realizovat pomocí řady komerčních programů, případně je možno při hlubší znalosti jazyka VRML97 model vytvořit v textovém editoru.



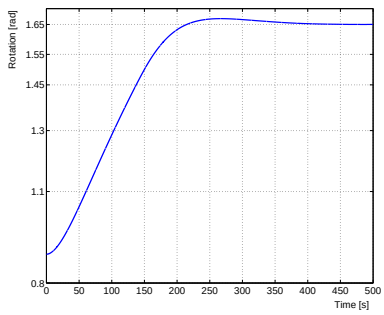
(a) Odpojený regulátor, tlak v kotli



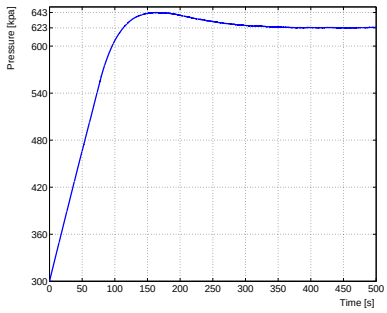
(b) Odpojený regulátor, otáčky regulátoru



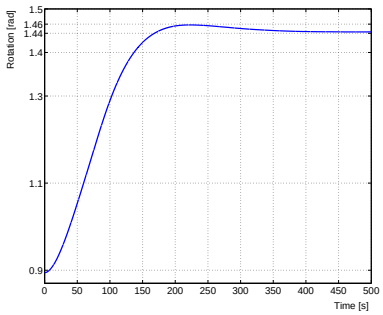
(c) Minimální b, tlak v kotli



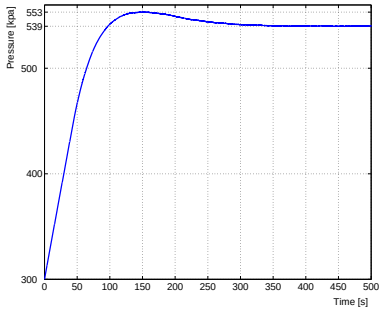
(d) Minimální b, otáčky regulátoru



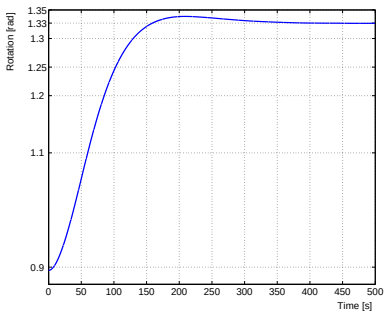
(e) Střední b, tlak v kotli



(f) Střední b, otáčky regulátoru

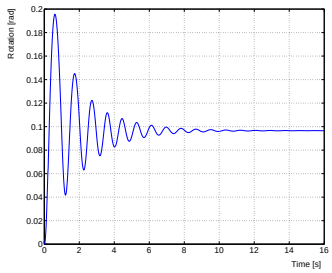


(g) Maximální b, tlak v kotli

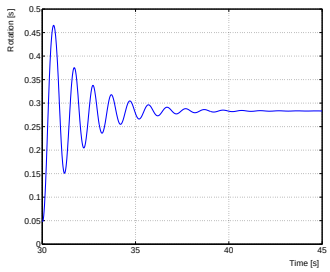


(h) Maximální b, otáčky regulátoru

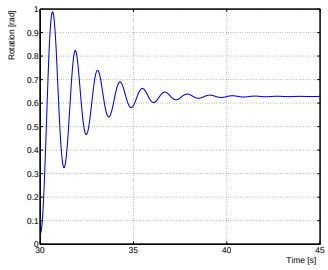
Obrázek 2.9: Přechodové charakteristiky pro různá b, model verze 1



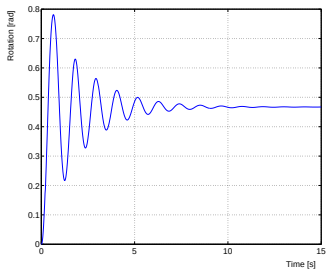
(a) Minimální nastavená délka b, vstupní otáčky $1,3\ rad$



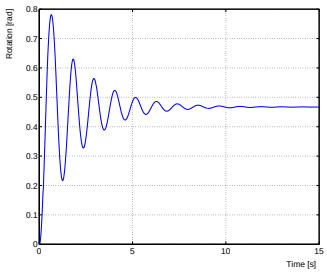
(b) Minimální nastavená délka b, vstupní otáčky $1,8\ rad$



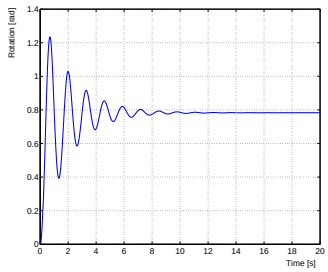
(c) Minimální nastavená délka b, vstupní otáčky $2,3\ rad$



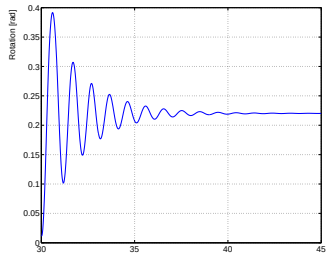
(d) Střední nastavená délka ramene b, vstupní otáčky $1,3\ rad$



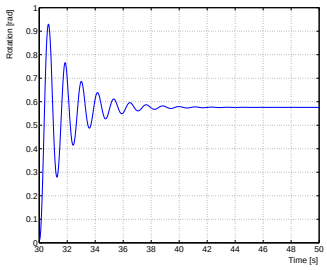
(e) Střední nastavená délka ramene b, vstupní otáčky $1,8\ rad$



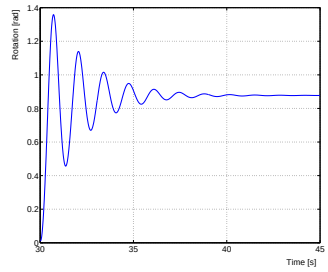
(f) Střední nastavená délka ramene b, vstupní otáčky $2,3\ rad$



(g) Maximální délka ramene b, vstupní otáčky $1,3\ rad$



(h) Maximální délka ramene b, vstupní otáčky $1,8\ rad$



(i) Maximální délka ramene b, vstupní otáčky $2,3\ rad$

Obrázek 2.10: Přechodové charakteristiky pro různé hodnoty referenčních otáček a délky ramene b, model verze 2

Oživení modelu pak zajišťuje Virtual Reality Toolbox produkovaný firmou Humusoft, se kterým je dodáván i program V-Realm Builder, sloužící k modelování virtuálních světů.

2.4.1.1 Virtual Reality Toolbox

Tento toolbox spojuje svět virtuální reality s výpočetním prostředím MATLAB/Simulink. Virtuální realita nabízí interaktivní vstup uživatele do 3D počítačového světa a je ideálním nástrojem pro vizualizaci dat. Virtual Reality Toolbox, který je postaven na ISO standardu VRML97 (*Virtual Reality Modeling Language*, ⟨`http://www.web3d.org/x3d/specifications/vrml`⟩), poskytuje prostředky pro ovládání animovaných 3D scén virtuálního světa z prostředí MATLABu a Simulinku. Sestavu "výpočet $->$ 3D vizualizace" je možné provozovat buď na jednom počítači nebo prostřednictvím standardního TCP/IP protokolu rozšířit konfiguraci do podoby multiplatformní sítě. Vzhledem k tomu, že virtuální 3D světy standardu VRML97 jsou pomocí plug-in modulů přístupné z libovolného prohlížeče WWW stránek, je konfigurace klient-server ideální pro publikaci interaktivních "živých" 3D virtuálních světů prostřednictvím Internetu. Virtual Reality Toolbox je určen především pro interaktivní vizualizaci výsledků simulací prováděných systémem Simulink. Výstupní data ze simulačního schématu ovládají během simulace jednotlivé stupně volnosti (uzly) 3D virtuálního světa. Uzly lze ovládat i pomocí standardního pákového ovladače. Propojení jednotlivých signálů simulačního schématu se stupni volnosti virtuálního světa je velmi snadné a intuitivní, probíhá obdobně jako v jiných toolboxech. Více informací je možno nalézt na (*Virtual Reality Toolbox*, ⟨`http://www.humusoft.cz/matlab/moduly/vrt.htm`⟩).

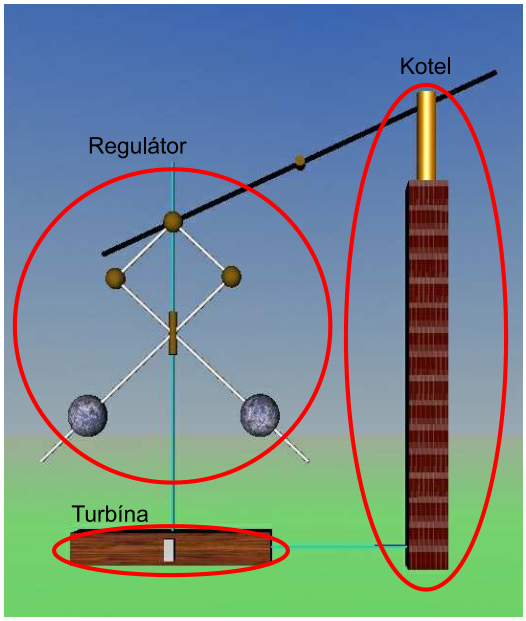
2.4.1.2 V-Realm Builder

V-Realm Builder je graficky orientovaný nástroj pro 3D modelování, který je možno použít pouze v rámci OS Windows. Jedná se o program vytvářející ideální interface pro VRML syntaxi. Jeho GUI nabízí kromě grafické reprezentace 3D scény a nástrojů pro tvorbu základních interaktivních elementů i hierarchický náhled všech elementů scény virtuálního světa organizovaný ve stromové struktůře. Strukturní elementy jsou nazývány uzly a V-Realm Builder podporuje všech 54 typů uzlů definovaných standardem VRML97. Pro každý typ uzlu program umožňuje kompletní editaci parametrů. Podstatnou vlastností je možnost pojemnování každého z uzlů, což je nezbytné pro možnost použít virtuální svět spolu s Virtual Reality Toolboxem. Více informací je možno nalézt na (*V-Realm Builder: User's Guide and Reference*, ⟨`http://www.cs.vu.nl/~eliens/documents/vrml/`

V-Realm⟩).

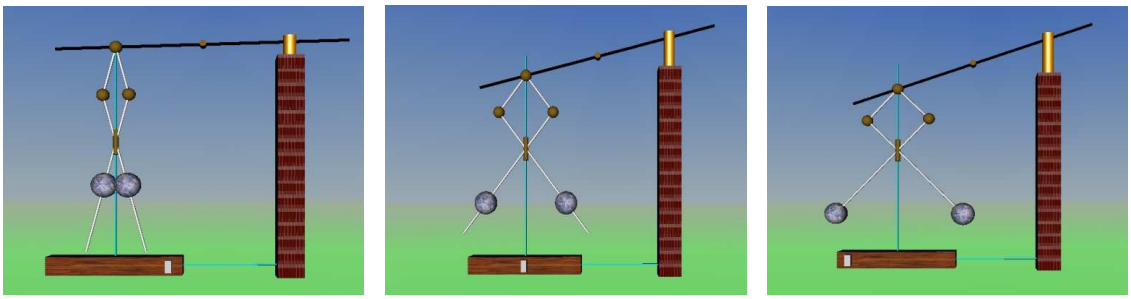
2.4.2 VR Model

Model byl sestaven ze tří částí, které reprezentují své matematické předlohy z prostředí MATLAB/Simulink, přičemž je použit pro obě v něm vytvořené verze. Jedná se o kotel, turbínu a regulátor. Tyto části jsou zvýrazněny na obrázku (obr. 2.11), který nám dává náhled na vytvořený model. Dílčí části jsou vzájemně propojeny pomocí rotujících hřídelí a táhla ovládajícího výpusť páry.



Obrázek 2.11: Schéma celého regulátoru

Kotel a turbína jsou ztvárněny symbolicky pomocí kvádrů s různou texturou pro lepší odlišení a nejsou rozpracovány do detailů. Regulátor pak odpovídá schématu (obr. 2.1). Jedinou pohyblivou částí kotle je výpustní ventil který je napojen na táhlo vedoucí od regulátoru. U turbíny lze za důležitou část pokládat slider sloužící k nastavení polohy závaží. Slider je ztvárněn šedivím kvádrem umístěným na přední straně turbíny. Ovládání slideru je zajištěno dotykovým senzorem, který je začleněn do kvádru symbolizujícího turbínu. Slider, jeho mezní polohy a jim odpovídající polohy závaží jsou zachyceny na obrázcích (obr. 2.12). Model regulátoru je rozpracován do detailů, které v rámci přijatelného zjednodušení odpovídají jeho reálnému protějšku. Klouby ramene i závaží jsou pro



(a) Minimální hodnota b (b) Střední hodnota b (c) Maximální hodnota b

Obrázek 2.12: Mezní velikosti b

větší přehlednost barevně odlišeny. Sruktura uzlů části regulátoru je hierarchická, přičemž ustředním členem je rotující hřidel pohánějící regulátor, další členění vychází z konstrukce regulátoru.

Kapitola 3

Stabilita systémů

3.1 Úvod

Problém stability je obecně diskutován v mnoha vědních oborech od techniky přes biologii až po ekonomii. Za prvního myslitele analyticky se zaobírajícího stabilitou (oběžných drah planet) je považován Izák Newton, po němž následovali mnozí další - Euler, Lagrange, Laplace, Lyapunov,Nyquist a další. Většina z těchto velkých mužů pak navrhla či vylepšila stávající postupy pro stanovení stability. Naneštěstí stabilita není ve všech oblastech vědních oborů, kde je definovaná, vnímána stejně a není určována podle stejných pravidel a kritérií. Kupříkladu některé ekonomické a biologické systémy jsou považovány za stabilní v případě, že některé proměnné jsou monotónně rostoucí. V řídicí technice však stabilita systému většinou znamená, že se odchylka stavu sytému od požadované hodnoty po stanoveném časovém intervalu pohybuje v daných mezích, nebo klesá k nule. Tento fakt vede k tomu, že systém může být podle jedné definice určen jako stabilní a podle druhé definice jako nestabilní - v těchto případech je pak nutné postupovat dle vlastního uvážení, intuice a zkušenosti s přihlédnutím k požadavkům kladeným na systém. Z tohoto důvodu jsou v této kapitole uvedeny nejprve obecné definice stability a až následně jejich důsledky při určování stability u lineárních spojitých a diskrétních systému.

3.2 Ljapunovská stabilita

3.2.1 Definice Ljapunovy stability

Definice 3.1 (Obecná definice): Pokud předpokládáme, že funkce $g(x,t)$ je definována v oblasti $X \times [a, \infty)$, kde a je reálné číslo a $|X \subset R^n$ je podmnožina prostoru obsahující počátek. Triviální řešení soustavy $\overline{x} = g(x,t); g(0,t) = 0$ je pak vnitřně stabilní právě tehdy, když platí:
a) Ke každému $t \geq a$ existuje $\alpha = \alpha(t_0)$ takové,že pro všechna $x_0 \in X$ a $t \in R^1$ vyhovující nerovnostem $\|x_0\| < \alpha, t \geq t_0$ je řešení $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ definováno.
b) Ke každému $t \geq a$ a ke každému $\varepsilon \geq 0$ existuje $\delta \geq \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tak, že pro všechna $x_0 \in X$ a $t \in R^1$ vyhovující nerovnostem $\|x_0\| < \delta, t \geq t_0$ platí $\|\varphi(t, t_0, x_0\| < \varepsilon$. ►

3.2.2 Ljapunovy věty o stabilitě

Kromě obecné definice Ljapunovy stability, existují dvě Ljapunovy věty o stabilitě systému, které lze v praxi využít i k zjištění stability nelineárního systému. První věta řeší problém stability nelineárních systémů pomocí jejich linearizací, která převede problém do roviny lineárních systémů. Druhá Ljapunova věta pak zjišťuje stabilitu systému rozborem Ljapunovi funkce. Tento postup lze s úpěchem použít i u linárních systémů. Důkaz platnosti a detailní popis použití těchto vět je možno nalézt v (Štecha, J., 2005, str. 181) a (Csáki, F., 1972, str. 450).

Věta 3.1 (Ljapunova první věta): *Mějme časově invariantní (stacionární) nelineární systém popsaný stavovou rovnicí*

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Nechť tento systém má rovnovážný stav x_e a funkce $\dot{x}(t) = f(x(t))$ má v bodě x_e parciální derivace podle x. V bodě $x = x_e$ provedeme linearizaci systému. Stavové rovnice linearizovaného systému jsou $\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t)$, kde $\mathbf{A}$ je Jakobiho matice. Jesliže je linearizovaný systém stabilní, pak nelineární systém v rovnovážném stavu x_e je též stabilní.

Věta 3.2 (Ljapunova druhá věta): *Nechť je dán systém $\dot{x} = f(x,t)$, kde funkce $f(x,t)$ je spojitá vzhledem k proměnné t a spojitě diferencovatelná vzhledem k proměnné x na množině $\boldsymbol{Z}$, $f(0,t) = 0$. Nechť existuje Ljapunova funkce prvního. resp. druhého, resp. třetího druhu pro tento systém. Pak triviální řešení systému je ljapunovsky stabilní, resp. asymptoticky stabilní, resp. nestabilní.*

3.2.3 Asymptotická stabilita

Definice 3.2 (Obecná definice): V případě platnosti předpokladu, že funkce $g(x,t)$ je definována v oblasti $X \times [a, \infty)$, kde a je reálné číslo a $|X \subset R^n$ je podmnožina prostoru R^n obsahující počátek, je triviální řešení soustavy $\dot{x} = g(x,t); g(0,t) = 0$ vnitřně stabilní právě tehdy, když platí:

- Jsou splněny podmínky ljapunovské stability
- Existuje takové číslo $\delta < 0$, že každé řešení $x(t), t \geq 0$ systému $\dot{x} = f(x)$,které vychází z některého bodu δ okolí rovnovážného stavu, konverguje k počátku pro $t \to \infty$, čili musí platit vztah : $\lim_{t \to \infty} x(t) = x_e$. ▶

3.2.4 Vnější stabilita

Ljapunovská a asymptotická stabilita se odvíjí od vnitřních stavů systému, ovšem existuje i metodika určování stability, která vychází čistě z vnějšího chování systému. Výhodou této metody je fakt, že k ní není třeba znalost vnitřního uspořádání sledovaného systému. Vnější stabilitu systému lze určit z definice BIBO(Bounded-input Bounded-output) stability, která je dále uvedena. Protože při zkoumání vnější a ljapunovské stability téhož systému lze dojít k rozdílným závěrům, je třeba umět tyto pojmy rozlišit.

Definice 3.3 (Praktická definice): Systém je BIBO stabilní, pokud výstupní hodnoty systému zůstávaní v omezených mezích pro jakýkoli konečný vstup, při jakýchkoli počátečních podmínkách. ▶

3.2.5 Shrnutí

Ljapunovská stabilita je ve své podstatě požadavek, který od systému, pokud má být považován za stabilní, požaduje, aby jeho stavové veličiny zůstaly s přírůstkem času na ustálených hodnotách a nešly do nekonečna. Ideálním nástrojem pro určení stability vycházejícím z Ljapunovy definice jsou tak časové charakteristiky systému, ze kterých je patrné, zda systém bude stabilní. Zpřesňujícím požadavkem na ljapunovsky stabilní systém je pak asymptotická stabilita, která požaduje, aby se výstup v čase $t \to \infty$ blížil k hodnotě počáteční podmínky. Hlubší popis použití asymptotické stability je možno najít na (*Asymptotická stabilita*, ⟨`http://e-learning.tul.cz/cgi-bin/`

elearning/elearning.fcgi?ID_tema=13\&ID_obsah=131\&stranka=publ_tema\&akce=polozka_vstup⟩). Vnější stabilita vyjadřuje myšlenku, že systém je možno pokládat za stabilní, když se jeho výstup drží v daných mezích pro stabilní vstup. Definice byla převzata z (*Connexions, BIBO Stability*, ⟨http://cnx.org/content/m12319/latest⟩).

3.2.6 Příklady

Příklad 3.1 (Lotka - Volterra model (Králíci a lišky)): Tento příklad, pocházející z roku 1925 a převzatý z (*Lotka-Volterra equation*, ⟨http://en.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra_equation⟩), se zaobírá rovnováhou mezi dvěmi vzájemně svázanými populacemi v rámci ekosystému (např. králíci a vlci). Protože uvažujeme dvě populace, model se skládá ze dvou diferenciálních rovnic vyjadřujících velikosti populací v čase. Dejme tomu, že $K(t)$ reprezentuje počet králíků a $L(t)$ počet lišek. Model pak vypadá následovně:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = aK - bKL$$
$$\frac{\partial L}{\partial t} = bdKL - cL,$$

kde parametry vyjadřují:

- a je přírůstek králíků, kdy není uvažován úbytek způsobený predátorem
- b je množství ulovených králíků
- c množství přirozeně zemřelých lišek bez vlivu nedostatku potravy (králíků)
- d je poměr vyjadřující na kolik ulovených králíků se narodí jedna liška

Všechny parametry jsou uvažovány jako $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$. Zjistěte počáteční podmínky, pro které bude model populací stabilní.

Řešení: Zadaný systém je nelineární, je proto třeba nejprve nalézt equlibria, provézt v nich linearizaci a diskutovat stabilitu. K řešení je využita první Ljapunova věta.
Nejprve tedy jistíme equilibria systému. To jsou stavy, při kterých se ani jedna populace nemění (rovnovážný bod). Equilibria zjistíme tak, že položíme soustavu rovnic rovnu nule a vyřešíme ji. Postup je popsán např. v (Raven, F.H., 1995). Pro soustavu

$$(a - bL)K = 0$$

$$(dbK - c)L = 0$$

jsou dvě řešení

$$\{K = 0, L = 0\}$$

a

$$\{K = \frac{c}{db}, L = \frac{a}{b}\}$$

První řešení vyjadřuje stav vymření obou populací, druhé pak stav, kdy si populace budou udržovat vyrovnané počty. Jakobiho matice systému je:

$$J(K, L) = \begin{pmatrix} a - bL & -bK \\ dbL & dbK - c \end{pmatrix}.$$

Nyní je možno diskutovat stabilitu v zjištěných equlibiích.

Pro první equilibrium získáme po dosazení tuto Jakobiho matici:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix},$$

jejíž vlastní čísla jsou $\lambda_1 = a$ a $\lambda_2 = -c$. Ze zadání vyplývá, že oba parametry budou vždy větší než nula. Jedno z vlastních čísel tedy bude mít vždy reálnou část větší než nula, a proto je v tomto equilibriu systém nestabilní. Případ by v reálném případě skončil nejprve vyhubením králíků a posléze úhynem lišek. Pro druhé equlibrium má Jakobiho matice tvar:

$$J(\frac{c}{db}, \frac{a}{b}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c}{d} \\ ad & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice jsou tedy $\lambda_1 = j\sqrt{ac}$ a $\lambda_2 = -j\sqrt{ac}$. Je zřejmé, že reálné části obou vlastních čísel jsou nulové, tudíž se systém nachází na mezi stability (stavy populací králíků a lišek budou oscilovat kolem rovnovážného bodu). Řešením jsou tedy počáteční podmínky plynoucí z poměrů daných druhým equilibriem. ✓

Příklad 3.2: Uvažujme mechanický systém kuličky pohybující se po povrchu s daným profilem. Kulička je kovová a je možné na ni působit vnější silou. Akčním členem je dvojice velmi silných elektromagnetů. Abychom zanedbali neliarity způsobené křivostí povrchů a proměnlivostí intenzity magnetické síly v závislosti na poloze kuličky vůči magnetům, aproximujeme situaci. Povrch po kterém se kulička pohybuje je rozdělen do tří oblastí. Situace je nastíněna na schématu (obr. 3.1). V každé z nich je pohyb kuličky popsán diferenciální rovnicí.

Pro $x \in (-\infty, -2)$

$$\ddot{x} = -\frac{1}{2}x + k_m i.$$

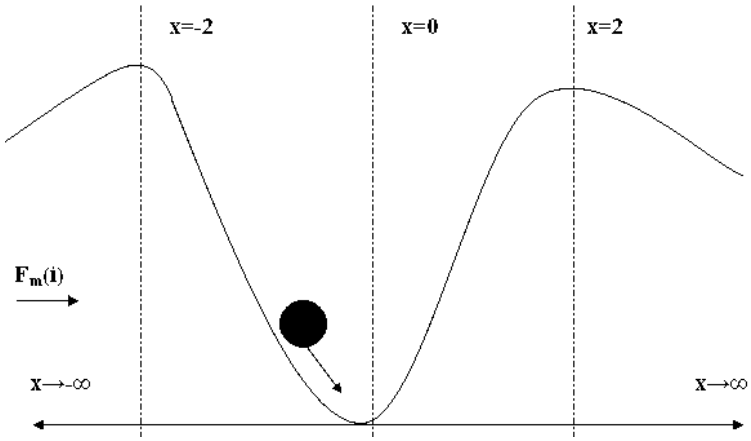
Pro $x \in (-2, 2)$

$$\ddot{x} = -hx - C\dot{x} + k_m i, x \in (-2, 2).$$

Pro $x \in (2, \infty)$

$$\ddot{x} = \frac{1}{3}x - k_m i.$$

Určete oblast(i), ve které bude systém autonomně stabilní.



Obrázek 3.1: Kulička v misce

Příklad 3.3: Pro zadaný systém analyzujte, zda je ljapunovsky, asymptoticky nebo BIBO stabilní? Využijte časové charakteristiky systému.

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

Řešení: V prní řadě je nutné zjistit autonomní chování systému z hlediska ljapunovké stability, protože pokud by se systém ukázal jako ljapunovsky nestabilní, nemělo by smysl zkoumat jeho asymptotickou stabilitu. Musíme tedy zjistit odezvu systému na nějakou počáteční podmínku. Pro počáteční podmínku $u(0) = a$ bude odezva systému rovna $ag(t)$. Jelikož je $g(t)$ monotoně klesající funkce, je systém ljapunovsky stabilní, a je tedy možno prozkoumat jeho asymptotickou stabilitu. Asymptotickou stabilitu určíme z impulsní charakteristiky systému. Protože je systém popsaný svojí přenosovou funkcí, můžeme zístkat impulsní charakteristiku systému přímo inversní Laplaceovou transformací přenosu:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(1\frac{2}{s^2 + 3s + 2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-2}{s+2} + \frac{2}{s+1}\right) = -2e^{-2t} + 2e^{-t}.$$

Z explicitního vyjadření impulsní charakteristiky v časové oblasti je patrné, že se skládá z lineární kombinace dvou funkcí, exponenciál. Pro stabilní odezvu je nutné, aby každá z komponent lineární kombinace byla stabilní. V tomto případě mají obě komponenty v nekonečném čase $t \to \infty$ nulovou hodnotu, a tudíž jsou asymptoticky stabilní.

Pro analýzu BIBO stability využijeme fakt, že odezvu systému na libovolný signál lze dopočítat jako konvoluci tohoto signálu s impulsní odezvou

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

Pro náš systém je uvedený předpis ve tvaru

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) \left(-2e^{-2(t-\tau)} + 2e^{-(t-\tau)}\right) d\tau \qquad \checkmark$$

Výstupní signál bude stabilní, pokud takový bude i vstupní signál. Systém je tedy BIBO stabilní.

Příklad 3.4: Analyzujte dané systémy a určete, zda jsou BIBO, asymptoticky nebo ljapunovsky stabilní?

1. $P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+1)}{(s^2+5)(s+2)}$
2. $P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+2)}{s(s+1)}$
3. $P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-2}{s^2-5s-2}$
4. $P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2-3s+3}$

3.3 Stabilita lineárních systémů

3.3.1 Teoretický úvod

U lineárních systémů má v praxi největší uplatnění ljapunovská a asymptotická stabilita. Základním problémem je pak v rámci vyšetřování stability systému jeho správné zařazení. Existuje celá řada rozdělení systémů do skupin podle toho, jaké mají vlastnosti. V řídicí technice jsou nejdůležitější tato dvě rozdělení:

- Stabilita spojitých systémů a stabilita diskrétních systémů

- Stabilita v otevřené smyčce (OL) a stabilita v uzavřené smyčce (CL)

Příslušnost systému k danné skupině má pak vliv na to, které kritérium je výhodné, vhodné či možné použít pro zjištění stability daného systému.

3.3.2 Spojité lineární systémy

Základním předpokladem je fakt, že stavový popis lineárního spojitého systému je tvořen soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu a lze jej obecně zapsat:

$$\dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t)$$
$$y(t) = C.x(t) + D.u(t).$$

Ze stavových matic lze přitom získat kvalitativní vlastnosti systému bez hledání řešení těchto rovnic. Výstupní rovnice $y(t) = C.x(t) + D.u(t)$ je lineární kombinací stavů $x(t)$ systému a vstupů $u(t)$ do systému. Problém je ovšem fakt, že výstupní matice $\boldsymbol{C}$ nemusí nutně kombinovat všechny stavy systému, proto mohou být některé stavy pro vnějšího pozorovatele neviditelné. Vzhledem k faktu, že vstupy systému neuvažujeme jako nestabilní je nutné zkoumat vývoj vlastních stavů. To nás přivádí k nutnosti zkoumat vlastnosti stavové rovnice. Uvažujme nejprve homogenní systém :

$$\dot{x}(t) = A.x(t); x(t_0) = x_0, \tag{3.1}$$

kde matice $\boldsymbol{A}$ má n vlastních (charakteristických) čísel $\lambda_1....\lambda_\mathrm{n}$. Dále budeme předpokládat, že řešení $x(t)$ je ve výsledném tvaru

$$x(t) = r.e^{-\lambda.t},$$

kde λ je skalár a r je neznámý vektor. Po dosazení do rovnice (3.1) získáme výslednou rovnici

$$(A - \lambda.E).r = 0 \tag{3.2}$$

Tato homogenní soustava má netriviální řešení pro r, pouze pokud $\det(A - \lambda.E) = 0$. V tomto případě nazýváme λ vlastní číslo a r je jemu odpovídající vlastní vektor. Vlasní číslo systému je pak nutno chápat jako komlexní číslo $\lambda = a + jb$. Obecné řešení systému (3.1), za předpokladu lineární nezávislosti vlastních vektorů r_i odpovídajících vlastním číslům λ_i, lze pak zapsat jako:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i \, e^{\lambda_i t}, \tag{3.3}$$

kde α_i jsou konstanty závislé na počátečních podmínkách. Členy $er_i^{\lambda_i t}$ se nazývají **módy systému**. Lze též uvést vztah

$$\mathbf{A}r_i = \lambda_i r_i. \tag{3.4}$$

Pakliže počáteční podmínka na vlastním vektoru $r_j, (x(t_0) = \alpha_j.r_j)$ je $x(t_0)$, je možno zapsat řešení rovnic jako

$$x(t) = \alpha_j r_j \, e^{\lambda_j (t-t_0)}. \tag{3.5}$$

Z rovnice (3.4) tedy plyne, že řešení $x(t)$ leží pouze ve směru určeném vektorem r_i . Řešení pro rostoucí čas t směřuje do nuly, je-li reálná část vlastního čísla záporná, a naopak směřuje po vlastním vektoru do nekonečna, je-li reálná část kladná. Stejně můžeme uvažovat u počáteční podmínky $x(t_0)$, ležící v podprostoru tvořeném některými vlastními vektory. Řešení potom v tomto podprostoru zůstane. Odpovídá-li násobnému charakteristickému číslu λ řetězec vlastních vektorů $r_i ... r_n$, pak příslušná řešení odpovídající danému λ jsou

$$x(t) = (r_s + t.r_{s-1} + \frac{t^2}{2!} r_{s-2} + ... + \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} r_1) e^{\lambda(t-t_0)}. \tag{3.6}$$

Vlastní vektory pak nazýváme pravé vlastní vektory matice $\boldsymbol{A}$. Ty nám určují řešení nebuzeného systému $-u(t) = 0$. Z výše zmíněného je patrné, že jsou-li reálné části vlastních čísel menší než nula, je systém stabilní. Jsou-li reálné části vlastních čísel rovny nule, je systém na mezi stability, u reálných částí větších než nula je pak systém nestabilní. Pokud není k dispozici stavový popis systému, je možné určit jeho stabilitu z vnějšího popisu (přenosu) uvažovaného jako:

$$P(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + ... + a_1 s^1 + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + ... + b_1 s^1 + b_0},$$

kde $n > m$. Stabilita je dána póly přenosu(kořeny jeho charakteristického polynomu), pro které platí stejná podmínka jako pro vlastní čísla. Systém je tudíž stabilní pouze pokud mají jeho póly reálné části menší než nula. Rozhodnout o tom, zda je systém stabilní či ne, je v případě znalosti jeho pólů poměrně triviální záležitost, ovšem jestliže máme k dispozici pouze vnější popis (přenos nebo přenosová matice), můžeme o stabilitě systému rozhodnout jen v případě, že nemá nepozorovatelné či neřiditelné části, které jsou nestabilní (skryté nestabilní módy). Hlubší popis této problematiky je možno nalézt v (Štecha, J., 2005) a (Raven, F.H., 1995).

Shrnutí:

Pro určení ljapunovy stability lineárního spojitého systému, je nutné analyzovat polohu

vlastních čísel jeho charakteristického polynomu, nebo jeho časové charakteristiky. Systém je stabilní pokud platí jedna z těchto podmínek:

- reálná část všech vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ je menší než nula
- reálná část všech pólů přenosu systému je menší než nula.

Systém u nějž existuje vlastní číslo nebo pól mající reálnou část rovnu nule je stabilní pouze pokud tento pól není násobný. Protože matematická analýza složitějších systémů, která by splnění uvedených podmínek prověřila, může být dosti obtížná a časově náročná, existuje řada zjednodušujících algebraických a grafických metod. Tyto metody se nazývají kritéria stability.

3.3.2.1 Příklady

Příklad 3.5: Pro systém popsaný diferenciální rovnicí

$$\dot{x}(t) = ax(t),$$

kde parametr a je časově neměnný, ale náleží do předem známé množiny $a \in \langle -2, 4 \rangle$, proveďte analýzu časové odezvy pro počáteční podmínku $x(0) = 2$. Diskutujte chování systému v závislosti na parametru a.

Řešení: Zadaný systém je časově neměnný, lineární a autonomní s jedním neznámým parametrem. Přestože je paramet a neznámý (leží uvnitř známé množiny), je možné odvodit obecné řešení odezvy systému explicitně a následně vlastnosti systému diskutovat v závislosti na hodnotě a. Pro zadanou počáteční podmínku je možné odvodit řešení nejméně dvěma různými způsoby a to jednak přímým řešením lineární diferenciální rovnice s konstatními parametry, nebo je možné použít Laplaceovu transformaci.

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = ax(t) \\
&sX(s) - x(0) = aX(s) \\
&X(s) = \tfrac{x(0)}{s-a} \\
&x(t) = x(0)\, e^{at}, t \geq 0.
\end{aligned}$$

Výsledné řešení je spojitá funkce, exponenciála, závislá na jediném parametru a. Diskuze řešení pro různé hodnoty a lze rozdělit v závisloti na parametru do tří skupin.

Pro hodnoty $a \in \langle -2, 0)$ je $\lim\limits_{t\to\infty} 2e^{at} = 0$. Stav systému se do počátku souřadnicového systému blíží asymptoticky (Stav bude v nekonečném čase právě 0). V takovém případě

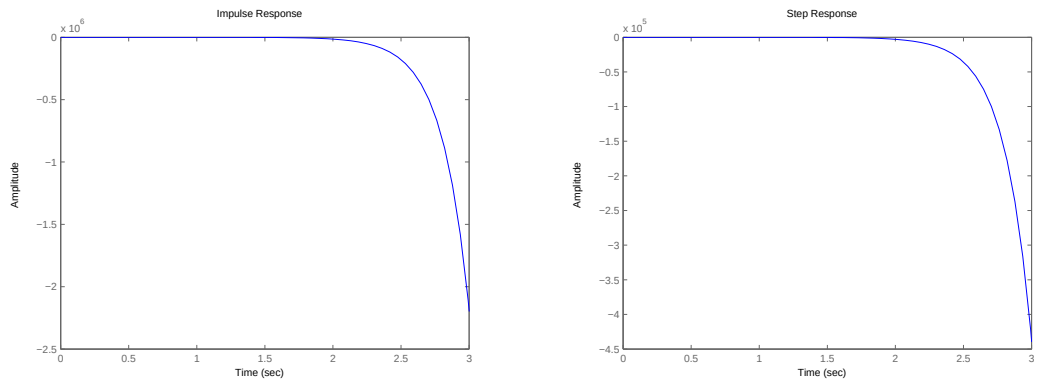
má systém stabilní, předpovídatelnou odezvu. Parametr a je vlastním číslem matice systém, leží ve stabilní levé polorovině, a tak je systém asymptoticky stabilní.

Pro hodnoty $a \in (0, 4\rangle$ je stav systému v nekonečnu $\lim_{t\to\infty} 2e^{at} = \infty$. Vlatní číslo matice systému je v tom případě v pravé nestabilní polorovině. Autonomní systém se v tomto případě dostává s přibývajícím časem do stavů, které se stále vzdalují počátku souřadnicového systému. Po určité době bude stav systémů v reálném případě neurčitelný (přesnost výpočtu hodnoty exponenciály klesá v závisloti na čase a roste vliv zaokrouhlovaní chyby). Pro hodnotu $a = 0$ zůstává systém v počáteční podmínce $x(0)$. V tom případě není stav systému v počátku souřadnic, asymptoticky se do něj neblíží, ale ani se mu nevzdaluje. Systém je tedy na mezi stability, kde je jeho stav dobře určitelný, ale neovlivnitelný. V takovém případě je systém asymptoticky nestabilní, ale lyapunovsky stabilní. Stav systému pro zvolenou počáteční podmínku nevybočuje mimo počáteční podmínkou určené časově konstatní okolí počátku souřadnic. ✓

Příklad 3.6: U zadaného systému určete pomocí analýzy vlastních čísel a časových charakteristik, zda je stabilní.

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{-1s^2 + 4s + 5}$$

Řešení: Nejprve zjistíme póly systému tj. kořeny charakteristického polynomu. Charakteristická čísla jsou $\lambda_1 = 5$ a $\lambda_2 = -1$. Vlastní číslo λ_1 má kladnou reálnou část a je tudíž nestabilní, vlastní číslo λ_2 má zá reálnou část zápornou hodnotu a je tudíž stabilní. Systém je tedy nestabilní, jak se bude chovat, je patrné i z jeho časových charakteristik viz (obr. 3.2).



(a) Impulsní charakteristika

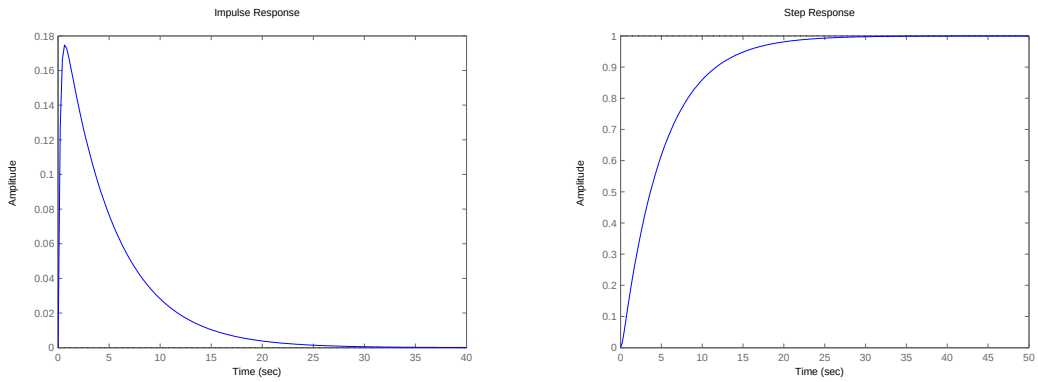
(b) Přechodová charakteristika

Obrázek 3.2: Časové charakteristiky k příkladu (3.6)

Příklad 3.7: U zadaného systému určete pomocí analýzy vlastních čísel a časových charakteristik, zda je stabilní.

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 5,2s + 1}$$

Řešení: Nejprve zjistíme póly systému tj.kořeny charakteristického polynomu. Charakteristická čísla jsou $\lambda_1 = -5$ a $\lambda_2 = -\frac{1}{5}$. Obě vlastní čísla mají zápornou reálnou část, systém je proto stabilní. Pro kontrolu se ještě podívejme na časové charakteristiky (obr. 3.3) - i z těch je patrné, že systém je stabilní.



(a) Impulsní charakteristika (b) Přechodová charakteristika

Obrázek 3.3: Časové charakteristiky k příkladu (3.7)

Příklad 3.8: Určete parametry systému a, b, c, pro které bude zadaný systém stabilní.

$$P(s) = \frac{1}{(s-a)(s-\frac{a}{b})(s-\frac{b}{c})}$$

Příklad 3.9: U zadaných systémů určete pomocí analýzy pólů a časových charakteristik, zda jsou stabilní.

1. $P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2+3s-2}$
2. $P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-2}{-s^2-5s-2}$
3. $P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s^3+100s^2}$

Příklad 3.10: Vyšetřete stabilitu u zadaného lineárního systému daného rovnicí $\dot{\mathrm{x}} = \mathbf{A}\mathrm{x}$, pro hodnoty matice $\mathbf{A}$:

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

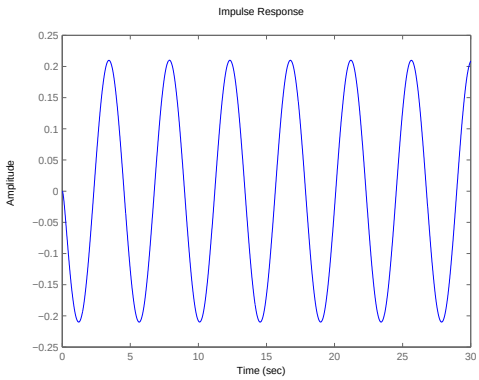
Příklad 3.11: Jsou zadány čtyři systémy pomocí přenosových funkcí a čtyři impulsní charakteristiky (obr. 3.4). Přiřaďte systémům jejich charakteristiky.

1. $P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^3+20s^2+2s+12}$

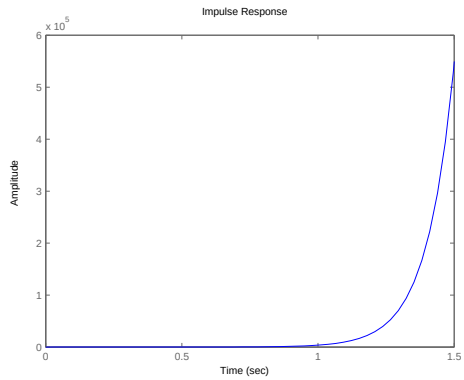
2. $P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{30}{s^3+5s^2}$

3. $P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{2s^2-22s+20}$

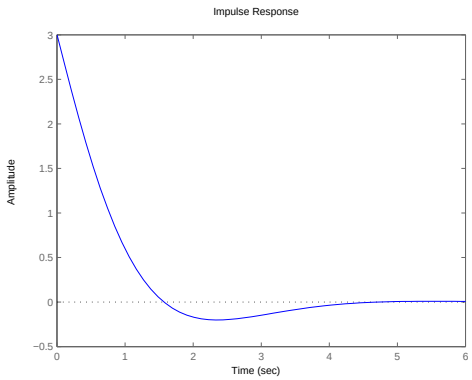
4. $P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{s^2+s+5}$



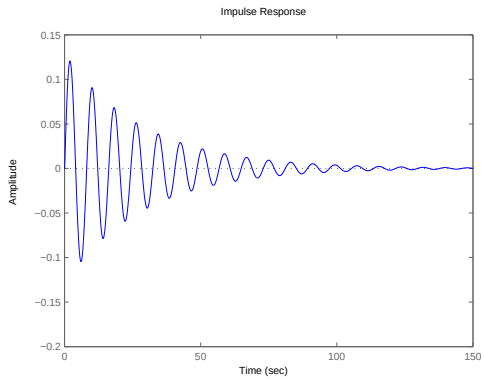
(a) Impulsní charakteristika A



(b) Impulsní charakteristika B



(c) Impulsní charakteristika C



(d) Impulsní charakteristika D

Obrázek 3.4: Časové charakteristiky k příkladu (3.11)

3.3.3 Diskrétní lineární systémy

Stabilitu diskrétních systémů lze odvozovat obdobně jako u spojitých systémů z ljapunovské definice stability (3.1), což znamená, že ji lze určit z pólů systému, respektive jeho vlastních čísel. Základem úvahy je diskrétní nebuzený stacionární systém $x(k+1) = \boldsymbol{M}x(k)$. Řešení tohoto systému lze zapsat jako

$$x(k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i \lambda_i^k, \tag{3.7}$$

přičemž obdobně jako u rovnice (3.1) jsou r_i vlastní vektory, λ_i jsou vlastní čísla matice $\boldsymbol{M}$ a α_i jsou konstanty dané počáteční podmínkou. Toto řešení konverguje do rovnovážného stavu $x_e = 0$ pouze v případě, že

$$|\lambda_i| < 1; i = 1, 2, ...n \tag{3.8}$$

Výsledkem rovnice (3.8) je tedy tvrzení, které říká, že diskrétní systém je stabilní, pouze pokud absolutní hodnota jeho vlastních čísel je menší než jedna. Diskrétní systém je tedy stabilní pokud se jeho vlastní čísla v rámci komplexní roviny nachází uvnitř jednotkové kružnice se středem v 0. Při zjišťování stability můžeme postupovat dvěma způsoby. Buď převedeme diskrétní systém na spojitý pomocí nejvhodnější bilineární transformace ,např.($z = \frac{s+1}{s-1}$), a dále vyšetřujeme stabilitu jako u spojitého systému, nebo použijeme jedno z kritérií stability určených pro diskrétní systém.

3.3.3.1 Příklady

Příklad 3.12: Určete, zda je zadaný systém stabilní.

$$P(z) = \frac{z + 0,2}{z^2 + 0,2z + 0,1}$$

Příklad 3.13: Určete, zda je zadaný systém stabilní.

$$P(z) = \frac{-z + 4}{0,5z^3 - z^2 - 12z + 2}$$

Příklad 3.14: Určete, zda je systém daný maticemi stavového popisu stabilní.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.06 \\ 0.09 & 0.99 \end{bmatrix}, \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0.09 \\ 0.005 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = [0]$$

Příklad 3.15: U systému daného rovnicemi

$$x_1(n+1) = 2x_2(n)$$

$$x_2(n+1) = 4x_1(n)$$

$$y(n) = x_1(n),$$

určete zda je stabilní.

Příklad 3.16: U systému daného rovnicemi

$$x_1(n+1) = 2ax_1(n)$$

$$y(n) = 3x_1(n)\ ,$$

kde počáteční podmínka je $x_1(0) = a$, určete možné hodnoty parametru a tak, aby systém byl stabilní.

3.3.4 Kritéria stability

Jak již bylo zmíněno, existují metody sloužící k jednoduchému a rychlému určení stability systému. Metody lze obecně dělit na algebraická a frekvenční, vždy podle toho, zda se vychází z matematického popisu systému, nebo jeho frekvenčních charakteristik. Většina těchto metod existuje ve verzi jak pro spojité systémy tak ve verzi pro diskrétní systémy. Detailní popis a rozdělení kritérií stability lze nalézt v (Štecha, J., 2005) a (Csáki, F., 1972), v této kapitole je uveden pouze popis metody vycházející ze stavového portrétu.

3.3.4.1 Stavový portrét

Definice 3.4 (Definice stavového portrétu): Stavový portrét dynamického systému je graf vykreslující systémové trajektorie šipkami, stabilní stavy tečkami a nestabilní stavy kruhy v stavovém prostoru. Osy grafu vyplývají ze stavových proměnných. (*Phase Portrait Definition*, ⟨`http://economics.about.com/od/economicsglossary/g/phase.htm`⟩) ▶

Metoda určování stability ze stavového portrétu vychází z poznatků plynoucích u spojitých systémů z rovnice (3.3) a (3.4), u diskrétních obdobně z rovnice (3.7). Je založena na sledování pohybu řešení systému x s časem t po trajektoriích daných vlastními vektory systému r_i. Při vytváření stavového portrétu se pro všechny počáteční podmínky se dopočítají trajektorie, po kterych se system autonomně vyvíjí a soubor těchto trajektorií potom tvoří stavový portrét. U stabilního systému $\mathrm{Re}\{\lambda\} < 0$ se pohybují řešení s přibývajícím časem do nuly u nestabilního pak do nekonečna. Příklad stavových portrétů systému je znázorněn na obrázku (obr. 3.4), směr pohybu řešení je naznačen šipkami. Aby bylo možno stavový portrét zobrazit, je nutno uvažovat $x \in X \in \mathbf{R}^2$. Nevýhodou stavového portrétu je nemožnost jeho použití pro systémy vyšších řádů. Podrobný rozbor stavového portrétu lze nalézt na (Macur, ⟨`http://www.fce.vutbr.cz/studium/materialy/Dynsys/kap2/kap2.htm#dynamicky%20system`⟩), program sloužící k vizualizaci pak na (*Linear Phase Portrait Applet*, ⟨`http://www-math.mit.edu/daimp/LinPhasePorCursor.html`⟩).

Příklad 3.17: Pro systémy dané rovnicí $\dot{x} = \mathbf{A}x$ se zadanou maticí $\mathbf{A}$ sestavte pomocí (*Linear Phase Portrait Applet*, ⟨`http://www-math.mit.edu/daimp/LinPhasePorCursor.html`⟩) stavové portréty a diskutujte jejich stabilitu.

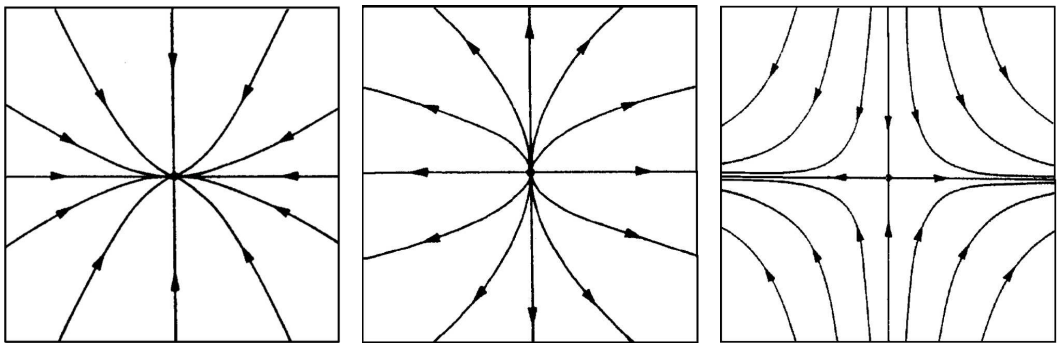
1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1,5 & 2,5 \\ 2,5 & 1,5 \end{pmatrix}$

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0,41 \\ 2,41 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,4 \\ 3,6 & 0,4 \end{pmatrix}$

Příklad 3.18: Pro systémy zadané v příkladu (3.10) sestavte stavové portréty a ověřte jejich stabilitu.



(a) Stabilní sys. (b) Nestabilní sys. (c) Jeden stabilní a jeden nestabilní pól

Obrázek 3.5: Stavové portréty ruzných typů systémů

Kapitola 4

Závěr

V první části této bakalářské práce byl vytvořen matematický model a model standardu VRML97 soustavy kotel, turbína, odstředivý regulátor. Návrh regulátoru vycházel z konstrukce Wattova odstředivého regulátoru, přičemž byla vytvořena dvě možná řešení regulátoru s regulovaným systémem. V průběhu návrhu dílčích součástí systému pak vždy byla navržena dvě funkční řešení, ze kterých bylo jedno vybráno k realizaci. VR Model soustavy byl kompromisně vytvořen tak, aby co nejvíce odpovídal své historické předloze a zároveň si zachoval přehlednost a jednoduchost. Ve druhé části práce byla nastíněna problematika určování stability systémů, přičemž byly uvedeny hlavní definice a věty týkající se dané problematiky. Převážnou část kapitoly tvoří sada řešených a neřešených příkladů, mající za cíl motivovat studenty k pochopení tématu. K vytvoření práce byly použity tyto programy:

- MikTex (Shenk, ⟨`http://www.miktex.org`⟩)
- Matlab (*Matlab*, ⟨`http://www.mathworks.com`⟩)
- Mathacad (*Mathcad*, ⟨`http://www.mathcad.com`⟩)
- Gimp (*GIMP*, ⟨`http://www.gimp.org`⟩).

Literatura

Asymptotická stabilita (⟨http://e-learning.tul.cz/cgi-bin/elearning/elearning.fcgi?ID_tema=13\&ID_obsah=131\&stranka=publ_tema\&akce=polozka_vstup⟩), [online], Technická Univerzita v Liberci.

Bernoulliho rovnice (⟨http://cs.wikipedia.org/wiki/Bernoulliho_rovnice⟩), [online], [cit.2007-07-28], Wikipedie - otevřená encyklopedie.

Connexions, BIBO Stability (⟨http://cnx.org/content/m12319/latest⟩), [online], Rice University.

Gaš, B. (⟨http://prfdec.natur.cuni.cz/~gas/FCH1_Syl.doc⟩), *Termodynamika*, [online].

GIMP (⟨http://www.gimp.org⟩), [online], GNOME Foundation.

Linear Phase Portrait Applet (⟨http://www-math.mit.edu/daimp/LinPhasePorCursor.html⟩), [online], Massachusetts Institute of Technology.

Lotka-Volterra equation (⟨http://en.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra_equation⟩), [online], [cit.2007-07-28], Wikipedie - otevřená encyklopedie.

Macur, J. (⟨http://www.fce.vutbr.cz/studium/materialy/Dynsys/kap2/kap2.htm#dynamicky%20system⟩), *Dynamické systémy*, [online].

Mathcad (⟨http://www.mathcad.com⟩), [online], PTC.

Matlab (⟨http://www.mathworks.com⟩), [online], Math Works.

Phase Portrait Definition (⟨http://economics.about.com/od/economicsglossary/g/phase.htm⟩), [online], The New York Times Company.

Shenk, C. (⟨http://www.miktex.org⟩), *MikTex*, [online].

Simulátor parní turbíny (⟨http://dsp.vscht.cz/konference_matlab/MATLAB06/prispevky/cidl_hyncica/cidl_hyncica.pdf⟩), [online], Siemens Industrial Turbomachinery.

Csáki, F. (1972), *Modern Control Theories*, Budapešť: Akadémia Kiado.

Raven, F.H. (1995), *Automatic Control Engineering*, New York: McGraw-Hill Inc.

Štecha, J., t. (2005), *Teorie dynamických systémů*, Praha: Vydavatelství ČVUT.

Virtual Reality Modeling Language (⟨http://www.web3d.org/x3d/specifications/vrml⟩), [online], [cit.2007-07-28], Web3D Consortium.

Virtual Reality Toolbox (⟨http://www.humusoft.cz/matlab/moduly/vrt.htm⟩), [online], [cit.2007-07-28], Humusoft.

V-Realm Builder: User's Guide and Reference (⟨http://www.cs.vu.nl/~eliens/documents/vrml/V-Realm⟩), [online], Ligos Corporation.

Příloha A

Řešení úloh z kapitoly Stabilita systémů

(3.2): autonomně stabilní pro $x \in (-2, 2)$; (3.4): 1)BIBO, ljapunovsky, asymptoticky stabilní 2)BIBO, ljapunovsky, asymptoticky stabilní 3)nestabilní 4)nestabilní; (3.8): $a \leq 0, b > 0, c < 0$; (3.9): 1)nestabilní 2)stabilní 3)nestabilní; (3.10): 1)stabilní 2)nestabilní 3)stabilní 4)nestabilní ; (3.11): 1D, 2A, 3C, 4B; (3.12): stabilní ; (3.13): nestabilní ; (3.14): stabilní ; (3.15): nestabilní ; (3.16): stabilní pro $|a| < \frac{1}{2}$

Příloha B

Obsah přiloženého CD

- Adresář BP2007: Vlastní text bakalářské práce ve formátu pfd
- Adresář MODEL: Soubory obsahující modely vytvořeného regulátoru