ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Využití apriorní informace při fuzzy identifikaci systémů

Autor: Jan Vrba

Vedoucí práce: Doc. Ing. Petr Hušek, PhD.

Praha, 2013

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

katedra řídicí techniky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Jan Vrba**

Studijní program: Kybernetika a robotika
Obor: Systémy a řízení

Název tématu: **Využití apriorní informace při fuzzy identifikaci systémů**

Pokyny pro vypracování:

1. Vypracujte přehled algoritmů využívajících fuzzy logiku pro identifikaci nelineárních systémů.
2. Odvoďte vztah, případně jeho aproximaci, pro velikost mezí derivace pro skalární fuzzy zobrazení.
3. Modifikujte vybraný algoritmus fuzzy identifikace nelineárního systému, aby byla zajištěna předepsaná velikost maximální a minimální derivace

Seznam odborné literatury:

[1] P. Lindskog, L. Ljung: Ensuring monotonic gain characteristics in estimated models by fuzzy model structures, Automatica 36 (2000) 311-317
[2] F. Hoeppner et al.: Fuzzy Cluster Analysis, Wiley, 2000

Vedoucí: Doc.Ing. Petr Hušek, Ph.D.

Platnost zadání: do konce letního semestru 2013/2014

L.S.

Prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry

prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.
děkan

V Praze dne 28. 11. 2012

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských prací.

V Praze dne ..... podpis .....

Poděkování

Rád bych poděkoval panu doc. Ing. Petru Huškovi za trpělivost, cenné rady a snad nekonečnou ochotu ke konzultacím. Dále bych chtěl poděkovat mé rodině a všem mě blízkým lidem, bez jejichž podpory by nikdy tato práce nemohla vzniknout.

Anotace

Cílem této práce je využití apriorní informace v podobě maximální/minimální hodnoty sklonu identifikované nelineární funkce při identifikaci fuzzy systému s jedním vstupem a jedním výstupem tak, aby výsledný identifikovaný systém toto omezení splňoval. První dvě kapitoly slouží jako úvod do problematiky identifikace fuzzy systémů. Ve třetí kapitole jsou odvozeny podmínky pro maximální/minimální velikosti první derivace zobrazení popisujícího identifikovaný fuzzy systém. Ve čtvrté kapitole je vyzkoušen navržený identifikační algoritmus respektující požadavky na maximální/minimální hodnotu sklonu nelineární funkce.

Summary

The aim of this work is the use of a priori information in the form of maximum / minimum values of inclination identified nonlinear function to identify the fuzzy system with one input and one output so that the resulting system met the desired constraints. The first two chapters serve as an introduction to the problems of identification of fuzzy systems. In the third chapter are derived conditions for maximum / minimum value of the first derivative of the identified fuzzy system. The fourth chapter tested the proposed identification algorithm which respects the constraints to the maximum/minimum value of the nonlinear function slope.

Obsah

Obsah 1

1 Úvod 2

1.1 Cíl práce 2

1.2 Členění práce 2

2. Fuzzy algoritmy pro identifikaci nelineárních systémů 4

2.1 Specifikace fuzzy systému s více vstupy 4

2.2 Přehled algoritmů pro identifikaci nelineárních systémů. 5

2.2.1 Jednorázová identifikace metodou nejmenších čtverců 5

2.2.2 Identifikace fuzzy systému pomocí rekurzivní metody nejmenších čtverců 7

2.2.3 Shluková analýza 9

3. Vlastnosti derivace skalárního fuzzy zobrazení 13

3.1 Specifikace fuzzy systému s jedním vstupem a jedním výstupem 13

3.2 Analýza fuzzy SISO systému 14

3.2.1 Analýza fuzzy SISO systému s 2 pravidly 16

3.2.2 Analýza fuzzy SISO systému s 3 pravidly 19

3.2.3 Analýza fuzzy SISO systémů s větším počtem pravidel 23

3.2.4 Poloha maximální a minimální hodnoty první derivace SISO fuzzy systému 27

3.3 Odvození podmínek pro dodržení omezení velikosti první derivace 28

4 Využití apriorní informace při identifikaci nelineárních funkcí pomocí metody nejmenších čtverců 30

4.1 Formulace problému 30

4.2 Dosažené výsledky 32

5. Závěr 45

5.1 Náměty k další práci a zkoumání 46

Použitá literatura 47

Obsah přiloženého CD 48

1 Úvod

Fuzzy systémy jsou výborným nástrojem pro vytváření modelů reálných systémů, které často bývají velmi složité a nelineární. Klasické identifikační algoritmy (black box identifikace) nepracují s žádnou apriorní informací a identifikace systému probíhá pouze na základě naměřených dat, kterých navíc v některých případech bývá k dispozici velice málo a často mohou obsahovat šum. U takto identifikovaných systémů tak nelze vždy zaručit, že zachovávají i některé další vlastnosti identifikovaného systému, např. monotonii, maximální/minimální hodnotu sklonu statické převodní charakteristiky, omezenou hodnotu výstupu, atd. Zachování takových vlastností může být ale velice důležité a užitečné, protože třeba monotonie je vlastnost, která se u reálných systémů vyskytuje velice často (více viz [1]). Proto je vhodné do identifikačního algoritmu tyto informace nějak začlenit a maximálně jich využít tak, aby je výsledný fuzzy systém reflektoval. Vlastní identifikace systému pak již nevychází jen z naměřených dat, ale i z další apriorní informace, kterou o takovém systému máme k dispozici (grey box identifikace). V případě, že bychom tuto informaci neuvažovali, mohl by být výsledkem identifikace model, který by na rozdíl od reálného systému mohl mít dokonce opačný sklon statické charakteristiky. Takový model by byl v daném úseku naprosto nepoužitelný. Je tedy zřejmé, že využití apriorní informace o velikosti rychlosti růstu/klesání statické charakteristiky může mít na kvalitu výsledného modelu zásadní vliv.

1.1 Cíl práce

Cílem této práce je využití apriorní informace v podobě maximální/minimální hodnoty sklonu identifikované nelineární funkce při identifikaci fuzzy systému s jedním vstupem a jedním výstupem tak, aby výsledný identifikovaný systém toto omezení splňoval. Práce se zabývá pouze identifikací fuzzy systému s jedním vstupem a jedním výstupem, což je prvním krokem pro přechod k fuzzy systémům s více vstupy, které jsou sice podstatně složitější, ale umožňují modelování dynamických systémů.

1.2 Členění práce

Kapitola 1 je věnována krátkému úvodu do problematiky, cílům a členění práce.

Kapitola 2 je stručným přehledem některých základních algoritmů využívajících fuzzy logiku pro identifikaci nelineárních systémů, přičemž zvláštní pozornost je věnována identifikaci s využitím metody nejmenších čtverců.

V kapitole 3 je provedena analýza zobrazení popisující SISO fuzzy systém a dále je popsán způsob, jakým lze získat omezení na velikost mezí 1. derivace fuzzy systému s jedním vstupem a jedním výstupem.

Kapitola 4 se zaměřuje na využití teoretických poznatků, popsaných v kap. 3, při identifikaci pomocí metody nejmenších čtverců. Dále jsou ukázány výsledky identifikace nelineárních funkcí, kterých bylo takto modifikovanou metodou dosaženo.

Kapitola 5 je závěrem práce a shrnuje dosažené výsledky z předchozích kapitol a také náměty pro další práci a zkoumání.

2. Fuzzy algoritmy pro identifikaci nelineárních systémů

V první podkapitole této kapitoly je specifikován fuzzy systém s více vstupy a jedním výstupem (viz kap. 2.1), který je výchozím systémem pro dále popsané identifikační algoritmy. Další podkapitola je věnovaná přehledu algoritmů pro identifikaci nelineárních systémů (viz kap. 2.2) a to konkrétně jednorázovou identifikaci pomocí metody nejmenších čtverců (viz kap. 2.2.1) a rekurzivní metodou nejmenších čtverců (viz kap. 2.2.2). Dále jsou popsány dva algoritmy fuzzy shlukové analýzy (viz kap. 2.2.3) a to konkrétně algoritmus fuzzy c-means (viz kap. 2.2.3.1) a Gustaffson-Kesselův algoritmus (viz kap. 2.2.3.2).

2.1 Specifikace fuzzy systému s více vstupy

Uvažujme fuzzy systém, který má bázi pravidel tvořenou $\prod_{i=1}^{n} N_i$ různými pravidly a l-té pravidlo můžeme zapsat ve tvaru

$$IF\ x_1\ je\ A_1^{l_1}\ a \ldots\ a\ x_n\ je\ A_n^{l_n}\ THEN\ y\ je\ B^{l_1 \ldots l_n} \quad (2.1)$$

kde $l_i = 1,2, \ldots N_i$, $A_i^{l_i}$ je normální fuzzy množina ve vstupním prostoru $U \subset R^n$ a B^lje normální fuzzy množina ve výstupním prostoru $V \subset R$ a $x \in U, y \in V$ jsou vstupní, resp. výstupní (lingvistické) proměnné fuzzy systému. Středem fuzzy množiny $B^{l_1 \ldots l_n}$ v tomto případě rozumíme bod $\bar{y}^{l_1 \ldots l_n} \in R$, ve kterém funkce příslušnosti k dané fuzzy množině nabývá maxima. Dále předpokládáme, že tento fuzzy systém Mamdaniho typu je reprezentován součinovým inferenčním mechanismem, fuzzyfikace využívá singletonu a defuzzifikace metody těžiště (více viz [2]). Výsledné zobrazení popisující výše specifikovaný fuzzy systém potom můžeme zapsat ve tvaru

$$f(x) = \frac{\sum_{l_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{N_n} \bar{y}^{l_1 \ldots l_n} \left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) \right]}{\sum_{l_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{N_n} \left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) \right]} \quad (2.2)$$

kde $\mu_{A_i^l}(x)$ je funkce příslušnosti (neboli též charakteristická funkce, nebo diskriminační funkce) k množině A_i^l. Pokud platí, že pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ existuje alespoň jedna funkce příslušnosti

$$\mu_{A_i^l}(x_i) \neq 0, \qquad \forall x \in R,$$

tak je fuzzy systém *f(x)* tzv. *kompletní* (viz [2]). V každém bodě vstupního prostoru *U* bude alespoň jedna funkce příslušnosti nenulová, a proto bude vždy alespoň jedno pravidlo aktivováno.

2.2 Přehled algoritmů pro identifikaci nelineárních systémů.

V této podkapitole jsou nastíněny principy fungování algoritmů pro identifikaci nelineárních systémů. Konkrétně metoda nejmenších čtverců (viz kap. 2.2.1), rekurzivní metoda nejmenších čtverců (viz kap. 2.2.2) a dále metody shlukové analýzy (viz kap. 2.2.3). Zatímco pomocí metody nejmenších čtverců hledáme pouze pravé strany pravidel, shlukovací algoritmy umožňují hledat i levou část pravidel. Vzhledem k tomu, jak jsou oba přístupy naprosto rozdílné, je každé skupině věnována samostatná kapitola. Z fuzzy shlukovacích algoritmů jsou popsány fuzzy c-means algoritmus (viz kap. 2.2.3.1)a Gustafson-Kesselův algoritmus (viz kap. 2.2.3.2).

2.2.1 Jednorázová identifikace metodou nejmenších čtverců

Jak je uvedeno v [2], cílem identifikace fuzzy systému pomocí metody nejmenších čtverců, je minimalizovat kvadratické kritérium

$$J = \sum_{j=1}^{p} \left[f\left(x_0^j\right) - y_0^j \right]^2 \quad (2.3)$$

tedy součet chyb mezi všemi naměřenými výstupními daty $y_0^j \in R$ a výstupem fuzzy systému $f\left(x_0^j\right)$, kde $x_0^j \in R^n$ jsou změřená vstupní data a p je počet naměřených dvojic vstup - výstup $[x_0, y_0]$.

Při jednorázové identifikaci metodou nejmenších čtverců využijeme celé množiny naměřených dat.

Krok 1:

Uvažujme množinu $U = [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots [\alpha_n, \beta_n] \subset R^n$. Pro každou množinu $[\alpha_i, \beta_i]$ definujme N_i fuzzy množin $A_i^{l_i}$ $(l_i = 1,2, \dots, N_i)$, které jsou na množině $[\alpha_i, \beta_i]$ kompletní (pozn. definice kompletnosti viz kap. 2.1).

Krok 2:

Sestavíme fuzzy systém z $\prod_{i=1}^{n} N_i$ fuzzy pravidel IF-THEN ve tvaru:

$$IF\ x_1\ je\ A_1^{l_1}\ a \ldots\ a\ x_n\ je\ A_n^{l_n}\ THEN\ y\ je\ B^{l_1 \ldots l_n}$$

Kde $l_i = 1,2, \ldots N_i$ a $B^{l_1 \ldots l_n}$ je fuzzy množina se středem v $\bar{y}^{l_1 \ldots l_n}$ což je volný parametr který hledáme. Uvažujme fuzzy systém Mamdaniho typu, který je reprezentován součinovým inferenčním mechanismem, fuzzyfikace využívá singletonu a defuzzifikace metody těžiště (více viz [2]). Výsledný systém můžeme zapsat ve tvaru

$$f(x) = \frac{\sum_{l_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{N_n} \bar{y}^{l_1 \ldots l_n} \left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) \right]}{\sum_{l_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{N_n} \left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) \right]},$$

kde $A_i^{l_i}$ je fuzzy množina definovaná v kroku 1 a $\bar{y}^{l_1 \ldots l_n}$ je volný parametr, který hledáme.

Dále označme hledaný vektor parametrů $\theta \in R^{\prod_{i=1}^{n} N_i}$

$$\theta = [\bar{y}^{1 \ldots 1}, \ldots, \bar{y}^{N_1 1 \ldots 1}, \bar{y}^{121 \ldots 1}, \ldots, \bar{y}^{N_1 21 \ldots 1}, \ldots, \bar{y}^{1 N_2 \ldots N_n}, \ldots, \bar{y}^{N_1 N_2 \ldots N_n}]^T$$

a přepíšeme fuzzy systém 14.3 do tvaru

$$f(x) = b^T(x)\theta$$

kde

$$b(x) = [b^{1..1}(x), .., b^{N_1 1..1}(x), b^{121..1}(x), .., b^{N_1 21..1}(x), .., b^{1 N_2..N_n}(x), .., b^{N_1 N_2..N_n}(x)]^T$$

přičemž

$$b^{l_1 \ldots l_n}(x) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^{l_i}}(x_i)}{\sum_{l_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{N_n} \left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) \right]}.$$

Krok 3:

Označíme uspořádaný vektor z takový, že

$$z = \left[b(x_0^1), \ldots, b\left(x_0^p\right) \right]$$

a kvadratickou formu 2.3 přepíšeme do tvaru

$$J(\theta) = (z\theta - Y)(z\theta - Y)^T \quad (2.4)$$

kde Y je uspořádaný vektor naměřených hodnot $Y = \left[y_0^1, \ldots, y_0^p \right]$.

Pro výsledný optimální vektor $\hat{\theta}$ minimalizující kvadratické kritérium (2.4) platí,

$$\hat{\theta} = (z^T z)^{-1} z^T Y$$

za předpokladu, že jsou řádky matice z lineárně nezávislé.

2.2.2 Identifikace fuzzy systému pomocí rekurzivní metody nejmenších čtverců

Cílem identifikace fuzzy systému pomocí rekurzivní metody nejmenších čtverců je opět minimalizovat kvadratické kritérium

$$J_p = \sum_{j=1}^{p} \left[f\left(x_0^j\right) - y_0^j \right]^2 \quad (2.5)$$

kde $y_0^j \in R$ jsou naměřená výstupní data. Příslušný výstup fuzzy systému označíme $f\left(x_0^j\right)$, kde $x_0^j \in R^n$ jsou naměřená vstupní data a p je počet naměřených dvojic $[x_0, y_0]$. Protože se jedná o rekurzivní metodu, chceme, aby fuzzy systém f_p minimalizující kritérium J_p byl reprezentován jako nějaká funkce tohoto systému v předchozím kroku f_{p-1}. Výhodou je, že nemusíme ukládat data ze všech měření a provádět znovu jednorázovou identifikaci s využitím i předchozích dat při každé nově naměřené dvojici $\left[x_0^p, y_0^p\right]$. Fuzzy systém f_p minimalizující kritérium J_p je pouze funkcí nově naměřených dat $\left[x_0^p, y_0^p\right]$ a funkce f_{p-1}. Algoritmus identifikace fuzzy systému pomocí rekurzivní metody nejmenších čtverců lze popsat pomocí následujících 4 kroků.

Krok 1 a 2

Kroky 1 a 2 jsou stejné jako při jednorázové identifikaci metodou nejmenších čtverců (viz kap 2.2.1).

Krok 3:

Zvolíme parametry počáteční parametry θ_0 libovolně ve výstupním prostoru $V \subset R$ (například tak, aby jednotlivé parametry θ_0 rovnoměrně pokrývaly množinu V).

Krok 4:

Pro všechna $p = 1,2, \ldots$ vypočteme parametry θ pomocí rekurzivních nejmenších čtverců následovně:

$$\theta_p = \theta_{p-1} + K_p\left[y_0^p - b^T\left(x_0^p\right)\theta_{p-1}\right]$$

$$K_p = P_{p-1} b\left(x_0^p\right)\left[b^T\left(x_0^p\right) P_{p-1} b\left(x_0^p\right) + 1\right]^{-1}$$

$$P_p(p) = P_{p-1} - P_{p-1}\, b\left(x_0^p\right)\left[b^T\left(x_0^p\right) P_{p-1} b\left(x_0^p\right) + 1\right]^{-1} b^T\left(x_0^p\right) P_{p-1}$$

Kde θ_0 bylo vybráno v kroku 3. $P_0 = \sigma I$, a σ je nějaká velká konstanta. Výsledný fuzzy systém je pak ve tvaru (2.2) s parametry $\bar{y}^{l_1 \dots l_n}$ odpovídajícími příslušným členům v θ_p.

Detailní odvození rekurzivního algoritmu nejmenších čtverců je uvedeno v [2].

2.2.3 Shluková analýza

Podle [3] jsou „algoritmy shlukové analýzy výhodné pro práci s velkým množstvím dat. V takových případech by bylo obtížné a nežádoucí pracovat s velkým množstvím pravidel, reprezentujících každou dvojici změřených dat (x_i, y_i). Proto je výhodné data rozdělit do N disjunktních množin, jejichž prvky mají určité vlastnosti, které je odlišují od prvků příslušejících jiným množinám. Pro každou takovou množinu potom můžeme vytvořit jedno pravidlo“. Tím se výsledný fuzzy systém podstatně zjednoduší. Jak je dále uvedeno v [3], rozdělení množiny dat nebo objektů to shluků (podmnožin, tříd) by mělo mít následující vlastnosti:

- Homogenita uvnitř shluků, tzn. data náležející stejnému shluku jsou podobná
- Heterogenita mezi shluky, tzn. data náležející různým shlukům jsou rozdílná

Jako míru podobnosti, resp. rozdílnosti mezi daty můžeme použít např. euklidovskou vzdálenost mezi daty. Pro vysvětlení základních principů shlukové analýzy je nutné nejprve definovat některé pojmy. Nejprve uvažujme množinu $D \neq \emptyset, D \in \mathbb{R}^p$ a množinu množin $R, (|R| > 2) \vee (\exists r \in R: |r| > 2)$. Množinu D nazýváme prostor dat a množinu R prostorem výsledků. Potom $A(D,R) \coloneqq \{f | f: X \to K, X \subseteq D, X \neq \emptyset, K \in R\}$ je prostorem analýzy. Zobrazení $f: X \to K \in A(D,R)$ reprezentuje výsledek analýzy dat zobrazením množiny dat $X \subseteq D$ na množinu možných výsledků analýzy $K \in R$. Dále nechť $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je množina naměřených dat a $K = \{k_1, k_2, \dots, k_c\}$ je množina všech výsledných shluků jednoznačně určených středem k. V případě, že množiny X a K jsou konečné, můžeme výsledek analýzy $f: X \to F(K)$ reprezentovat maticí U o velikosti $c \times n$, kde $u_{i,j} \coloneqq f(x_j)(k_i), u_{i,j} \in \langle 0,1 \rangle$ je míra příslušnosti dat x_j ke shluku se středem k_i. Při hledání výsledku analýzy $f \in A(D,R)$ je minimalizována tzv. objektivní funkce

$$J = \sum_{x \in X} \sum_{k \in K} f^m(x)(k) \cdot d^2(x,k) \quad (2.6)$$

kde $m \in R_{>1}$ je parametr fuzzyfikace, *d(x,k)* je míra vzdálenosti mezi středem shluku k a mezi datem x. Minimalizace této funkce je prováděna iterativním postupem. Mnoho algoritmů shlukové analýzy funguje na podobném principu a liší se např. použitím různé metriky, tvarem objektivní funkce atd. Výsledkem shlukové analýzy jsou tedy levé IF části pravidel tvořících bázi pravidel výsledného fuzzy systému. V následujících podkapitolách je popsán podrobněji algoritmus fuzzy c-means (viz kap. 2.2.3.1) a algoritmus Gustavson-Kesselův (viz kap. 2.2.3.2).

2.2.3.1 Fuzzy c-means algoritmus

Fuzzy c-means algoritmus (viz [3]) rozdělí data $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ do předem požadovaného počtu shluků $K = \{k_1, k_2, \dots, k_c\}$ kulového tvaru v p dimenzionálním prostoru a používá euklidovskou metriku. Lze jej popsat v následujících 4 krocích.

Krok 1

Vybereme počet shluků c takový, počet shluků $2 \leq c < n$. Dále zvolíme $\varepsilon > 0$, které určuje, při jaké minimální změně středů shluků bude algoritmus ukončen. Zvolíme parametr $m > 1$, který určuje „rozostřenost (z angl. fuzzier)“ jednotlivých shluků. Nastavíme matici $U^{(0)}$ například na náhodné hodnoty a nastavíme počítadlo iterací $i \coloneqq 0$.

Krok 2

$i \coloneqq i + 1$

Určíme množinu středů shluků $K^{(i)}$ tak, aby objektivní funkce (2.6) byla minimalizována $K^{(i)}$ pro známé $U^{(i-1)}$. Pro střed j −tého shluku v i-té iteraci platí, že

$$k_j^{(i)} = \frac{\sum_{l=1}^{n} f^m(x_l)(k_j) x_l}{\sum_{l=1}^{n} f^m(x_l)(k_j)}$$

kde $f(x_l)(k_j)$ značí funkci příslušnosti l-tého data k j-tému shluku.

Krok 3

Vypočteme hodnoty funkcí příslušnosti všech dat X k shlukům se středy získanými v kroku 2 tak, že

$$f(x)(k) = \begin{cases} 0, & I_x \neq \emptyset, k \notin I_x \\ \sum_{i \in I_x} f(x)(i) = 1, & I_x \neq \emptyset, k \notin I_x \\ \dfrac{1}{\sum_{j \in K} \left(\dfrac{d^2(x,k)}{d^2(x,j)} \right)^{\frac{1}{m-1}}}, & I_x \neq \emptyset \end{cases}$$

a sestavíme matici $U^{(i)}$(viz kap 2.2.3).

Krok 4

Pokud platí, že $\left\| U^{(i-1)} - U^{(i)} \right\| \leq \varepsilon$, potom algoritmus končí. Jinak pokračuje návratem do kroku 2.

Výstupem algoritmu je množina středů shluků K a matice U s hodnotami funkcí příslušnosti jednotlivých dat k jednotlivým shlukům.

2.2.3.2 Gustafson-Kesselův algoritmus

Jak je uvedeno v [3], nahrazením euklidovské metriky metrikou $\|x\|_A = \sqrt{x^T A x}$, pro každý shluk, kde A je symetrická pozitivně definitní matice charakterizující tvar a orientaci tohoto shluku v p rozměrném prostoru, můžeme získat shluky elipsoidních tvarů. Oproti fuzzy c-means algoritmu tedy Gustafson-Kesselův algoritmus pracuje kromě středů shluků i s jejich příslušnými maticemi A, které popisují jejich tvar, orientaci a velikost. Abychom se vyhnuli minimalizaci objektivní funkce maticemi A blízkými nule, je zavedeno omezení ρ na požadovanou velikost shluku tak, že $det(A) = \rho$. Algoritmus lze popsat v těchto 4 krocích:

Krok 1

Vybereme počet shluků c takový, počet shluků $2 \leq c < n$. Dále zvolíme $\varepsilon > 0$, které určuje, při jaké minimální změně středů shluků bude algoritmus ukončen. Zvolíme parametr $m > 1$, který určuje „rozostřenost (z angl. fuzzier)“ jednotlivých shluků. Nastavíme matici $U^{(0)}$ například na náhodné hodnoty, zvolíme objem shluků ρ. a nastavíme počítadlo iterací $i \coloneqq 0$.

Krok 2

$i \coloneqq i + 1$

Určíme c pozitivně definitních matic A_j tak, že

$$A_j = \sqrt[p]{det(S_j)} \cdot S_j^{-1},$$

kde

$$S_j = \sum_{l=1}^{n} f^m(x_l)(k_j)(x_l - k_j)(x_l - k_j)^T$$

Dále určíme množinu středů shluků $K^{(i)}$ tak, aby objektivní funkce byla minimalizována $K^{(i)}$ pro známé $U^{(i-1)}$. Pro střed j −tého shluku v i-té iteraci platí, že

$$k_j^{(i)} = \frac{\sum_{l=1}^{n} f^m(x_l)(k_j)x_l}{\sum_{l=1}^{n} f^m(x_l)(k_j)}$$

kde $f(x_l)(k_j)$ značí funkci příslušnosti l-tého data k j-tému shluku.

Krok 3

Vypočteme hodnoty funkcí příslušnosti všech dat *X* k shlukům se středy získanými v kroku 2 tak, že

$$f(x)(k) = \begin{cases} 0, & I_x \neq \emptyset, k \notin I_x \\ \sum_{i \in I_x} f(x)(i) = 1, & I_x \neq \emptyset, k \notin I_x \\ \dfrac{1}{\sum_{j \in K} \left(\dfrac{d^2(x,k)}{d^2(x,j)}\right)^{\frac{1}{m-1}}}, & I_x \neq \emptyset \end{cases}$$

a sestavíme matici $U^{(i)}$(viz kap 2.2.3).

Krok 4

Pokud platí, že $\left\|U^{(i-1)} - U^{(i)}\right\| \leq \varepsilon$ potom algoritmus končí. Jinak pokračuje návratem do kroku 2.

Výstupem algoritmu je množina středů shluků *K*, jejich příslušné tvarové matice *A* a matice *U* s hodnotami funkcí příslušnosti jednotlivých dat k jednotlivým shlukům.

3. Vlastnosti derivace skalárního fuzzy zobrazení

Protože cílem této práce je využití apriorní informace v podobě maximální/minimální hodnoty sklonu identifikované nelineární monotónní funkce při identifikaci SISO fuzzy systému tak, aby výsledný systém toto omezení splňoval, je důležité nejdříve pochopit, jaké parametry SISO fuzzy systému $f(x)$ mají vliv na velikost jeho první derivace $\frac{df}{dx}$. (viz kap. 3.2). Odvození podmínek, které zajistí požadované omezení velikosti první derivace je uvedeno v podkapitole 3.3. Specifikaci fuzzy systému s jedním vstupem a jedním výstupem, jehož identifikací se tato práce zabývá, je věnována následující podkapitola 3.1.

3.1 Specifikace fuzzy systému s jedním vstupem a jedním výstupem

V této diplomové práci pro identifikaci nelineárního systému uvažujme fuzzy systém pouze s jedním vstupem a jedním výstupem. Dále uvažujme, že tento systém má bázi pravidel tvořenou *N* různými pravidly a *l*-té pravidlo můžeme zapsat ve tvaru

$$IF\ x\ je\ A^l\ THEN\ y\ je\ B^l\ ,\ l = 1,2,\dots,N \quad (3.1)$$

přičemž A^l je fuzzy množina ve vstupním prostoru $U \subset R$ a B^lje normální fuzzy množina ve výstupním prostoru $V \subset R$ a $x \in U, y \in V$ jsou vstupní, resp. výstupní (lingvistické) proměnné fuzzy systému. Střed fuzzy množiny B^l označíme $\bar{y}^l$. Středem fuzzy množiny v tomto případě rozumíme bod $\bar{y}^l \in R$, ve kterém funkce příslušnosti k dané fuzzy množině nabývá maxima. Dále předpokládáme, že tento SISO fuzzy systém Mamdaniho typu je reprezentován součinovým inferenčním mechanismem, fuzzyfikace využívá singletonu a defuzzifikace metody těžiště (více viz [2]). Výsledné zobrazení popisující fuzzy systém můžeme zapsat ve tvaru

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^{M} \bar{y}^l \mu_{A^l}(x)}{\sum_{l=1}^{M} \mu_{A^l}(x)}, x \in U, y \in V \quad (3.2)$$

kde $\mu_{A^l}(x)$ je funkce příslušnosti (neboli též charakteristická funkce, nebo diskriminační funkce) k množině A^l. V našem případě volíme funkci příslušnosti $\mu_{A^l}(x)$ jako gaussovskou, tedy

$$\mu_{A^l}(x) = exp\left(-\left(\frac{x - \bar{x}_l}{\sigma}\right)^2\right) \quad (3.3)$$

kde $\bar{x}_l$ je střed funkce příslušnosti k množině A^l a σ určuje tvar této funkce. Parametr σ uvažujeme pro zjednodušení u všech funkcí příslušnosti $\mu_{A^l}(x)$ stejný. Výhodami

gaussovské funkce příslušnosti je, že je diferencovatelná v celém definičním oboru, výsledné zobrazení bude hladké a fuzzy systém bude kompletní (viz kap. 2.1).

3.2 Analýza fuzzy SISO systému

Prvním požadavkem na vlastnosti výsledného fuzzy systému je jeho monotonie. Tento problém byl již řešen v několika pracích, např. [4], [6]. Právě v [4] dokázali Ljung a Lindskog, že pro vhodně zvolené trojúhelníkové funkce příslušnosti $\mu_{A^l}(x)$ a pro vhodně zvolené středy $\bar{y}^l$ může být výsledná funkce popisující fuzzy systém monotónní. V [5] je odvozena jedna dostačující podmínka, mající 4 části, pro monotonii Takagi-Sugeno–Kang fuzzy systémů. Vzhledem k tomu, že uvažujeme fuzzy systém s pravidly ve tvaru 3.1 a s diferencovatelnými gaussovskými funkcemi příslušnosti, pro jejichž parametry σ platí, že $\sigma_i = \sigma_j$, musí být podle [5] splněny pouze následující 2 části dostačující podmínky:

1. část:

1. část podmínky se vztahuje k IF části pravidel fuzzy systému *f(x)*. Podle [5] musí platit, že

$$\frac{\left(\frac{d\mu_{A^p}(x)}{dx}\right)}{\mu_{A^p}(x)} \leq \frac{\left(\frac{d\mu_{A^q}(x)}{dx}\right)}{\mu_{A^q}(x)}, x \in U$$

Pro všechny *p, q,* takové, že $1 \leq p < q \leq N$, kde *N* je počet pravidel fuzzy systému ve tvaru (3.1).

2. část:

2. část podmínky se vztahuje k THEN části pravidel fuzzy systému *f(x)*. Aby byl výsledný systém rostoucí resp. klesající, musí být splněna následující podmínka:

$$\bar{y}^p \geq \bar{y}^q$$

aby byl výsledný fuzzy systém nerostoucí, resp.

$$\bar{y}^p \leq \bar{y}^q$$

aby byl výsledný systém neklesající.

Za dodržení těchto podmínek bude výsledný fuzzy systém monotónní (stejných podmínek je využito i v [6]). Cílem práce však je, aby byly dodrženy i meze první derivace zobrazení popisující identifikovaný fuzzy systém a proto je důležité zjistit, jaké má první derivace tohoto zobrazení vlastnosti, konkrétně kde má maximální/minimální hodnotu, jak velkou a jaké parametry fuzzy systému tuto hodnotu, resp. její polohu ovlivňují a zda-li, by nebylo

možné dojít k nějakým obecným závěrům nebo přímo ke stanovení dalších omezujících podmínek.

Jak již bylo uvedeno, fuzzy systém *f(x)* s jedním vstupem a jedním výstupem detailně popsaný v kapitole 3.1, jehož identifikací se tato práce zabývá lze vyjádřit jako

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^{N} \bar{y}^l \mu_{A^l}(x)}{\sum_{l=1}^{N} \mu_{A^l}(x)},$$

kde N je počet pravidel fuzzy systému a $\mu_{A^l}(x)$ je gaussovská funkce příslušnosti k množině A^l, kde A^l je fuzzy množina ve vstupním prostoru $U \subset R$. Střed této množiny značíme $\bar{x}_l$.

Pro velikost první derivace $\frac{df}{dx}$ platí

$$\frac{df}{dx} = \frac{\sum_{l=1}^{N} \bar{y}^l \frac{d\mu_{A^l}(x)}{dx} \cdot \sum_{l=1}^{N} \mu_{A^l}(x) - \sum_{l=1}^{N} \bar{y}^l \mu_{A^l}(x) \cdot \sum_{l=1}^{N} \frac{d\mu_{A^l}(x)}{dx}}{(\sum_{l=1}^{N} \mu_{A^l}(x))^2} \quad (3.4)$$

Z uvedeného zápisu je zřejmé, že velikost první derivace $\frac{df}{dx}$ závisí na vlastnostech všech funkcí příslušnosti $\mu_{A^l}(x)$ a dále na poloze středů $\bar{y}^l$ fuzzy množin B^l, kde B^lje fuzzy množina ve výstupním prostoru $V \subset R$. Výše uvedený předpis 3.4 můžeme upravit do tvaru

$$\frac{df}{dx} = \frac{\sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} (\bar{y}^p - \bar{y}^q) \frac{d\mu_{A^p}(x)}{dx} \mu_{A^q}(x)}{(\sum_{l=1}^{N} \mu_{A^l}(x))^2} \quad (3.5)$$

z kterého vyplývá, že velikost první derivace $\frac{df}{dx}$ je přímo úměrná součtu rozdílů velikostí všech možných dvojic $\bar{y}^p, \bar{y}^q$. Pokud bude pro všechna $\bar{y}^i, \bar{y}^{i+1}$, kde *i=1,2,...N-1* platit, že $\bar{y}^{i+1} - \bar{y}^i = \Delta y$, bude velikost první derivace lineárně závislá na velikosti Δy, což je zřejmé z následujícího zápisu

$$\frac{df}{dx} = \frac{\Delta y \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} (p - q) \frac{d\mu_{A^p}(x)}{dx} \mu_{A^q}(x)}{(\sum_{l=1}^{N} \mu_{A^l}(x))^2}, \quad (3.6)$$

Při hledání omezující podmínek, které zajistí požadované omezení velikosti první derivace zobrazení popisujícího fuzzy systém, této skutečnosti využijeme, protože jak je zřejmé, omezení velikosti Δy omezí velikost maximální resp. minimální hodnoty derivace. Pokud zvolíme pevně parametry funkcí příslušnosti μ_{A^l}, bude velikost první derivace závislá lineárně pouze na velikosti parametru Δy. Nejprve se pokusíme nalézt body *x* z intervalu *U*, ve kterých nabývá funkce $\frac{df}{dx}$ svých maximálních, resp. minimálních hodnot. Tento problém vede na řešení rovnice

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0, \quad (3.7)$$

kde

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}(\bar{y}^p - \bar{y}^q)\left[\left(\frac{d\mu_{A^p}^2(x)}{dx}\mu_{A^q}(x) + \frac{d\mu_{A^p}(x)}{dx}\frac{d\mu_{A^q}(x)}{dx}\right)\left(\sum_{l=1}^{N}\mu_{A^l}(x)\right)\right]}{\left(\sum_{l=1}^{N}\mu_{A^l}(x)\right)^4} -$$

$$-\frac{2\left[\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}(\bar{y}^p - \bar{y}^q)\left(\frac{d\mu_{A^p}(x)}{dx}\mu_{A^q}(x)\right)\right]\left(\sum_{l=1}^{N}\mu_{A^l}(x)\right)\left(\sum_{l=1}^{N}\frac{d\mu_{A^l}(x)}{dx}\right)}{\left(\sum_{l=1}^{N}\mu_{A^l}(x)\right)^4} \quad (3.8)$$

Vzhledem k symetrii gaussovských funkcí příslušnosti $\mu_{A^l}(x)$ bude vždy v bodě $\left\{\frac{\bar{x}_N+\bar{x}_1}{2}\right\}$ rovnice (3.7) splněna, protože platí, že

$$\sum_{l=1}^{N}\frac{d\mu_{A^l}\left(\frac{\bar{x}_N+\bar{x}_1}{2}\right)}{dx} = 0$$

a

$$\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}(\bar{y}^p - \bar{y}^q)\left[\frac{d\mu_{A^p}^2\left(\frac{\bar{x}_N+\bar{x}_1}{2}\right)}{dx}\mu_{A^q}\left(\frac{\bar{x}_N+\bar{x}_1}{2}\right)\right] +$$

$$+\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}(\bar{y}^p - \bar{y}^q)\left[\frac{d\mu_{A^p}\left(\frac{\bar{x}_N+\bar{x}_1}{2}\right)}{dx}\frac{d\mu_{A^q}\left(\frac{\bar{x}_N+\bar{x}_1}{2}\right)}{dx}\right] = 0$$

Vzhledem ke složitosti výrazu (3.8) se další body splňující rovnici (3.7) nalézt nepodařilo. Pokud by se podařilo nalézt body, ve kterých nabývá první derivace výše popsaného fuzzy systému svých maximálních resp. minimálních hodnot, mohli bychom vzhledem k lineární závislosti velikosti první derivace (3.6) na Δy stanovit maximální resp. minimální přípustné hodnoty parametru Δy tak, aby výsledné zobrazení popisující identifikovaný fuzzy systém splňovalo požadované omezení na velikost první derivace.

3.2.1 Analýza fuzzy SISO systému s 2 pravidly

Obecný výraz pro první derivaci zobrazení reprezentujícího fuzzy systém (3.2) je velmi složitý. Nejprve provedeme analýzu pro systém s pouze 2 funkcemi příslušnosti, který je sice prakticky nepoužitelný, ale z teoretického hlediska mohou být dosažené výsledky zajímavé (pozn. provádět analýzu pro fuzzy systém s jedinou funkcí příslušnosti nemá smysl, funkce popisující tento systém je totiž funkcí konstantní). Mějme tedy SISO fuzzy systém (viz kap.

3.1) s dvěma gaussovskými funkcemi příslušnosti μ_{A^1}, μ_{A^2} se středy $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ takovými, že $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$. Dále definujme množinu U jako interval $\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle$. Zobrazení popisující tento fuzzy systém můžeme zapsat ve tvaru

$$f(x) = \frac{\bar{y}^1 \mu_{A^1}(x) + \bar{y}^2 \mu_{A^2}(x)}{\mu_{A^1}(x) + \mu_{A^2}(x)}, x \in U \quad (3.9)$$

Pro velikost jeho první derivace dostáváme po několika úpravách vztah

$$\frac{df}{dx} = \frac{-2\mu_{A^1}(x)\mu_{A^2}(x)}{\sigma^2} \cdot \frac{[\bar{y}^1(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + \bar{y}^2(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)]}{\left(\mu_{A^1}(x) + \mu_{A^2}(x)\right)^2}, x \in U \quad (3.10)$$

Označíme rozdíl $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = \Delta x$ a rozdíl $\bar{y}^2 - \bar{y}^1 = \Delta y$. Potom můžeme přepsat výše uvedený výraz (3.10) do tvaru

$$\frac{df}{dx} = \frac{2\Delta x \Delta y}{\sigma^2} \cdot \frac{\mu_{A^1}(x)\mu_{A^2}(x)}{\left(\mu_{A^1}(x) + \mu_{A^2}(x)\right)^2}$$

z kterého je zřejmé, že velikost první derivace zobrazení popisujícího SISO fuzzy systém (3.9) je přímo úměrná velikosti Δy a dále, že závislost $\frac{df}{dx}$na parametrech $\Delta x, \sigma$ je nelineární. Nelineární závislost na parametru Δx je zřejmá ze součinu funkcí příslušností $\mu_{A^1}(x)\mu_{A^2}(x)$, pro který platí, že

$$\mu_{A^1}(x)\mu_{A^2}(x) = exp\left(-\left(\frac{x - \bar{x}_1}{\sigma}\right)^2\right) \cdot exp\left(-\left(\frac{x - \bar{x}_1}{\sigma}\right)^2\right) =$$

$$= exp\left(\frac{-2x^2 - 2x(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) - \bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2}{\sigma^2}\right).$$

Nyní zkusíme zjistit, kde se nachází maximální/minimální hodnota funkce (3.10). Řešení tohoto problému vede na výpočet 2. derivace původního zobrazení popisující fuzzy systém (3.9), která je

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{2\Delta x \Delta y}{\sigma^2} \frac{\left(\mu_{A^1}(x) + \mu_{A^2}(x)\right)^2}{\left(\mu_{A^1}(x) + \mu_{A^2}(x)\right)^4} \left[\left(\frac{d\mu_{A^1}(x)}{dx}\mu_{A^2}(x) + \mu_{A^1}(x)\frac{d\mu_{A^2}(x)}{dx}\right)\right] -$$

$$-\frac{2\Delta x \Delta y}{\sigma^2} \frac{2\mu_{A^1}(x)\mu_{A^2}(x)}{\left(\mu_{A^1}(x) + \mu_{A^2}(x)\right)^4} \left[\left(\mu_{A^1}(x) + \mu_{A^2}(x)\right)\left(\frac{d\mu_{A^1}(x)}{dx} + \frac{d\mu_{A^2}(x)}{dx}\right)\right] \quad (3.11)$$

Pro bod, který může být extrémem $\frac{df}{dx}$ potom opět platí, že

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0.$$

Využijme následující skutečnosti, že pro každé 2 gaussovské funkce příslušnosti $\mu_{A^1}(x)$, $\mu_{A^2}(x)$ se středy $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ platí, že

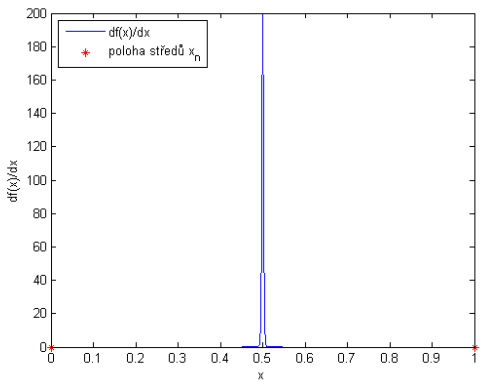
$$\mu_{A^1}\left(\frac{\bar{x}_2 + \bar{x}_1}{2}\right) = \mu_{A^2}\left(\frac{\bar{x}_2 + \bar{x}_1}{2}\right)$$

a pro hodnoty jejich první derivace platí, že

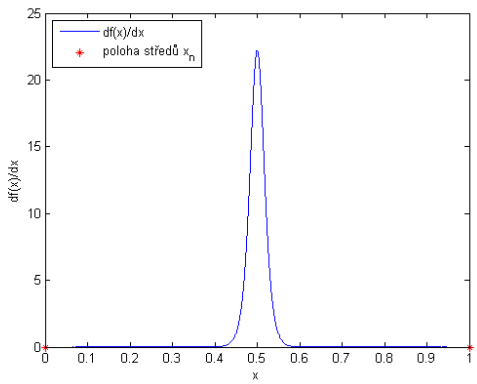
$$\frac{d\mu_{A^1}\left(\frac{\bar{x}_2 + \bar{x}_1}{2}\right)}{dx} = -\frac{d\mu_{A^2}\left(\frac{\bar{x}_2 + \bar{x}_1}{2}\right)}{dx}.$$

Je tedy vidět, že rovnice (3.11) je splněna pro bod $\left\{\frac{\bar{x}_2+\bar{x}_1}{2}\right\}$, což odpovídá poznatkům z kapitoly 3.2. V tomto bodě má zobrazení popisující fuzzy systém (3.9) maximální hodnotu první derivace.

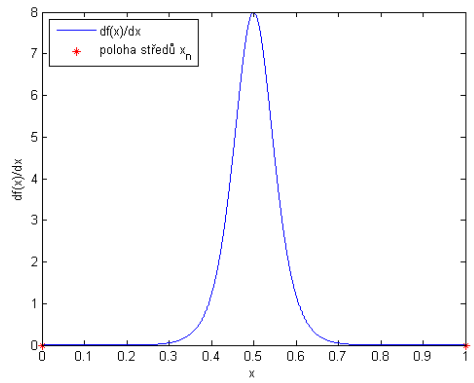
Typické průběhy první derivace funkce popisující fuzzy systému (3.9) jsou pro různé parametry σ znázorněny na obrázcích 3.1 – 3.6 níže. Další parametry fuzzy systému jsou $\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 2, \bar{y}^1 = 1, \bar{y}^2 = 2$. Interval, na kterém chování první derivace vyšetřujeme označíme jako interval $U = \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle$. Obrázky níže jsou zobrazeny na intervalu $\langle 0,1 \rangle$, jedná se pouze o formální popis.



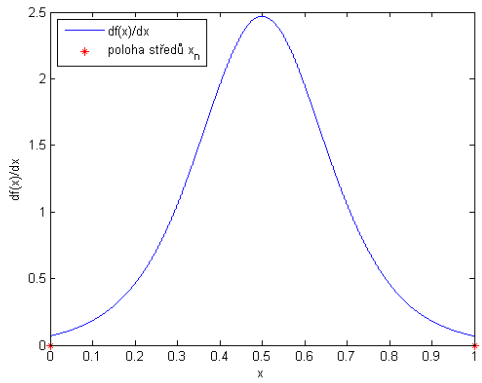
Obr. 3.1 Parametr $\sigma = 0{,}05$



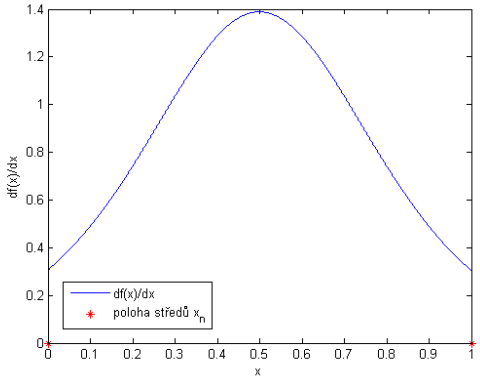
Obr. 3.2 Parametr $\sigma = 0{,}15$



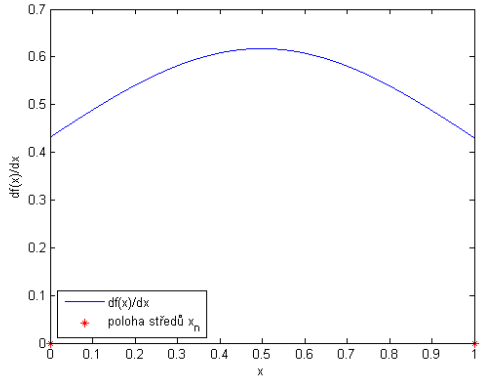
Obr. 3.3 Parametr $\sigma = 0{,}25$



Obr. 3.4 Parametr $\sigma = 0{,}45$



Obr. 3.5 Parametr $\sigma = 0{,}6$



Obr. 3.6 Parametr $\sigma = 0{,}9$

Z obrázků 3.1 – 3.6 zobrazených výše je patrné, že čím větší volíme parametr σ, tím víc se zmenšuje rozdíl mezi maximální a minimální hodnotou první derivace na zkoumaném intervalu a velikost maximální hodnoty derivace klesá, což je v souladu s obecnými závěry popsanými v kap. 3.2.

Výraz (3.3) ze kterého vycházíme při hledání polohy maximální/minimální derivace je poměrně komplikovaný a to se jedná o fuzzy systém s pouze 2 pravidly, který je prakticky nepoužitelný. V kapitole 3.1.2 se pokusíme o analýzu fuzzy systému 3 pravidly.

3.2.2 Analýza fuzzy SISO systému s 3 pravidly

Mějme tedy fuzzy systém (viz kap. 3.1) se třemi funkcemi příslušnosti μ_{A^1}, μ_{A^2}, μ_{A^3} se středy $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ takovými, že $\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \bar{x}_3$ a zároveň $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = \bar{x}_3 - \bar{x}_2 = \Delta x$. Dále definujme množinu U jako interval $\langle \bar{x}_1, \bar{x}_3 \rangle$. Takový fuzzy systém můžeme zapsat ve tvaru

$$f(x) = \frac{\bar{y}^1 \mu_{A^1}(x) + \bar{y}^2 \mu_{A^2}(x) + \bar{y}^3 \mu_{A^2}(x)}{\mu_{A^1}(x) + \mu_{A^2}(x) + \mu_{A^3}(x)} \quad (3.12)$$

Označme $\bar{y}^2 - \bar{y}^1 = \Delta y_1$ a $\bar{y}^3 - \bar{y}^2 = \Delta y_2$. Pro velikost první derivace dostáváme po upravení vztah

$$\frac{df}{dx} = \frac{2\Delta x}{\sigma^2} \cdot \frac{[\mu_{A^1}(x)\mu_{A^2}(x)\Delta y_1 + \mu_{A^2}(x)\mu_{A^3}(x)\Delta y_2 + 2\mu_{A^1}(x)\mu_{A^3}(x)(\Delta y_1 + \Delta y_2)]}{\left(\mu_{A^1}(x) + \mu_{A^2}(x) + \mu_{A^3}(x)\right)^2} \quad (3.13)$$

Pokud bude splněna podmínka, že $\Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y$, bude velikost první derivace zobrazení popisujícího fuzzy systém (3.12) přímo úměrná velikosti Δy. Opět zkusíme určit velikost a polohu maximální/minimální derivace. Řešení tohoto problému vede opět na výpočet druhé derivace původního zobrazení popisující fuzzy systém (3.12), která je

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f_1 + f_2 + f_3 \quad (3.14)$$

kde

$$f_1 = \frac{4\Delta y_1 \Delta x \left(\mu_{A^1}^2(x)\mu_{A^2}(x) - \mu_{A^1}(x)\mu_{A^2}^2(x) - 3\mu_{A^1}(x)\mu_{A^2}(x)\mu_{A^3}(x)\right)}{\sigma^4\left(\mu_{A^1}(x) + \mu_{A^2}(x) + \mu_{A^3}(x)\right)^3}$$

$$f_2 = \frac{8(\Delta y_1 + \Delta y_2)\Delta x \left(2\mu_{A^2}^2(x)\mu_{A^3}(x) - 2\mu_{A^1}(x)\mu_{A^3}^2(x)\right)}{\sigma^4\left(\mu_{A^1}(x) + \mu_{A^2}(x) + \mu_{A^3}(x)\right)^3}$$

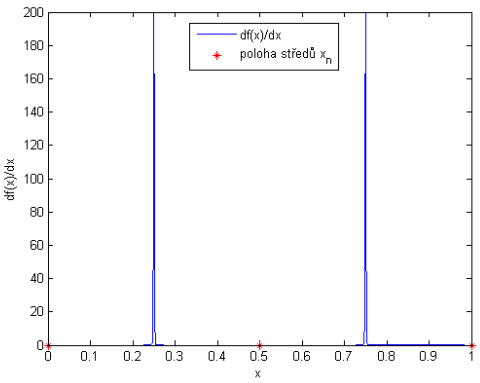
$$f_3 = \frac{4\Delta y_2 \Delta x \left(-\mu_{A^2}(x)\mu_{A^3}^2(x) - \mu_{A^2}^2(x)\mu_{A^3}(x) + 3\mu_{A^1}(x)\mu_{A^2}(x)\mu_{A^3}(x)\right)}{\sigma^4\left(\mu_{A^1}(x) + \mu_{A^2}(x) + \mu_{A^3}(x)\right)^3}$$

Pro bod, který může být extrémem $\frac{df}{dx}$ platí:

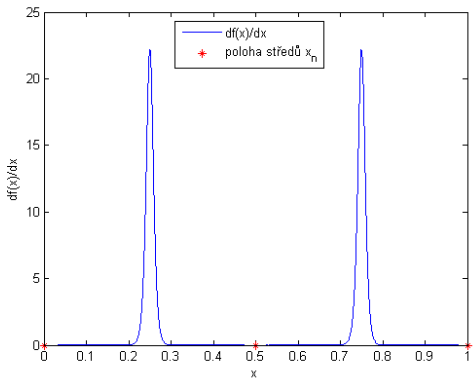
$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$$

Vzhledem ke složitosti výrazu (3.14) se žádné jiné informace o poloze dalších extrémů nepodařilo zjistit.

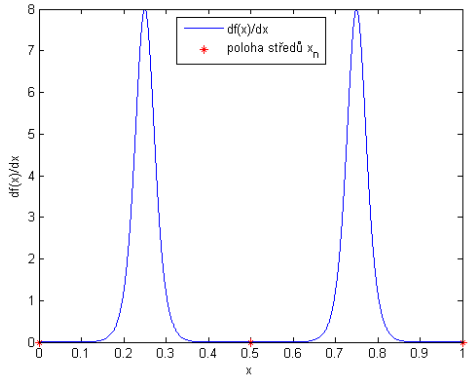
Typické průběhy první derivace zobrazení popisujícího fuzzy systém (3.12) jsou pro různé parametry σ znázorněny na obrázcích 3.7 – 3.13 níže. Další parametry fuzzy systému jsou $\bar{x}_1 = 1,\ \bar{x}_2 = 2,\ \bar{x}_3 = 3, \bar{y}^1 = 1, \bar{y}^2 = 2\ , \bar{y}^3 = 3.$



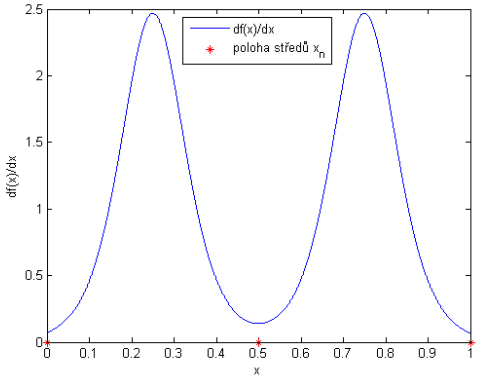
Obr. 3.7 Parametr $\sigma = 0{,}05$



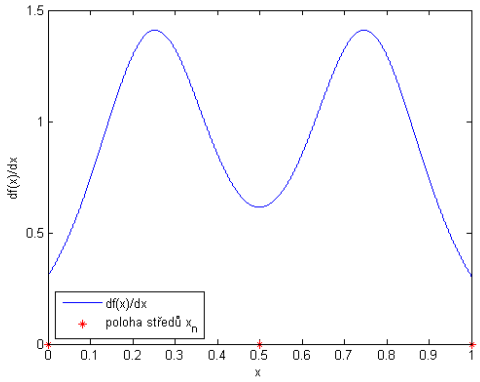
Obr. 3.8 Parametr $\sigma = 0{,}15$



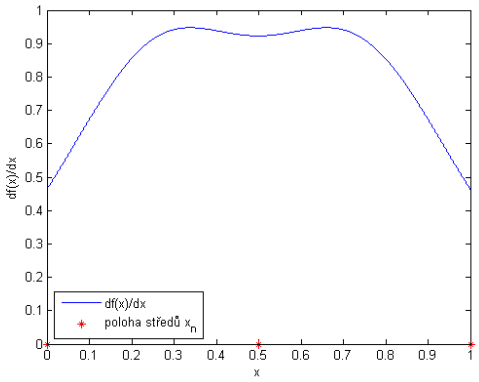
Obr. 3.9 Parametr $\sigma = 0{,}25$



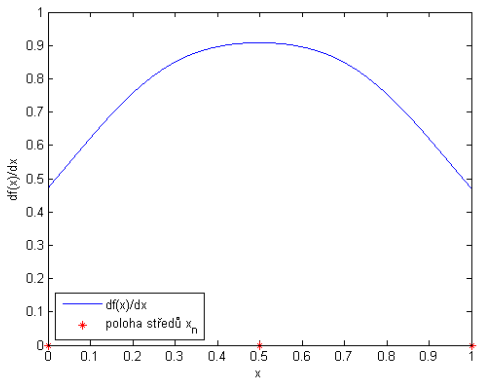
Obr. 3.10 Parametr $\sigma = 0{,}45$



Obr. 3.11 Parametr $\sigma = 0{,}6$



Obr. 3.12 Parametr $\sigma = 0{,}8$



Obr. 3.13 Parametr $\sigma = 0{,}9$

Z obrázků 3.7 – 3.13 zobrazených výše se zdá, že lokální maxima nastávají vždy mezi dvěma sousedními středy $\bar{x}_i$, $\bar{x}_{i+1}$. Numericky bylo ověřeno (a vzhledem k symetrii funkcí příslušnosti to lze předpokládat), že velikosti obou extrémů jsou přibližně stejné (resp. numericky zjištěný rozdíl mezi nimi je $< 10^{-18}$) a že jejich polohy se symetricky s rostoucím parametrem σ přibližují blíže ke středu intervalu $\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle$. Vzdálenost numericky nalezené polohy od předpokládané polohy maxima (předpokládaná poloha i-tého maxima je $\frac{\bar{x}_i + \bar{x}_{i+1}}{2}$) označíme $\tilde{x}$. Rozdíl mezi předpokládanou hodnotou první derivace (hodnota první derivace v bodě, ve kterém předpokládáme, že se nalézá lokální maximum) a maximální hodnotou určenou numericky označíme $\tilde{f}$. V tabulce 3.1 jsou uvedeny hodnoty $\tilde{x}$ a $\tilde{f}$ pro jednotlivé parametry σ.

$\boldsymbol{\sigma}$	$\tilde{\boldsymbol{x}}$	$\tilde{\boldsymbol{f}}$
0,05	$3{,}5 \cdot 10^{-11}$	$< 10^{-14}$
0,15	$1{,}2 \cdot 10^{-10}$	$< 10^{-14}$
0,25	$8{,}5 \cdot 10^{-10}$	$< 10^{-14}$
0,45	$4{,}68 \cdot 10^{-5}$	$1{,}32 \cdot 10^{-7}$
0,6	$6{,}4 \cdot 10^{-3}$	$4{,}25 \cdot 10^{-4}$
0,8	$1{,}78 \cdot 10^{-1}$	$3{,}55 \cdot 10^{-2}$

Tabulka 3.1 Chyba polohy a velikost maximální derivace oproti předpokladu

Přesnost při určování polohy maximální derivace je· 10^{-12}. Z tabulky 3.1 je zřejmé, že i pro velkou hodnotu parametru $\sigma = 0{,}8$ dosáhne chyba při určení hodnoty maximální derivace s využitím předpokládané polohy velikosti $3{,}55 \cdot 10^{-2}$ (chyba 3%), což je pro praktické použití stále dostačující, zvláště vezmeme-li v úvahu, že apriorní informace o požadované maximální/minimální hodnotě první derivace může být značně neurčitá. Pro

příliš velké hodnoty parametru σ jsou aktivována všechna 3 pravidla fuzzy systému s téměř stejnou vahou, což není žádoucí. Obrázek 3.13 je pouze ilustrační, ale je patrné, že maximum se nakonec nachází v blízkosti středu intervalu U, tato skutečnost bude ještě podrobněji rozebrána v následující podkapitole.

3.2.3 Analýza fuzzy SISO systémů s větším počtem pravidel

V podkapitolách Analýza fuzzy SISO systému s 2 pravidly (viz kap. 3.1.2) a Analýza fuzzy SISO systému s 3 pravidly (viz kap. 3.1.2) jsem se pokusil vyřešit problém polohy a velikosti první derivace fuzzy systému analyticky. Výsledné výrazy však byly natolik složité, že jejich analytické řešení se nepodařilo nalézt. V této kapitole jsou z hlediska polohy maximální a minimální hodnoty první derivace prozkoumány fuzzy systémy se sudým a lichým počtem pravidel.

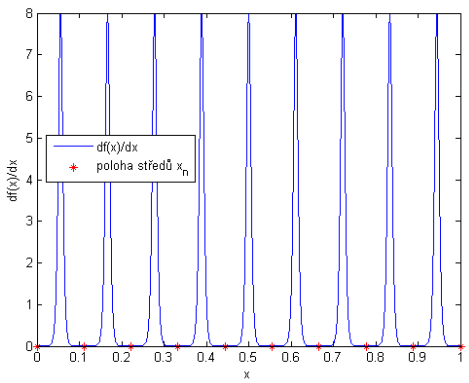
a) Sudý počet pravidel (*N=10)*

Mějme SISO fuzzy systém (viz kap. 3.1) s deseti gaussovskými funkcemi příslušnosti $\mu_{A^1}, \dots, \mu_{A^{10}}$ se středy $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{10}$ takovými, že $\bar{x}_1 = 1, \dots, \bar{x}_1 = 10$. Dále definujme množinu U jako interval $\langle \bar{x}_1, \bar{x}_{10} \rangle$. Tento fuzzy systém můžeme zapsat ve tvaru

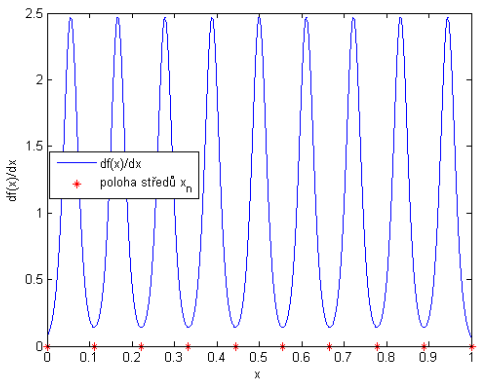
$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^{10} \bar{y}^l \mu_{A^l}(x)}{\sum_{l=1}^{10} \mu_{A^l}(x)}, x \in U \quad (3.15)$$

kde $\bar{y}^1 = 1, \dots, \bar{y}^{10} = 10$.

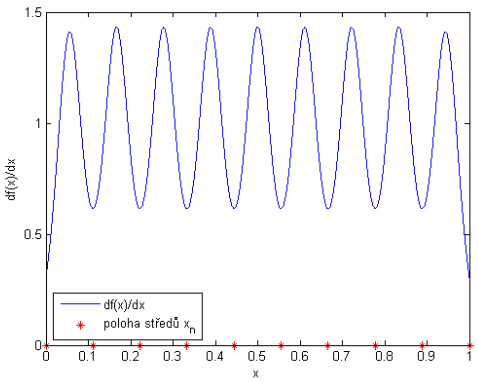
Typické průběhy první derivace funkce popisující fuzzy systém (3.15) jsou pro různé parametry σ znázorněny na obrázcích níže.



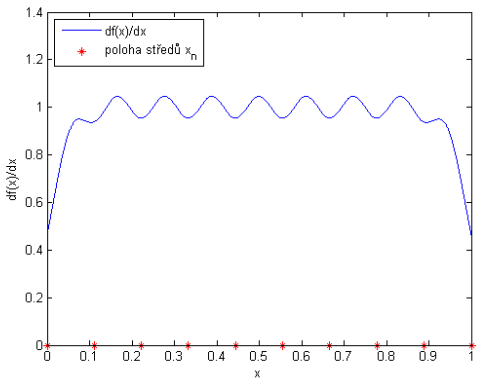
Obr. 3.14 Parametr $\sigma = 0{,}25$



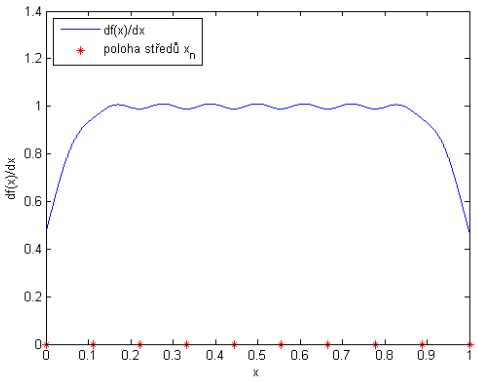
Obr. 3.15 Parametr $\sigma = 0{,}45$



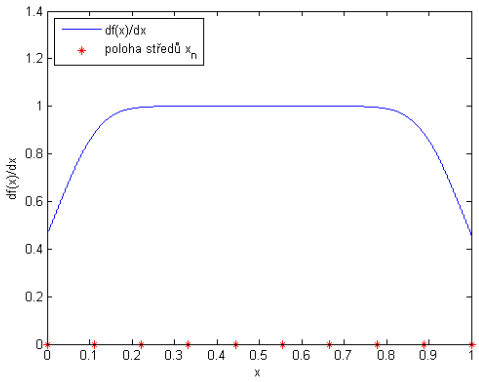
Obr. 3.16 Parametr $\sigma = 0{,}6$



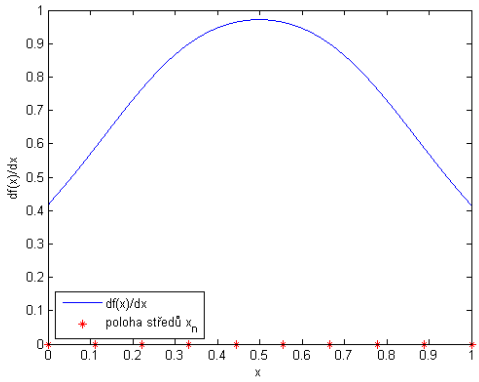
Obr. 3.17 Parametr $\sigma = 0{,}8$



Obr. 3.18 Parametr $\sigma = 0{,}9$



Obr. 3.19 Parametr $\sigma = 1{,}1$



Obr. 3.20 Parametr $\sigma = 2{,}4$

S využitím výše zobrazených výsledků bylo numericky zjištěno, že maximum nacházející se ve středu intervalu U je globálním maximem (pozn. velikost maxima ovlivňuje symetrie funkcí příslušnosti, uprostřed intervalu U jsou všechny funkce příslušnosti symetrické). Vzhledem k tomu, že ve středu intervalu U se nachází globální maximum vždy, můžeme získat maximální hodnotu derivace fuzzy systému (3.15) výpočtem hodnoty první derivace v tomto bodě. Dále bylo zjištěno, že minimální hodnota první derivace fuzzy systém (3.15)

na intervalu U se nachází v krajních bodech tohoto intervalu, tedy v bodech $\bar{x}_1, \bar{x}_{10}$. Těchto poznatků využijeme při odvození podmínek pro omezení velikosti první derivace výsledného fuzzy systému.

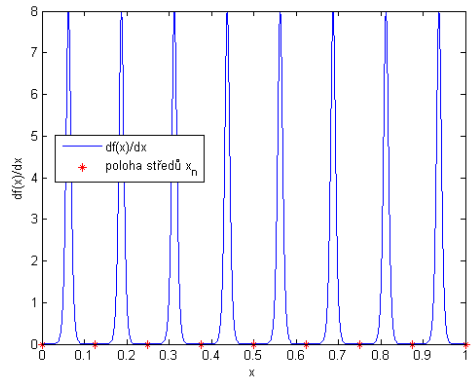
b) Lichý počet pravidel

Mějme SISO fuzzy systém (viz kap. 3.1) s devíti gaussovskými funkcemi příslušnosti $\mu_{A^1}, \dots, \mu_{A^{10}}$ se středy $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{10}$ takovými, že $\bar{x}_1 = 1, \dots, \bar{x}_1 = 9$. Dále definujme množinu U jako interval $\langle \bar{x}_1, \bar{x}_9 \rangle$. Tento fuzzy systém můžeme zapsat ve tvaru

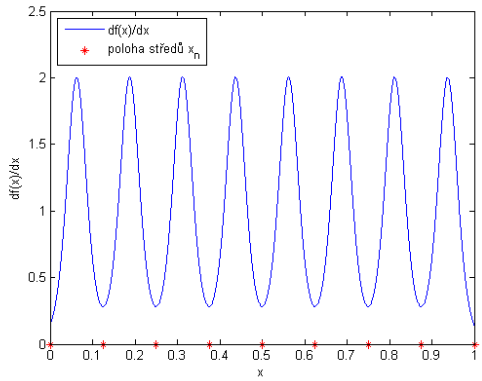
$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^{9} \bar{y}^l \mu_{A^l}(x)}{\sum_{l=1}^{9} \mu_{A^l}(x)}, x \in U \quad (3.16)$$

kde $\bar{y}^1 = 1, \dots, \bar{y}^9 = 9$.

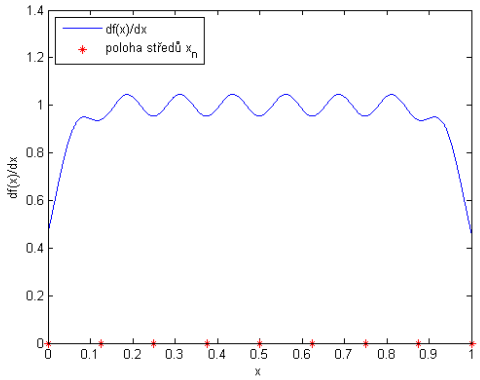
Typické průběhy první derivace funkce popisující fuzzy systém (3.16) jsou pro různé parametry σ znázorněny na obrázcích níže.



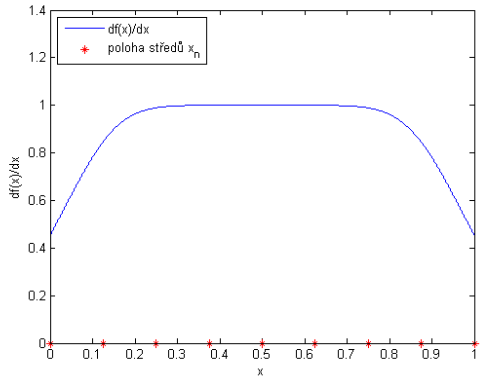
Obr. 3.21 Parametr $\sigma = 0{,}25$



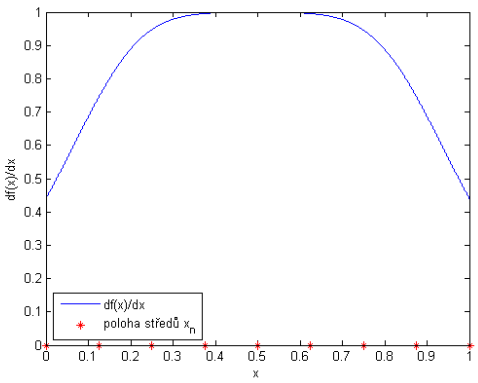
Obr. 3.22 Parametr $\sigma = 0{,}5$



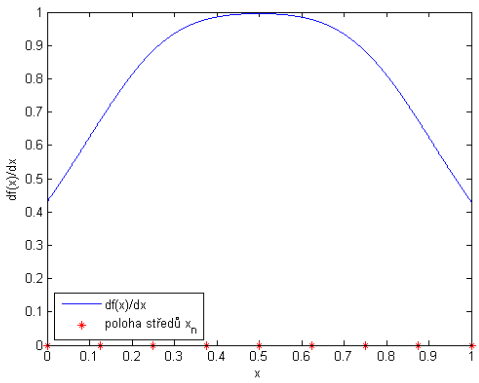
Obr. 3.23 Parametr $\sigma = 0{,}8$



Obr. 3.24 Parametr $\sigma = 1{,}2$



Obr. 3.25 Parametr $\sigma = 1{,}5$



Obr. 3.26 Parametr $\sigma = 1{,}8$

Z obrázků se stejně jako v případě fuzzy systému s 3 pravidly (viz kap. 3.1.2) zdá, že lokální maxima nastávají vždy mezi dvěma sousedními středy $\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}$. Numericky bylo ověřeno, že velikosti obou lokálních maxim (mezi středy $\bar{x}_4, \bar{x}_5$ a $\bar{x}_5, \bar{x}_6$), vyskytujících se u středu intervalu *U* jsou na intervalu *U* maximální, že jsou přibližně stejné (resp. rozdíl mezi nimi je $< 10^{-18}$) a že jejich polohy se symetricky s rostoucím parametrem σ přibližují více ke středu intervalu $\langle \bar{x}_1, \bar{x}_9 \rangle$. Vzdálenost numericky nalezené polohy od předpokládané polohy maxima (předpokládaná poloha 5-tého maxima je $\frac{\bar{x}_5 + \bar{x}_6}{2}$) označíme $\tilde{x}$. Rozdíl mezi předpokládanou hodnotou první derivace (hodnota první derivace v bodě, ve kterém předpokládáme, že se nalézá lokální maximum) a maximální hodnotou určenou numericky označíme $\tilde{f}$. V tabulce 3.2 jsou uvedeny hodnoty $\tilde{x}$ a $\tilde{f}$ pro jednotlivé parametry σ.

$\boldsymbol{\sigma}$	$\tilde{\boldsymbol{x}}$	$\tilde{\boldsymbol{f}}$
0,25	$1{,}1 \cdot 10^{-9}$	$< 10^{-14}$
0,5	$2{,}4 \cdot 10^{-9}$	$< 10^{-14}$
0,8	$6{,}4 \cdot 10^{-9}$	$< 10^{-14}$
1,2	$3{,}2 \cdot 10^{-2}$	$< 10^{-14}$
1,5	0,499 999 930 917	$5{,}8 \cdot 10^{-4}$
1,8	0,499 999 999 825	$3{,}7 \cdot 10^{-2}$

Tabulka 3.2 Chyba polohy a velikost maximální derivace oproti předpokladu

Z tabulky je zřejmé, že chyba při určení hodnoty maximální derivace fuzzy systému (3.16) pomocí předpokládaných poloh maxima je zanedbatelná i pro $\sigma = 1{,}2$. S dále rostoucí hodnotou parametru σ se polohy maxim postupně přemístí ke středu intervalu *U* a rozdíl mezi hodnotami lokálních maxim a minim v blízkosti středu intervalu *U* bude zanedbatelně malý. Pokud určíme v takovém případě hodnotu maximální derivace jako

hodnotu v bodě, který je středem intervalu U, bude takto vzniklá chyba určení hodnoty maximální derivace zanedbatelná ($< 10^{-14}$). Oproti menšímu počtu funkcí příslušnosti je velikost jednotlivých chyb určení hodnoty maximální derivace pro stejné parametry σ menší. Poznatky o určování polohy maximální a minimální hodnoty první derivace jsou shrnuty v následující podkapitole.

3.2.4 Poloha maximální a minimální hodnoty první derivace SISO fuzzy systému

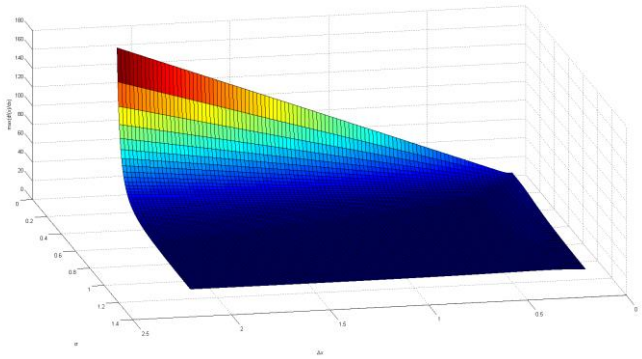
Na základě empiricky zjištěných poznatků ze všech předcházejících kapitol můžeme dojít k následujícím závěrům.

Bod, ve kterém je hodnota první derivace fuzzy systému (3.2) na intervalu U, kde $U = \langle \bar{x}_1, \bar{x}_N \rangle$, minimální, je jeden z bodů $\{\bar{x}_1, \bar{x}_N\}$. Výpočtem a porovnáním hodnoty první derivace v těchto bodech získáme bod, ve kterém je tato hodnota minimální. Označme tento bod jako x_{min}.

Bod, ve kterém je hodnota první derivace fuzzy systému (3.2) na intervalu U, kde $U = \langle \bar{x}_1, \bar{x}_N \rangle$, maximální, je jeden z bodů $\left\{\frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_N}{2} - \frac{\Delta x}{2}, \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_N}{2}, \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_N}{2} + \frac{\Delta x}{2}\right\}$. Výpočtem a porovnáním hodnoty první derivace v těchto bodech získáme bod, ve kterém je tato hodnota maximální. Označme tento bod jako x_{max}.

Chyba velikosti hodnoty maximální, resp. minimální, derivace při použití těchto bodů oproti hodnotám skutečných maxim, resp. minim, bude zanedbatelná a pro sudý počet funkcí příslušnosti nulová (viz kap. 3.2.1 až 3.2.3), protože globální maximum se v tomto případě nachází vždy v bodě $\frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_N}{2}$.

Na obrázku 3.1 níže je zobrazen graf závislosti velikosti hodnoty maximální derivace fuzzy systému (3.15) s 10 pravidly na parametrech σ a Δx.



Obr. 3.27 Velikost hodnoty maximální derivace v závislosti na parametrech σ a Δx

3.3 Odvození podmínek pro dodržení omezení velikosti první derivace

V kapitole 3.1 jsme ukázali, že pro velikost 1. derivace fuzzy systému *f(x)* platí

$$\frac{df}{dx} = \frac{\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}(\bar{y}^p - \bar{y}^q)\frac{d\mu_{A^p}(x)}{dx}\mu_{A^q}(x)}{(\sum_{l=1}^{N}\mu_{A^l}(x))^2}. \quad (3.17)$$

Protože se snažíme zajistit, aby výsledné zobrazení popisující fuzzy systém mělo omezenou velikost první derivace, můžeme skutečnosti, že velikost první derivace je přímo úměrná velikosti součtu rozdílů velikostí všech možných dvojic $\bar{y}^p, \bar{y}^q$ využít. Definujme interval $U = \langle 0,1 \rangle$, $x \in U$. Dále uvažujme $N > 1$ fuzzy množin A^l ve vstupním prostoru U s parametrem σ a se středy rovnoměrně rozmístěnými na intervalu U tak, že poloha středu $\bar{x}_1$ množiny A^1 je $\bar{x}_1 = 0$ a poloha středu $\bar{x}_N$ množiny A^N je $\bar{x}_N = 1$ a pro každé dva středy $\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}$, kde $i=1,\dots,N-1$ platí, že $\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i = \Delta x$, kde $\Delta x = (N-1)^{-1}$. Potom jediným volným parametrem při hledání omezení pro velikost první derivace jsou polohy středů množin B^l. Dále uvažujme, že pro každé dva středy $\bar{y}^i, \bar{y}^{i+1}$ množin B^l, B^{l+1} je $\bar{y}^{i+1} - \bar{y}^i = \Delta y = 1$ pro všechna $i=1,\dots,N-1$. V kapitole 3.2 jsme ukázali, kde se nacházejí hodnoty lokálních maxim, resp. minim, první derivace fuzzy systému specifikovaného v kapitole 3.1 v závislosti na sudosti/lichosti počtu funkcí příslušnosti $\mu_{A^l}(x)$. Nyní můžeme této znalosti využít při hledání podmínek omezujících velikost první derivace výsledného fuzzy zobrazení, protože pokud bude dodrženo omezení v bodech s maximální/minimální hodnotou první derivace, pak bude toto omezení dodrženo i ve všech ostatních bodech.

Označme bod, ve kterém nabývá hodnota první derivace výše specifikovaného zobrazení, popisujícího fuzzy systém, na intervalu U svého maxima jako x_{max}, a bod, ve kterém nabývá hodnota první derivace tohoto zobrazení na intervalu U svého minima jako x_{min}, viz kap. 3.2.4. Dále označme požadovanou velikost maximální hodnoty první derivace jako D_{max} a požadovanou velikost minimální hodnoty první derivace jako D_{min}. Protože velikost první derivace fuzzy systému (3.2) je přímo úměrná velikosti Δy, můžeme stanovit omezující podmínky na maximální, resp. minimální, velikost Δy výsledného fuzzy systému, které zajistí jeho omezenou velikost první derivace jako:

$$\Delta y_{max} = \frac{D_{max}}{\frac{df_{|\Delta y=1}(x_{max})}{dx}},$$

resp.

$$\Delta y_{min} = \frac{D_{min}}{\frac{df_{|\Delta y=1}(x_{min})}{dx}}.$$

Bude-li tedy splněna podmínka, že pro všechny středy $\bar{y}^i, \bar{y}^{i+1}$ výše specifikovaného fuzzy systému bude platit: $\left(\bar{y}^{i+1} - \bar{y}^i\right) \in \langle \Delta y_{min}, \Delta y_{max} \rangle$ pro všechna *i=1,...,N-1*, bude velikost první derivace zobrazení popisující výsledný fuzzy systém v intervalu $\langle D_{min}, D_{max} \rangle$. Ještě poznamenejme, že se nejedná o podmínku nutnou, ale dostačující.

4 Využití apriorní informace při identifikaci nelineárních funkcí pomocí metody nejmenších čtverců

V první části této kapitoly je popsán způsob, jakým lze využít apriorní informaci o velikosti sklonu monotónní nelineární identifikované funkce při identifikaci fuzzy systému (popsán v kap. 3.1) pomocí metody nejmenších čtverců. Teoretické poznatky k začlenění apriorní informace o velikosti maximální resp. minimální hodnoty první derivace do identifikačního algoritmu byly odvozeny v kapitole 3.3. Ve druhé části této kapitoly (kap. 4.2) jsou uvedeny výsledky identifikace, kterých bylo touto metodou dosaženo a zároveň je k dispozici porovnání s identifikací pomocí metody nejmenších čtverců bez znalosti jakékoliv apriorní informace a porovnání s metodou nejmenších čtverců s omezením na požadovanou monotonii, vycházející z [5].

4.1 Formulace problému

Základním problémem je, jak přeformulovat vztah (3.2) tak, aby byla metoda nejmenších čtverců použitelná. Proto upravíme vztah (3.2) do tvaru

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \bar{y}^{l_i} b^i(x) \quad (4.1)$$

kde

$$b^i(x) = \frac{\mu_{A^{l_i}}(x)}{\sum_{i=1}^{N} \mu_{A^{l_i}}(x)}.$$

Označíme hledaný vektor parametrů $\theta \in \mathbb{R}^N$

$$\theta = [\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^N]^T$$

a přepíšeme fuzzy systém (4.1) do tvaru

$$f(x) = b^T(x)\theta$$

kde

$$b(x) = [b^1(x), \dots, b^N(x)]^T.$$

V kapitole 3.3 jsme odvodili podmínky pro velikost maximální hodnoty Δy_{max} a pro velikost minimální hodnoty Δy_{min}, které zajistí, že první derivace výsledného zobrazení popisujícího fuzzy systém (4.1) bude v požadovaných mezích. Musí tedy platit, že

$$\Delta y_{min} \leq \Delta y_i \leq \Delta y_{max}, \qquad i = 1, \dots, N-1$$

kde $\Delta y_i = \bar{y}^{i+1} - \bar{y}^i$.

Nyní můžeme sestavit nerovnici vyjadřující požadovaná omezení na velikost Δy_{max} a Δy_{min} jako

$$C\theta \leq d, \qquad (4.2)$$

kde C je matice

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a d je vektor

$$d = [d_1 \; d_2],$$

kde $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ a

$$d_1 = [-\Delta y_{min}, \dots, -\Delta y_{min}], d_2 = [\Delta y_{max}, \dots \Delta y_{max}]$$

Definujme kvadratické kritérium

$$J = \sum_{j=1}^{p} \left[b^T(x_0^j)\theta - y_0^j \right]^2$$

kdex_0^j, y_0^j je j-tá dvojice naměřených dat vstup – výstup. Řešíme tedy problém

$$\min_{C\theta \leq d} \big(J(\theta) \big) \qquad (4.3)$$

který, pokud je takto zformulovaný, můžeme vyřešit v programu MATLAB pomocí funkce *lsqlin*. Výsledkem je vektor parametrů $\hat{\theta}$ minimalizující kritérium (4.3) a splňující omezení (4.2).

4.2 Dosažené výsledky

V této části jsou zobrazeny výsledky identifikace nelineární funkce pomocí metody nejmenších čtverců využívající apriorní informaci v podobě velikosti mezí sklonu statické převodní charakteristiky. Identifikace parametrů $\bar{y}^i$ fuzzy zobrazení ve tvaru

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^{10} \bar{y}^i \mu_i(x)}{\sum_{i=1}^{10} \mu_i(x)} \quad (4.4)$$

byla provedena s využitím vygenerovaných dat y. Tato data byly vygenerována podle následujícího předpisu

$$y(x) = \mathrm{g}(x) + e, e \sim \mathcal{N}(0; 0{,}01)$$

kde $\mathcal{N}(0; 0{,}01)$ je normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = 0$ a rozptylem $\sigma^2 = 0{,}01$ a $\mathrm{g}(x)$ je nějaká nelineární funkce. Apriorní informaci můžeme získat výpočtem hodnoty první derivace funkce $\mathrm{g}(x)$ a určením minimální a maximální hodnoty této derivace. V praxi však nelineární funkci $\mathrm{g}(x)$ většinou neznáme. Apriorní informace tak může být nepřesná a může vycházet pouze z odhadu experta.

Pro vyzkoušení identifikačního algoritmu pracujícího s touto apriorní informací, bylo vybráno více různých nelineárních funkcí $\mathrm{g}(x)$. Pro srovnání je v obrázcích zobrazen i výsledek identifikace pomocí metody nejmenších čtverců bez omezení a identifikace pomocí metody nejmenších čtverců s omezením na monotonii (viz [5]). Pro srovnání je uveden obsah plochy mezi identifikovanou nelineární funkcí a výsledným identifikovaným fuzzy zobrazením. Výpočet plochy využívá obdélníkového pravidla, podle kterého platí, že

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

Funkce g(x) je postupně volena jako $\mathrm{g}(x) = x^2, \mathrm{g}(x) = \cos(x), \mathrm{g}(x) = x\sin(x)$. Nakonec jsou jako výsledek zobrazen i experiment s identifikací nemonotónní funkce, které při odvozování podmínek pro meze velikosti první derivace nebyl brány v úvahu. Výsledky všech identifikací jsou zobrazeny dále. Použité parametry fuzzy systému (4.14) $\sigma, \Delta x$ jsou ve všech případech zvoleny jako $\sigma = 0{,}1$ a $\Delta x = 0{,}1$, přičemž pro polohu středu $\bar{x}_1$ platí, že $\bar{x}_1 = 0$. Tyto parametry byly zvoleny na základě pokusů. Všechny výsledky jsou formálně zobrazeny na intervalu $\langle 0; 1 \rangle$, ačkoliv jsou funkce identifikovány na intervalu $\langle 0; 0{,}9 \rangle$.

a) $g(x) = x^2$

Funkce $g(x) = x^2$ je na intervalu $\langle 0, 0.9 \rangle$ funkce neklesající.

Protože

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x,$$

můžeme velikost maximální derivace D_{max}určit jako

$$D_{max} = 1{,}8$$

a velikost minimální derivace D_{min} určit jako

$$D_{min} = 0$$

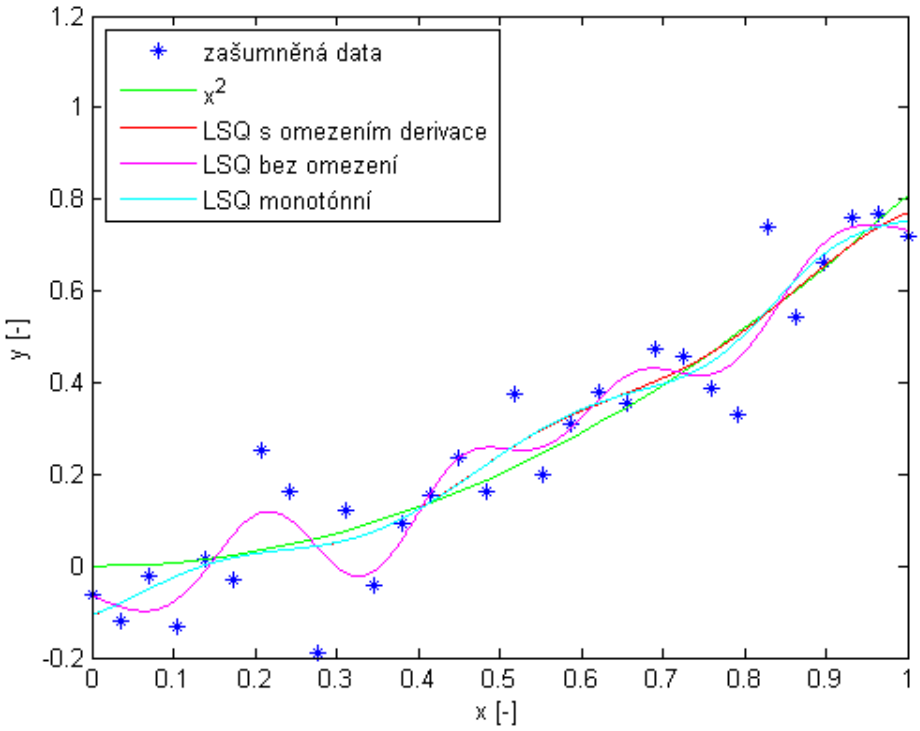
Výsledek identifikace je znázorněn na obr. 4.1. Fialový průběh je identifikace pomocí metody nejmenších čtverců bez jakýchkoliv omezení. Zelený průběh zobrazuje nezašuměnou nelineární funkci $g(x)$. Červený průběh je výsledkem identifikace pomocí metody nejmenších čtverců s omezením na velikost maximální a minimální hodnoty prv-ní derivace a světle modrý průběh je výsledkem identifikace pomocí metody nejmenších čtverců s omezením na monotonii. Jednotlivá naměřená data obsahující šum, na jejichž základě je identifikace provedena, jsou znázorněna modrou hvězdičkou.

Na obr. 4.2 jsou zobrazeny průběhy hodnot prvních derivací fuzzy zobrazení identifikovaných příslušnou metodou. Z tohoto obrázku je patrné, že algoritmus využívající apriorní informaci o velikosti maximální/minimální hodnoty sklonu identifikované nelineární funkce požadované omezení velikosti první derivace dodržuje. Z tohoto hlediska je dosaženo požadovaného výsledku.

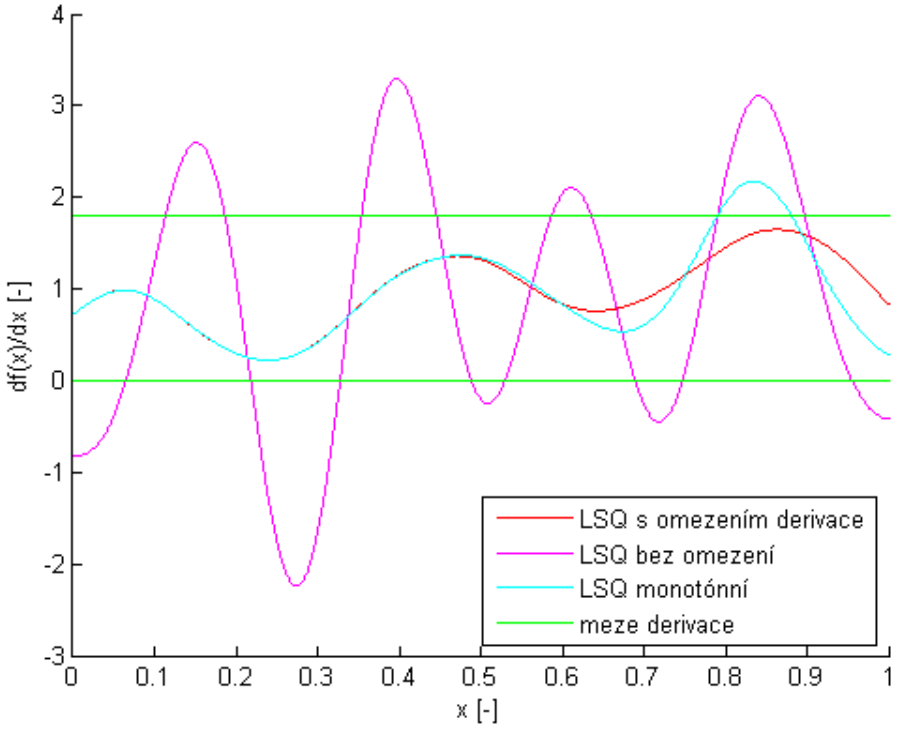
V následující tabulce 4.1 jsou srovnány velikosti ploch mezi jednotlivými identifikovanými průběhy a původní nelineární funkcí. Z tabulky 4.1 je zřejmé, že při použití algoritmu využívající apriorní informaci o velikosti minimální/maximální hodnotě první derivace je tato plocha nejmenší. Zdá se, že zpřesnění apriorní informace může vylepšit výsledky identifikace.

Způsob identifikace	**Plocha**
Omezená derivace	0,256 163 481 553
Bez omezení	0,258 695 513 752
Omezení na monotonii	0,256 459 785 595

Tabulka 4.1 Velikost ploch mezi identifikovanými průběhy a původní funkcí $g(x) = x^2$



Obr. 4.1 Výsledky identifikace funkce $g(x) = x^2$



Obr. 4.2 Výsledné průběhy první derivace při identifikaci funkce $g(x) = x^2$

b) $\mathrm{g}(x) = \cos(x)$

Funkce $\mathrm{g}(x) = \cos(x)$ je na intervalu $\langle 0, 0.9 \rangle$ funkce nerostoucí.

Protože

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\sin(x)\,, x \in U$$

můžeme velikost maximální derivace D_{max}určit jako

$$D_{max} = 0$$

a velikost minimální derivace D_{min} určit jako

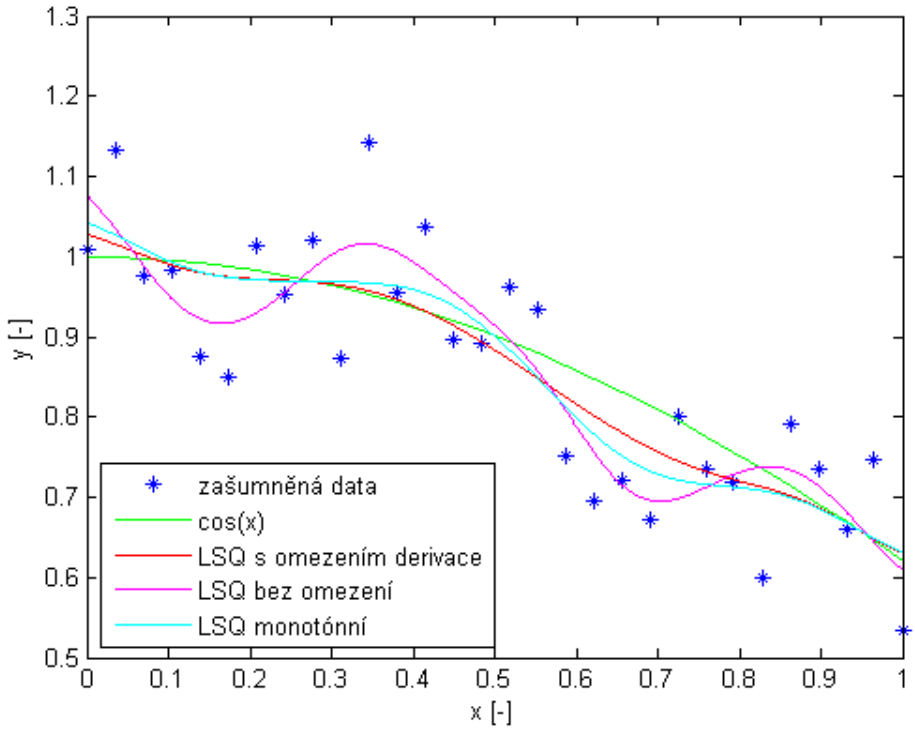
$$D_{min} \approx -0.78332$$

Výsledek identifikace je znázorněn na obr. 4.3. Na obr. 4.4 jsou zobrazeny průběhy hodnot prvních derivací fuzzy zobrazení identifikovaných příslušnou metodou.

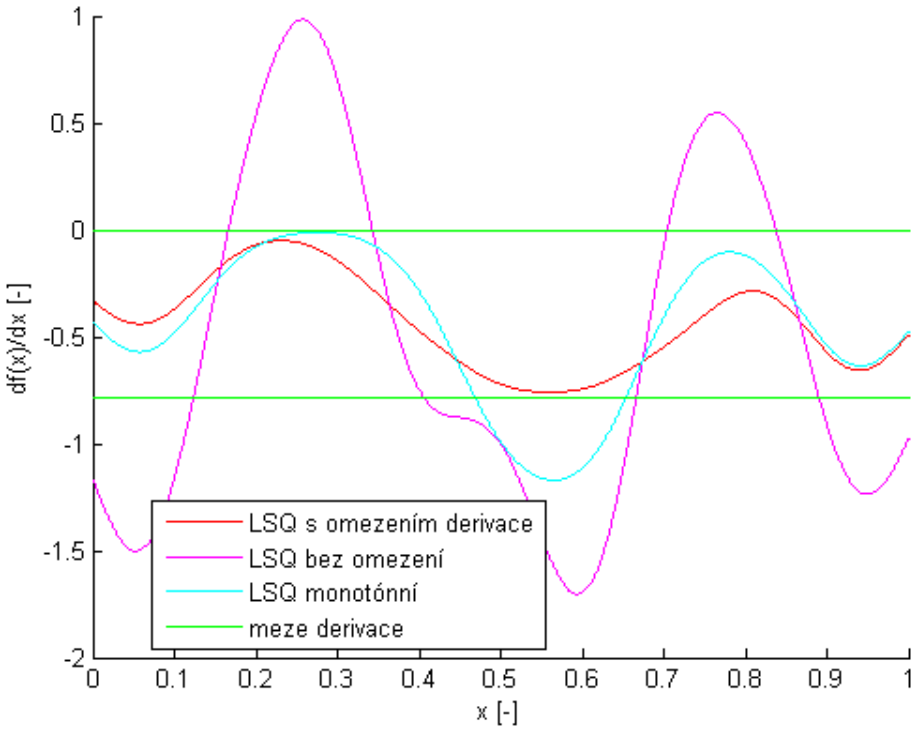
V následující tabulce 4.2 jsou velikosti ploch mezi jednotlivými identifikovanými průběhy a původní nelineární funkcí. Algoritmus využívající apriorní informaci o velikosti minimální/maximální hodnotě první derivace má velikost zmíněné plochy nejmenší.

Způsob identifikace	**Plocha**
Omezení na derivaci	0,017 001 539 181
Bez omezení	0,040 435 703 909
Omezení na monotonii	0,023 105 908 121

Tabulka 4.2 Velikost ploch mezi identifikovanými průběhy a původní funkcí $\mathrm{g}(x) = \cos(x)$



Obr. 4.3 Výsledky identifikace funkce $g(x) = \cos(x)$



Obr. 4.4 Výsledné průběhy první derivace při identifikaci funkce $g(x) = \cos(x)$

c) $g(x) = x\sin(x)$

Funkce $g(x) = x\sin(x)$ je na intervalu $\langle 0, 0.9\rangle$ funkce nerostoucí.

Protože

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \sin(x) + x\cos(x)\,, x \in U$$

můžeme velikost maximální derivace D_{max}určit jako

$$D_{max} \approx 1{,}3429$$

a velikost minimální derivace D_{min} určit jako

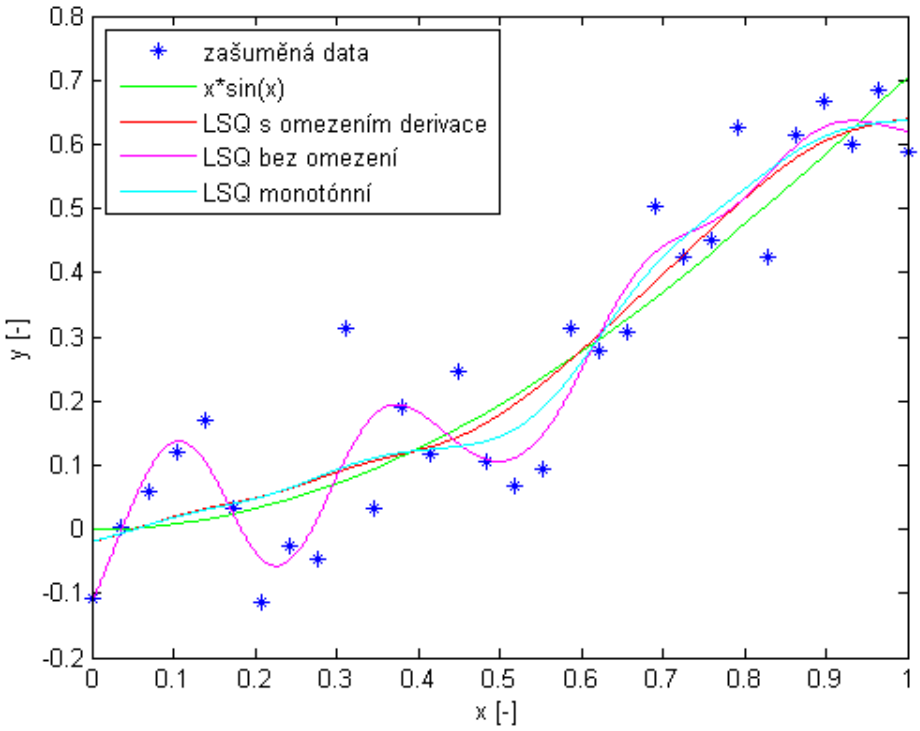
$$D_{min} = 0$$

Výsledek identifikace je znázorněn na obr. 4.5. Na obr. 4.6 jsou zobrazeny průběhy hodnot prvních derivací fuzzy zobrazení identifikovaných příslušnou metodou.

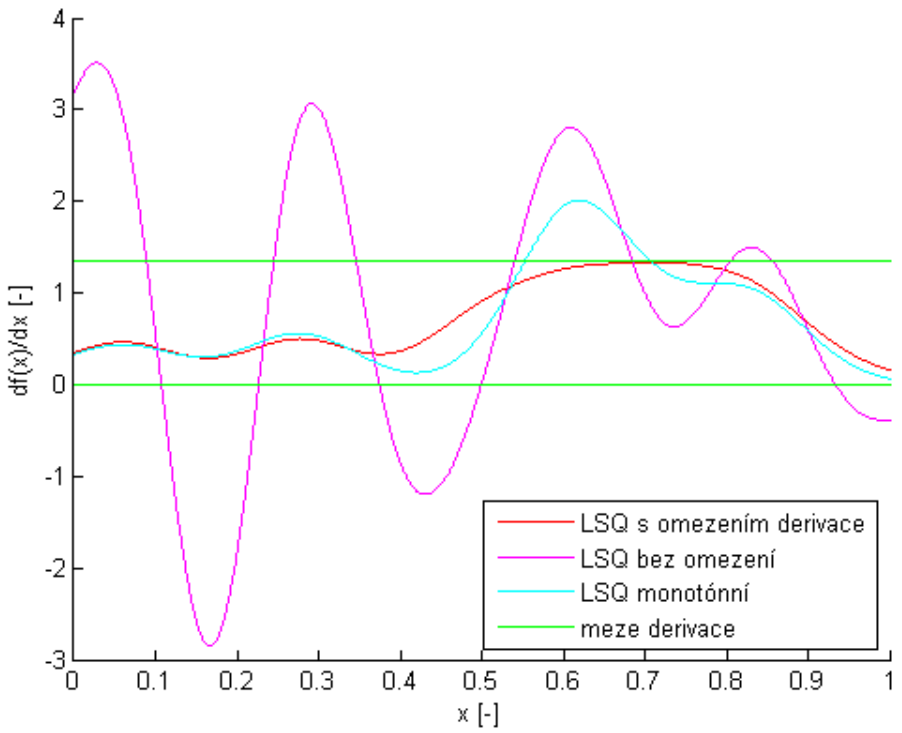
V následující tabulce 4.3 jsou srovnány rozdíly ploch, mezi jednotlivými identifikovanými průběhy a původní nelineární funkcí, z kterých je patrné, že při použití algoritmu využívající apriorní informaci o velikosti minimální/maximální hodnotě první derivace je tato plocha nejmenší.

Způsob identifikace	**Rozdíl ploch**
Omezení na derivaci	0,016 064 250 379
Bez omezení	0,051 661 924 051
Omezení na monotonii	0,025 220 665 461

Tabulka 4.3 Velikost ploch mezi identifikovanými průběhy a původní funkcí $g(x) = x\sin(x)$



Obr. 4.5 Výsledky identifikace funkce $g(x) = x\sin(x)$



Obr. 4.6 Výsledné průběhy první derivace při identifikaci funkce $g(x) = x\sin(x)$

Často se ale může stát, že přesné hodnoty mezí první derivace nebudou známy. Můžeme mít k dispozici pouze informaci, že identifikovaná funkce je neklesající, a že odhadovaná maximální hodnota derivace D_{max} je např. $D_{max} = 1{,}5$.

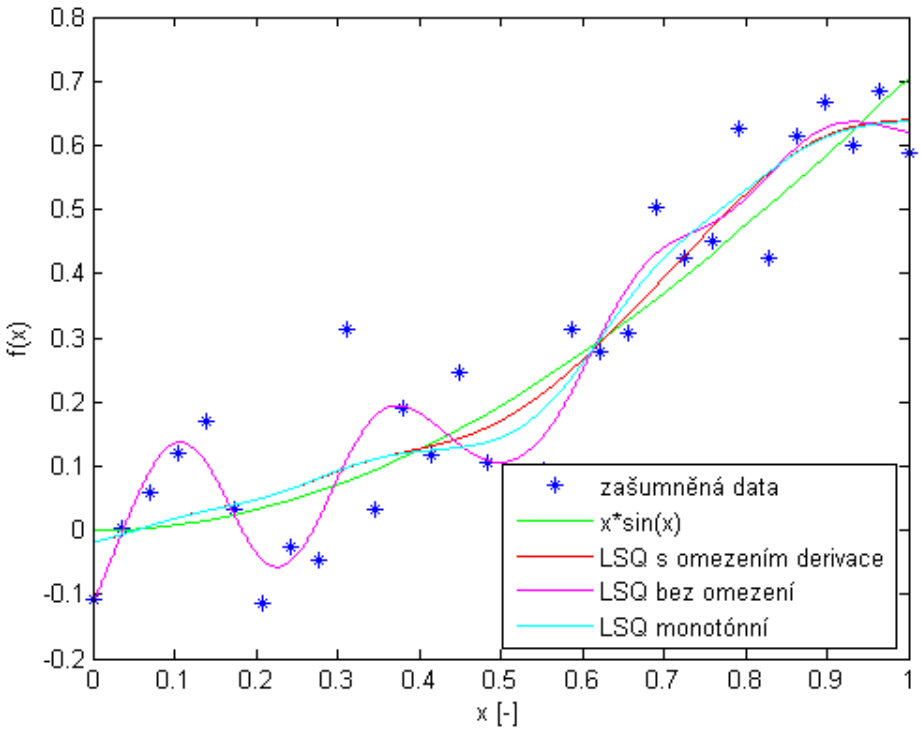
Výsledek identifikace je znázorněn na obr. 4.7. Na obr. 4.8 jsou zobrazeny průběhy hodnot prvních derivací fuzzy zobrazení identifikovaných příslušnou metodou.

V následující tabulce 4.4 jsou srovnány rozdíly ploch, mezi jednotlivými identifikovanými průběhy a původní nelineární funkcí, z kterých je patrné, že při použití algoritmu využívající apriorní informaci o velikosti minimální/maximální hodnotě první je tato plocha nejmenší.

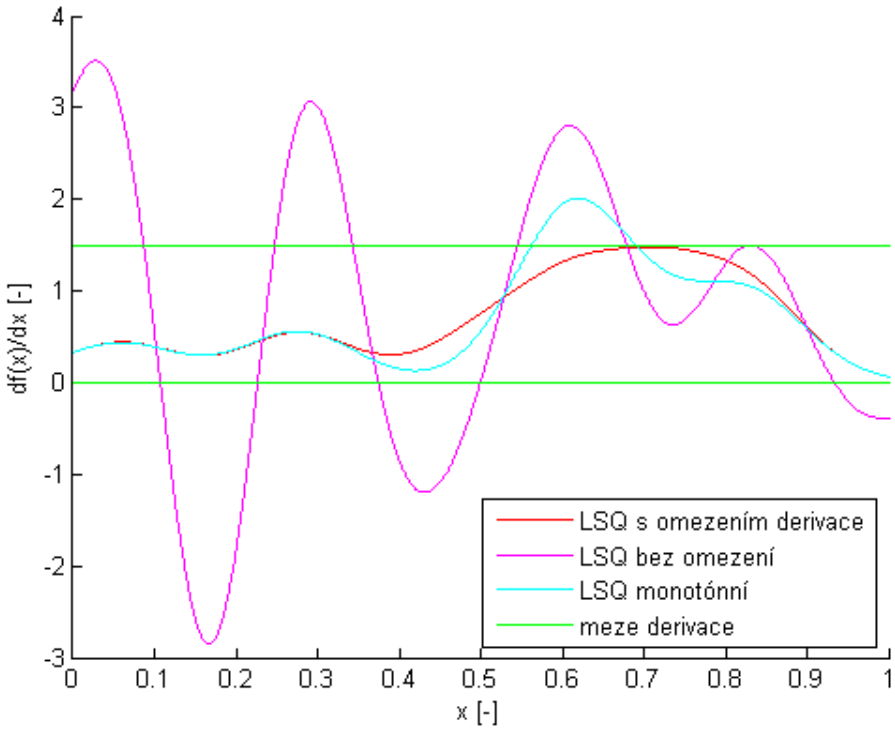
Způsob identifikace	**Rozdíl ploch**
Omezení na derivaci	0,018 439 733 653
Bez omezení	0,051 670 191 103
Omezení monotonii	0,025 220 665 461

Tabulka 4.4 Velikost ploch mezi identifikovanými průběhy a původní funkcí $g(x) = x\sin(x)$

Oproti případu, kdy máme k dispozici přesnou hodnotu derivace se tato plocha zvětšila o 14% a i hodnota maximální derivace se přiblížila méně přesné mezi.



Obr. 4.7 Výsledky identifikace funkce $g(x) = x\sin(x)$ s nepřesnou apriorní informací



Obr. 4.8 Výsledné průběhy první derivace při identifikaci funkce $g(x) = x\sin(x)$ s nepřesnou apriorní informací

d) $g(x) = \tanh(x)$

Funkce $g(x) = \tanh(x)$je na intervalu $\langle 0, 0.9 \rangle$ funkce neklesající.

Uvažujme, že máme k dispozici odhady maximální resp. minimální hodnoty derivace jako

$$D_{max} = 1$$

resp.

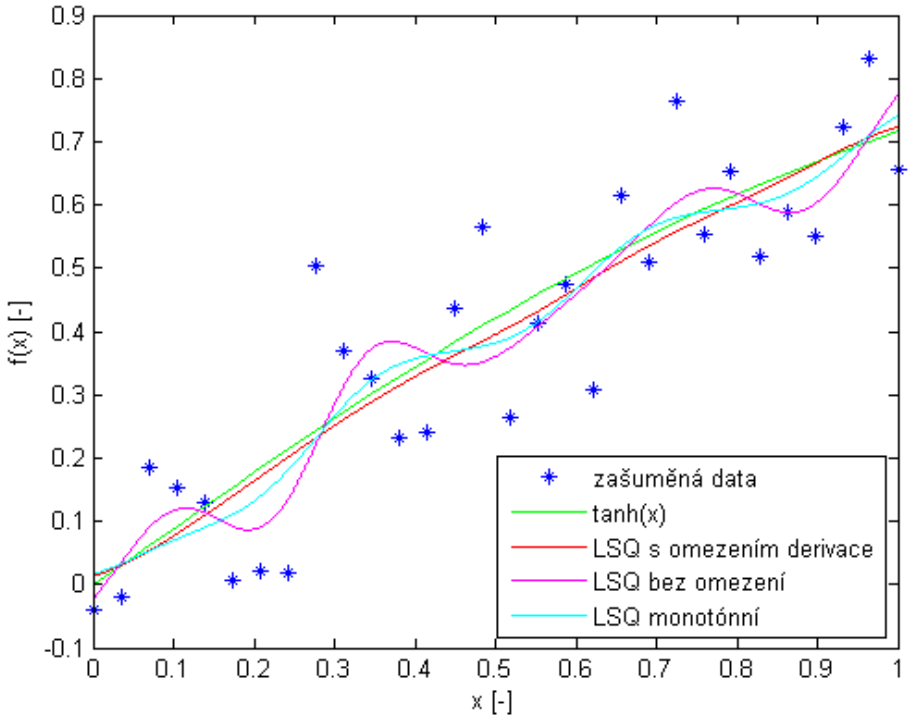
$$D_{min} = 0{,}3$$

Výsledek identifikace je znázorněn na obr. 4.9. Na obr. 4.10 jsou zobrazeny průběhy hodnot prvních derivací fuzzy zobrazení identifikovaných příslušnou metodou.

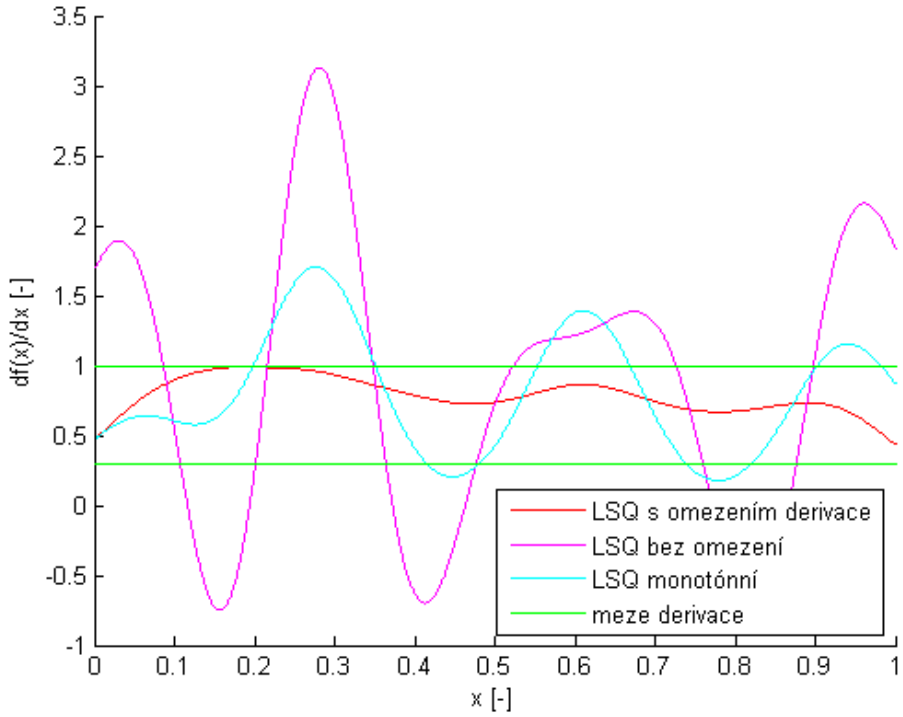
V následující tabulce 4.5 jsou srovnány rozdíly ploch, mezi jednotlivými identifikovanými průběhy a původní nelineární funkcí, z kterých je patrné, že při použití algoritmu využívající apriorní informaci o velikosti minimální/maximální hodnotě první derivace je tato plocha nejmenší.

Způsob identifikace	**Rozdíl ploch**
Omezení na derivaci	0,013 617 431 594
Bez omezení	0,034 123 594 847
Omezení na monotonii	0,018 981 935 367

Tabulka 4.5 Velikost ploch mezi identifikovanými průběhy a původní funkcí $g(x) = \tanh(x)$



Obr. 4.9 Výsledky identifikace funkce $g(x) = \tanh(x)$ s nepřesnou apriorní informací



Obr. 4.10 Výsledné průběhy první derivace při identifikaci funkce $g(x) = \tanh(x)$ s nepřesnou apriorní informací

e) $g(x) = -(x - 0{,}5)^2$

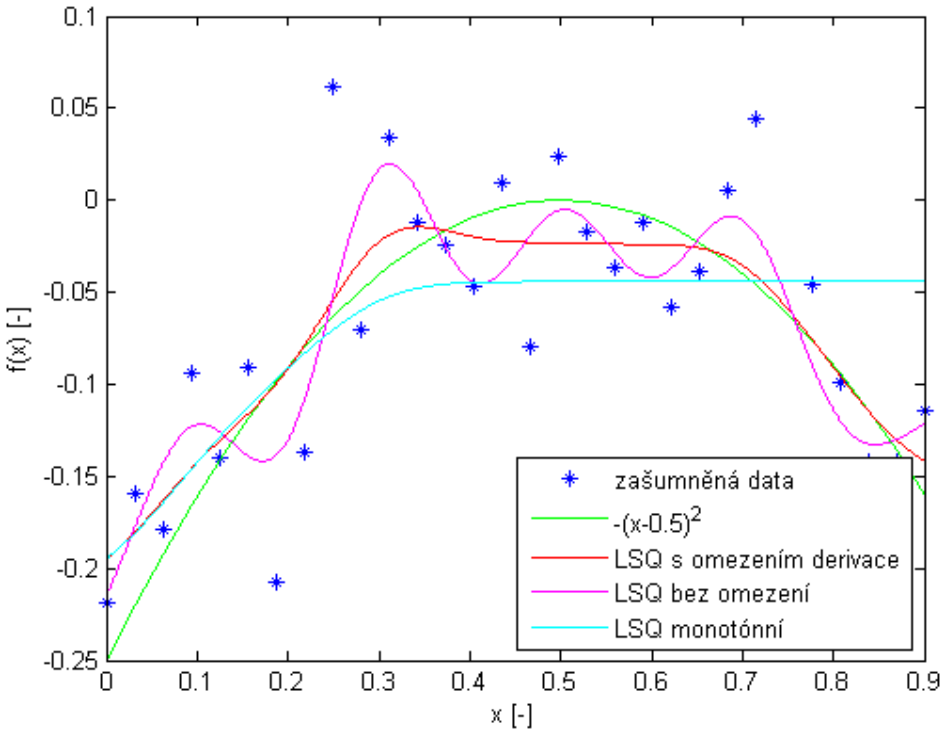
Funkce $g(x) = -(x - 0{,}5)^2$ je na intervalu $\langle 0, 0.9 \rangle$ funkce nemonotónnní. Vzhledem k tomu, že algoritmus pracující s omezením první derivace nebyl navržen pro nemonotónní funkce, jedná se o výsledek pouze experimentální. Velikost maximální derivace D_{max} určíme jako

$$D_{max} = 1$$

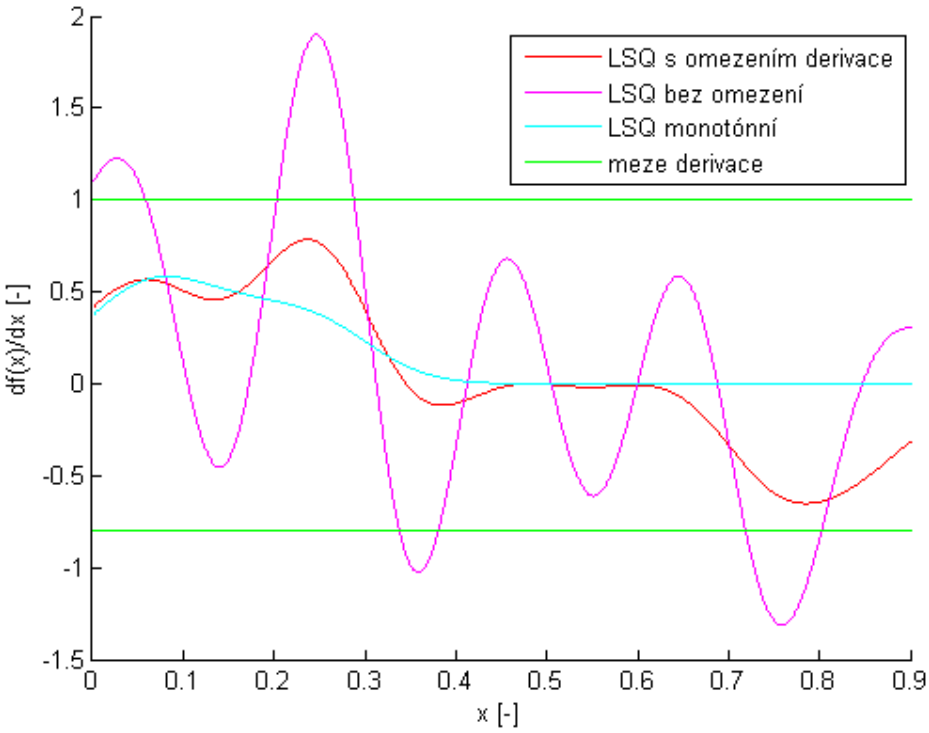
a velikost minimální derivace D_{min} určíme

$$D_{min} = -0{,}8$$

Výsledek identifikace je znázorněn na obr. 4.11. Na obr. 4.12 jsou zobrazeny průběhy hodnot prvních derivací fuzzy zobrazení identifikovaných příslušnou metodou.



Obr. 4.11 Výsledky identifikace funkce $g(x) = -(x - 0{,}5)^2$



Obr. 4.12 Výsledné průběhy první derivace při identifikaci funkce $g(x) = \tanh(x)$

Z obrázků 4.11 a 4.12 je patrná nepoužitelnost algoritmu využívající monotonii, což lze vzhledem k tomu, že identifikujeme nemonotónní funkci předpokládat.. Algoritmus využívající omezení maximálních resp. minimálních hodnot první derivace v tomto případě identifikoval nelineární nemonotónní funkci poměrně dobře, ale jedná se pouze o experimentální výsledek.

5. Závěr

Cílem této diplomové práce bylo využití apriorní informace v podobě maximální/minimální hodnoty sklonu identifikované monotónní nelineární funkce při identifikaci fuzzy systému s jedním vstupem a jedním výstupem tak, aby výsledný identifikovaný systém toto omezení splňoval.

Nejprve byla provedena analýza monotónního zobrazení popisující fuzzy systém s jedním vstupem a jedním výstupem s obecným počtem (N) funkcí příslušnosti. Na základě této analýzy se podařilo nalézt pouze 1 bod, ve kterém může nabývat první derivace zobrazení, popisující fuzzy systém s jedním vstupem a jedním výstupem, svých maximálních, resp. minimálních, hodnot za předpokladů specifikovaných v kap. 3.2. Dále bylo zjištěno, že pokud pro každé dva sousední středy $\bar{y}^l, \bar{y}^{l+1}$, kde $l = 1, \dots, N-1$, platí, že $\bar{y}^{l+1} - \bar{y}^l = \Delta y$, je velikost těchto hodnot lineárně závislá na velikosti Δy.

Jelikož se z analýzy zobrazení, popisující fuzzy systém s obecným počtem funkcí příslušnosti, nepodařilo vzhledem ke složitosti analyticky zjistit, kde se nalézají všechny maximální a minimální hodnoty první derivace na nějakém intervalu, byla provedena podrobnější analýza zobrazení popisující fuzzy systém s dvěma funkcemi příslušnosti a zobrazení popisující fuzzy systém s třemi funkcemi příslušnosti. Při ní se podařilo empiricky zjistit, kde se tyto hodnoty nalézají. Ověření těchto závěrů bylo empiricky provedeno pro 9 a 10 funkcí příslušnosti, přičemž byly pro některé hodnoty parametrů fuzzy zobrazení určeny i chyby velikosti hodnoty maximální derivace, které s využitím empiricky získaných poloh vzniknou. Velikosti těchto chyb byly zanedbatelně malé a tak bylo možné empiricky získané polohy maximální a minimální hodnoty první derivace fuzzy systému využít.

S využitím lineární závislosti velikosti první derivace na velikosti Δy a se znalostí polohy maximální a minimální hodnoty první derivace bylo tedy možné určit velikosti Δy_{min} a Δy_{max} tak, aby výsledné zobrazení, popisující fuzzy systém splňovalo požadované omezení na hodnotu minimální a maximální derivace.

Vzhledem k lineární závislosti velikosti první derivace na velikosti Δy bylo možné vyřešit problém identifikace fuzzy systému, s předem zvolenými funkcemi příslušnosti, pomocí metody nejmenších čtverců s omezením na velikost Δy_{min} a Δy_{max}, přičemž optimalizovanými parametry byly polohy středů $\bar{y}^l$. Touto metodou bylo identifikováno několik různých monotónních nelineárních funkcí. Výsledný identifikovaný systém byl srovnán se systémy identifikovanými jednorázovou metodou nejmenších čtverců a se systémy identifikovanými metodou nejmenších čtverců, využívající apriorní informaci v podobě monotonie identifikované funkce (popsán v [5]). V porovnání s těmito metodami

dodržuje navržený algoritmus požadované omezení na hodnotu maximální resp. minimální hodnoty první derivace a z hlediska minimální velikosti plochy mezi identifikovaným průběhem a původní nelineární funkcí dosahuje nejlepších výsledků. Dále byl vyzkoušen i vliv přesnosti apriorní informace na kvalitu identifikace, kdy při zhoršující se přesnosti apriorní informace se zhoršovaly i výsledky identifikace. Na závěr byl pro zajímavost proveden experiment s identifikací nemonotónní nelineární funkce, přestože byl identifikační algoritmus navržen pro monotónní nelineární funkce.

5.1 Náměty k další práci a zkoumání

S přihlédnutím k tomu, že se tato práce zabývá pouze identifikací fuzzy systému s jedním vstupem a jedním výstupem, bylo by zajímavé ověřit, zda-li jsou poznatky o významu a poloze maximální, resp. minimální, hodnoty první derivace fuzzy systému platné i pro fuzzy systémy s více vstupy. Dále by bylo zajímavé podrobněji analyzovat vztah pro velikost druhé derivace a rigorózně dokázat, jaký typ extrému první derivace se bude nacházet uprostřed intervalu U a jak to souvisí s počtem funkcí příslušnosti.

Použitá literatura

[1] Wu C. Z. et. l.: A general purpose fuzzy controller for monotone functions, Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on 26 (5), (1996).

[2] Li-Xin Wang: A Course in Fuzzy Systems and Control, Prentice-Hall PTR, Englewood Cliffs, NJ, (1997).

[3] Hoeppner F. et al.: Fuzzy cluster analysis, John Wiley & Sons LTD, (2000).

[4] Ljung L., Lindskog P.: Ensuring monotonic gain characteristics in estimated models by fuzzy model structures, Automatica 36: 311-317, (2000).

[5] Jin Myung Won, Sang Y. Park, Jin S. Lee: Parameter conditions for monotonic Takagi-Sugeno-Kang fuzzy system. Fuzzy Sets and Systems 132(2): 135-146,(2002).

[6] Kai Meng Tay et al.: On monotonic sufficient conditions of fuzzy inference systems and their applications, Int. J. Unc. Fuzz. Knowl. Based Syst. 19, 731 (2011).

Obsah přiloženého CD

/pdf: adresář s diplomovou prací ve formátu PDF

/kody: adresář s vytvořenými zdrojovými kódy