

**České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta elektrotechnická**

Kybernetika a měření



**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

**Porovnání modulační metody ZePoC  
a optimální PWM**

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta elektrotechnická

katedra řídicí techniky

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: **Michal Vykouk**

Studijní program: Elektrotechnika a informatika (bakalářský), strukturovaný  
Obor: Kybernetika a měření

Název tématu: **Porovnání modulačních metod ZePoC a optimální PWM**

Pokyny pro vypracování:

Cílem práce je porovnat modulační metody Zero Position Coding (ZePoC) a optimální pulsně šířkovou modulaci (PWM). Jedná se o nové modulační metody, které jsou odvozeny z odlišných základů, ale přesto jsou si v určitých znacích velmi podobné. Obě metody mají stejný výsledek - vhodnou transformací dokáží vstupní signál převést na PWM signál a přitom zaručit libovolný odstup užitečného spektra od pásma nežádoucích vyšších harmonických.

1. Nastudujte si matematické odvození obou metod a pokuste se je srovnat
  2. Naprogramujte metodu ZePoC
  3. Proveďte simulace obou metod a porovnejte je
- Algoritmus pro řešení optimálního PWM dodá vedoucí tématu.

Seznam odborné literatury:

Streitenberger M. - Bresch H. - Mathis W. - Felgenhauer F.: Zero Position Coding (ZePoC) - A Generalised Concept of Pulse-Length Modulated Signals and its Application to Class-D Audio Power Amplifiers. Journal of the Audio Engineering Society, 2001.

Stefanazzi L. - Paolini E. - Oliva A. Click modulation: an off-line implementation. 51st Midwest Symposium on Circuits and Systems, 2008.

Kujan, P. - Hromčík, M. - Šebek, M.: Complete Fast Analytical Solution of the Optimal Odd Single-phase Multilevel Problem. IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 57(7), p. 2382-2397, 2010.

Vedoucí: Ing. Petr Kujan, Ph.D.

Platnost zadání: do konce zimního semestru 2011/2012

prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.  
vedoucí katedry



prof. Ing. Boris Šimák, CSc.  
děkan

V Praze dne 20. 1. 2011

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne 27. 5. 2011

*Michal Vykouk*

.....  
Michal Vykouk

## Poděkování

Děkuji Ing. Petru Kujanovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce a za jeho podnětné návrhy, které mojí bakalářskou práci velmi obohatily.

Michal Vykouk

Název práce: Porovnání modulačních metod ZePoC a optimální PWM  
Autor: Michal Vykouk  
Obor: Kybernetika a měření  
Druh práce: Bakalářská práce  
Vedoucí práce: Ing. Petr Kujan, Ph.D.

Abstrakt:

Tato bakalářská práce se zabývá matematickým odvozením pulzně-širokové modulace signálu podle metody Zero Position Coding. V rámci bakalářské práce je navržen funkční matematický model pomocí programových prostředků Matlab a Simulink. Na závěr bakalářské práce je porovnán výstupní signál metody Zero Position Coding jak se vstupním signálem, tak i s výstupním signálem metody optimální pulzně-širokové modulace.

Klíčová slova:

Zero Position Coding, digitální audio zesilovač, Hilbertova transformace, optimální PWM problém

Title: The comparison of methods ZePoC and optimal PWM  
Author: Michal Vykouk

Abstract:

This thesis deals with the mathematical derivation of pulse-width modulation signal according to Zero Position Coding method. In this thesis is designed a functional mathematical programming model by means of Matlab and Simulink. At the conclusion of this work is compared the output signal of the Zero Position Coding method to the ideal input signal and output signal of the optimal pulse-width modulation method.

Key words:

Zero Position Coding, audio D-class amplifier, Hilbert transform, optimal PWM problem

## Obsah

1. Úvod .....	1
2. Pulzní šířková modulace (PWM).....	2
3. Zero Position Coding (ZePoC).....	4
3.1 Teoretické odvození metody ZePoC .....	5
3.2 Binární signály s oddělenými pásmy .....	7
4. Návrh simulačního modelu. ....	11
4.1. Identifikace neznámých konstant simulačního modelu.....	15
4.2 Výsledky simulace.....	17
5. Porovnání výsledků generovaného PWM signálu.....	21
6. Závěr .....	25
7. Zdroje .....	26
8. Příloha .....	27

# 1. Úvod

Tato práce popisuje teoretické odvození pulzně-šířkové modulace (dále jen PWM) založené na metodě Zero Position Coding [1]. Na základě matematicky odvozených rovnic se práce zabývá tvorbou simulačního modelu metody Zero Position Coding (dále ZePoC), dle kterého jsem ověřil správnost a funkčnost metody Zero Position Coding.

Generování pulzně-šířkově modulovaného signálu je nejdříve nastíněno na „klasickém“ pulzním generátoru, který využívá komparační metodu harmonickým referenčním signálem.

V následujících částech bakalářské práce jsem se věnoval teoretickému rozboru metody Zero Position Coding (základní princip, realizace a v neposlední řadě vlastnostmi samotné modulace).

Na závěr jsem porovnal výsledky jednotlivých simulací metody ZePoC s výsledky optimálního PWM [9].

Důvodem, proč jsem si vybral toto téma, je široké využití pulzně-šířkové modulace v elektrotechnice, počínaje modulací audiosignálu v zesilovačích třídy D a konče výkonovou elektrotechnikou. Dalším důvodem bylo pozdější uplatnění některých výpočetních částí metody ZePoC pro metodu optimálního PWM, která je vyvíjena na katedře řídicí techniky pod vedením Ing. Petra Kujana, Ph.D..

## 2. Pulzní šířková modulace (PWM)

Nízko výkonové aplikace řídicí techniky se dají realizovat pomocí jednoduchých lineárních operačních zesilovačů ve třídách A, AB, nebo B. Při potřebě vyšších výkonů je tento způsob řízení velmi nákladný (neefektivní), a tak jsou jednoduché lineární operační zesilovače nahrazeny výkonovými součástkami využívajícími vhodnou pulzní modulaci.

Pulzních modulací je několik druhů, každá má své použití, ale nejčastěji se používá pulzně-šířková modulace (PWM – pulse width modulation)

Základem takového jednoduchého pulzně-šířkového modulačního členu je PW modulátor, pracující na principu komparátoru (viz. schéma 2.1).

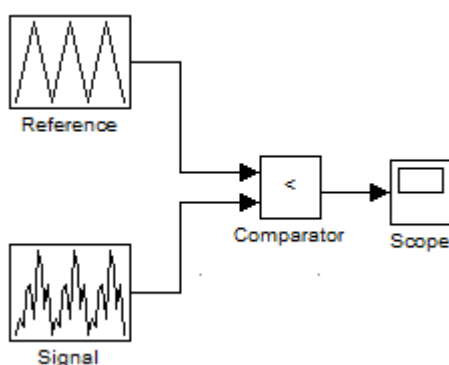


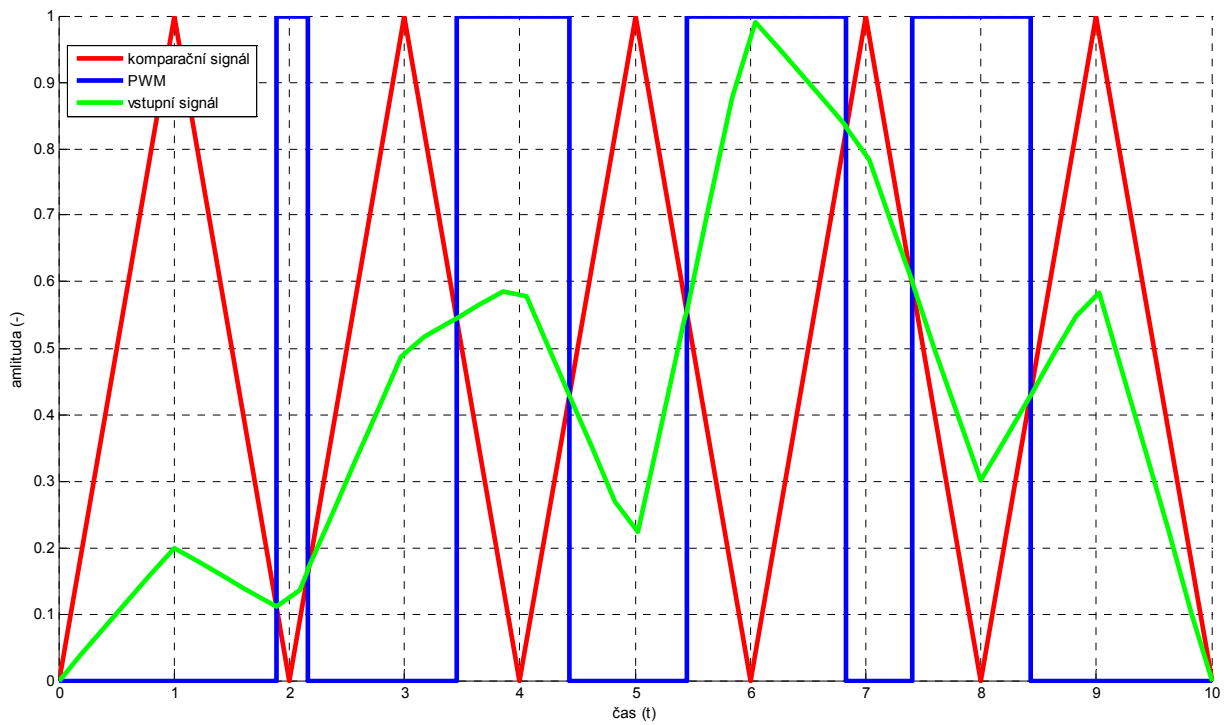
Schéma 2.1 Blokové schéma standardního PW modulátoru

PW modulátor má dva vstupní signály a jeden výstupní signál. Na jeden vstup je přiváděn měronosný signál a na druhý vstup komparátoru je přiváděn retenční periodický signál (viz. graf 2.1).

Tento způsob pulzně-šířkové modulace má ovšem jedno velké úskalí. Z důvodu nedostatečně velkého pásma nulových frekvencí mezi frekvencemi původního měronosného signálu a nepotřebných vyšších harmonických frekvencí, vznikajících při převedení na obdélníkový pulzně-šířkově modulovaný signál, dochází při zpětné transformaci (pomocí vhodného filtru) na spojitý měronosný signál k nedostatečnému odfiltrování neúčinných frekvencí.



Vzniklý problém nedostatečně oddělených pásem užitečného a neužitečného frekvenčního pásma řeší PW modulátor navržený metodou optimálního PWM, nebo pomocí ZePoC metody, kterou podrobněji popisují v této práci.



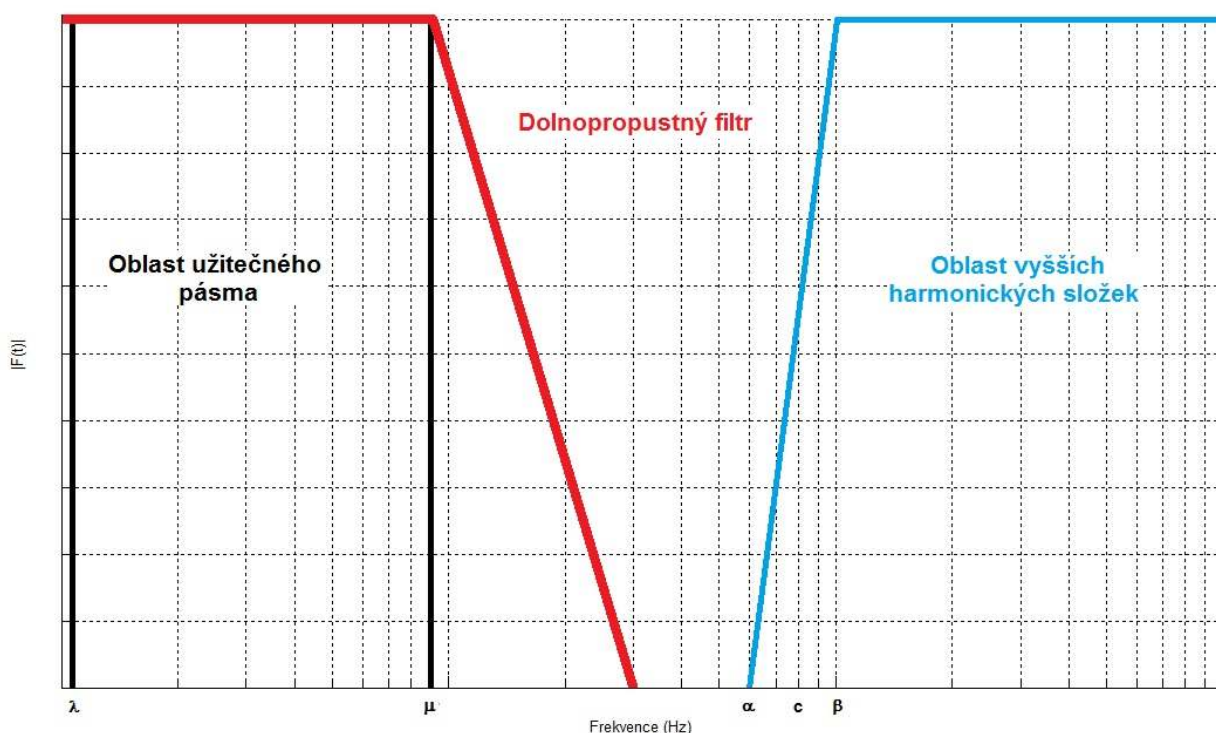
Graf 2.1 Komparace pily se vstupním signálem

### 3. Zero Position Coding (ZePoC)

Již zmíněný odstup pásma užitečných frekvencí od pásma vyšších neužitečných harmonických signálů znázorňuje níže uvedený graf (viz graf 3.1).

Oblast užitečného pásma obsahuje frekvence měronosného signálu. Oblast vyšších harmonických (neužitečných) frekvencí obsahuje frekvence vzniklé modulací měronosného signálu na PWM signál. Výsledný PWM signál obsahuje pásmo užitečných frekvencí, pásmo vyšších harmonických složek a nastavitelné oddělovací pásmo nulových frekvencí, zabraňující frekvenčnímu překryvu zmíněných pásem.

Z takto získaného PWM signálu lze za použití vhodného dolnoproustného filtru demodulovat měronosný signál.



Graf 3.1 Rozložení frekvenčního spektra signálu

### 3.1 Teoretické odvození metody ZePoC

Vlastní teoretické odvození metody ZePoC vychází z práce popisující tuto metodu [1].

Na základě Weierstraßova teorému můžeme popsat vstupní signál funkcí:

$$f(z) = z^\lambda \cdot \prod(z) \cdot e^{g(z)} = z^\lambda \cdot \left[ \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{z_k} \right) \cdot \exp \left( \sum_{j=1}^{\rho} \frac{1}{j} \cdot \left( \frac{z}{z_k} \right)^j \right) \right] \cdot e^{g(z)}, \quad (1)$$

kde  $\prod(z)$  je kanonickým výsledkem funkce  $f(z)$ , který zároveň obsahuje nulové body  $\{z_k\}$  funkce  $f(z)$ . Přičemž platí, že  $z_k \neq 0$  pro  $k > 0$  a číslo  $\lambda$  udává násobnost této nuly  $z_0 \neq 0$ .

Titchmarsh [10] poté podstatně tuto Weierstraßovu formulaci zjednodušil za podmínky, že funkci  $f(z)$  lze napsat ve tvaru

$$f(z) = \int_a^b e^{z\xi} g(\xi) d\xi. \quad (2)$$

Popřípadě lze napsat funkci  $f(z)$  v jejím nekonečném tvaru

$$f(z) = f(0) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{z_k} \right). \quad (3)$$

Přičemž tato funkce je jednoznačně určena hodnotami  $\{z_k\}$  pro které je tato funkce nulová. Pro frekvenčně omezený signál  $f(t)$  na reálné ose, lze tuto rovnici přepsat do tvaru

$$f(z) = f(0) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right), \quad (4)$$

kde  $\{t_k\}$ ,  $\tau = t + ui$  jsou komplexní nuly funkce  $f(t)$ , které jednoznačně definují funkci  $f(t)$ .

Pro zpětnou rekonstrukci signálu  $s(t)$  je ovšem nutné nejdříve znát reálné a jednoduché nuly  $\{z_k\}$  tohoto signálu  $s(t)$ . Pouze tyto nuly mohou být převedeny pomocí funkce  $sign(s(t))$ .

Tento předpoklad byl potvrzen i Loganem, který dokázal, že funkce s reálnými hodnotami je definována podle vztahu

$$s(t) = \operatorname{Re}\{z(t) \cdot e^{ict}\}, \quad (5)$$

kde funkce  $s(t)$  má pouze reálné a jednoduché nuly, přičemž  $c > 0$  a její spektrum je frekvenčně omezené na interval  $\langle -\beta, \beta \rangle$ , přičemž platí, že  $\beta > 0$ .

Mimo jiné, pro funkce  $z(\tau)$ , která nemá v záporné polorovině žádnou vlastní nulu, platí, že pro jakékoliv  $t$  je tato reálná hodnota funkce  $z(t)$  větší než nula.

Za těchto podmínek může být funkce  $s(t)$  podle vztahu (4) napsána ve tvaru

$$s(t) = s(0) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right) = \frac{1}{2} \cdot e^{\hat{h}(t)} \operatorname{sign}(s(t)), \quad (6)$$

kde  $\hat{h}(t)$  je Hilbertova transformace signálu  $s(t)$ . Tento tvar umožňuje zpětnou rekonstrukci již při využití znaménkových změn funkce  $sign(s(t))$ .

### 3.2 Binární signály s oddělenými pásmy

Za pomoci spektrálního teorému, navrženého Loganem již v roce 1984 [6], a výše uvedených vzorců je popsána generace signálu s odděleným frekvenčním spektrem (pro původní signál a frekvence vniklé při PW modulaci).

Spektrální teorém je založen na teorii analytické modulace systémů. Analytické signály se používají tam, kde se nevyskytují záporné frekvenční spektra.

Z tohoto důvodu je pro metodu ZePoC využita Hilbertova transformace.

Nechť vstupní signál  $f(t)$  je frekvenčně omezen v intervalech  $\langle -\mu, -\lambda \rangle$  a  $\langle \lambda, \mu \rangle$ , kde  $0 < \lambda < \mu < \infty$  a signál neobsahuje žádné stejnosměrné složky - tedy pouze harmonické signály.

Vstupní signál je nejprve převeden na analytický signál přidáním jeho Hilbertovy transformace jakožto imaginární části.

$$F(t) = f(t) + i \cdot \hat{f}(t). \quad (7)$$

Potom je Fourierova transformace omezena jen na kladnou část spektra původního signálu. Takto získaný signál lze napsat ve tvaru

$$Z(t) = e^{-iF(t)}. \quad (8)$$

Tento matematický vztah je základem tzv. analytické exponenciální modulace (AEM).  $Z(t)$  má jednostranné, ale neomezené frekvenční spektrum. Za předpokladu, že  $|f(t)| < \frac{\pi}{2}$ ,  $Z(\tau)$ ,  $\tau = t + ui$ , nemá exponenciála v uzavřené kladné polorovině žádnou nulu. Pro omezení spektra využijeme filtr typu dolní propusti, který propustí vše do frekvence  $\alpha$  a zamezí vstupu všem frekvencím větším než  $\beta$

$$z(t) = \int_a^b Z(x) K_{\alpha, \beta}(t-x) dx. \quad (9)$$

Za podmínky, že  $|\arg\{z(t)\}| < \frac{\pi}{2}$  nemá  $z(t)$  nuly ve své horní polorovině.

Použitím těchto vzorců docílíme, že Fourierovy transformace  $F(t)$  a  $i \log(z(t))$  jsou navzájem shodné na frekvenčním spektru na intervalu  $\langle -\infty, \alpha \rangle$ , čehož následně využijeme pro vytvoření oddělených frekvenčních pásem.

Podle této teorie můžeme signál popsat funkčním předpisem

$$s(t) = \operatorname{Re}\{\bar{z}(t) \cdot e^{ict}\} = |z(t)| \cdot \cos(ct + \arg(z(t))), \quad (10)$$

kde  $c > \frac{\alpha + \beta}{2}$  a  $\bar{z}(t)$  je komplexně sdružené k  $z(t)$ , přičemž  $s(t)$  má pouze reálné a jednoduché nuly, a je tedy jednoznačně určen znaménkovými změnami funkce sign. Funkce  $s(t)$  má vlastnosti dolního frekvenčního pásma s nosnou frekvencí. Fourierova transformace  $s(t)$  je tedy omezena na intervalu  $\langle -c, c \rangle$ .

Za těchto podmínek je spektrum funkce  $G(t)$  definována předpisem

$$G(t) = 2s(t)e^{ict}. \quad (11)$$

Takto definované funkce jsou omezeny na intervalu  $\langle 0, 2c \rangle$ . Fourierovy transformace  $G(t)$  a  $z(t)$  jsou totožné na intervalu  $\langle -\infty, \alpha \rangle$ . V tomto intervalu jsou totožné i Fourierovy transformace pro funkce

$$H(t) = i \log(G(t)), \quad (12)$$

$$F(t) = i \log(Z(t)). \quad (13)$$

To má za následek, že Fourierova transformace reálné a imaginární části  $G(t)$  a  $F(t)$  se shodují i na intervalu  $\langle -\alpha, \alpha \rangle$ . Platí tedy vztah

$$h(t) = \operatorname{Re}\{H(t)\}. \quad (14)$$

Tato funkce má stejný frekvenční interval  $\langle -\alpha, \alpha \rangle$  jako původní signál  $f(t)$  a pásmo s vyššími frekvencemi je od tohoto intervalu odděleno intervalem  $\langle \mu, \alpha \rangle$ .

Původní signál lze získat konvolucí podle vzorce

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) K_{\mu, \alpha}(t-x) dx, \quad (15)$$

kde  $K_{\mu, \alpha}$  je impulsní charakteristika filtru typu dolní propust s jednotkovým zesílením na intervalu  $\langle -\mu, \mu \rangle$ , který slouží k odstranění všech frekvencí mimo interval  $\langle -\alpha, \alpha \rangle$ .

S použitím vztahů (11) a (12) a za předpokladu, že

$$s(t) = |s(t)| e^{i \arg\{s(t)\}}, \quad (16)$$

můžeme napsat funkci  $h(t)$  ve tvaru

$$h(t) = -\arg\{s(t)\} - ct = J(t) - ct. \quad (17)$$

Vzhledem k tomu, že funkce  $s(t)$  je reálná funkce, tak fáze této funkce skokově klesá (stoupá) o  $\pi$  při každém průchodu nulou této funkce. Funkce  $h(t)$  tak má opakující se pilovitý tvar. Přičemž každá druhá nula funkce  $h(t)$  je i nula funkce  $s(t)$ , všechny ostatní nuly jsou nuly pomocného signálu  $\sin(ct)$ .

Nyní můžeme popsat pravidelné pilovité funkce s periodou  $\frac{\pi}{c}$  podle vztahů.

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \frac{\pi}{2} - ct && \text{pro } 0 < t < \frac{\pi}{c} \\ \sigma(t) &= \sigma\left(t + \frac{\pi}{c}\right) \\ \sigma(0) &= 0\end{aligned}\quad (18)$$

Přičemž frekvenční spektrum funkce  $\sigma(t)$  je na intervalu  $\langle -2c, 2c \rangle$ . Tuto skutečnost lze prokázat při expanzi této funkce. Nuly takto popsané funkce  $\sigma(t)$  jsou shodné s nulami funkce  $\sin(2ct)$ .

Odečtením funkce  $\sigma(t)$  od funkce  $h(t)$  vznikne funkce obdélníkového tvaru popsaná vztahem

$$q(t) = \frac{\pi}{2} \text{sign}(h(t)) = h(t) - \sigma(t) = -\frac{\pi}{2} \{ \text{sign}(s(t)) \} \{ \text{sign}(\sin(ct)) \}, \quad (19)$$

která je jednoznačně určena nulami funkcí  $s(t)$  a  $\sin(ct)$ . Z druhé části vztahu taktéž vyplývá, že výsledná funkce  $q(t)$  má oddělená frekvenční pásma.



## 4. Návrh simulačního modelu.

Pro realizaci modelu PWM modulátoru pomocí metody ZePoC jsem použil softwarových prostředků programu Matlab 2010a. Simulinkový matematický model vychází z modelu ( viz. schéma 4.1) pro výpočet PWM pomocí metody ZePoC [1].

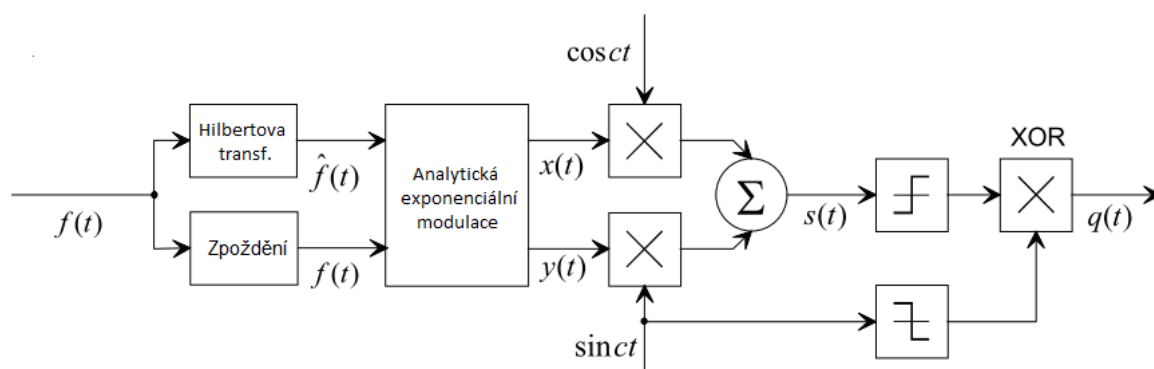


Schéma 4.1 Zdrojové schéma zapojení funkčních bloků metody ZePoC

Jednou z nejdůležitějších částí modelu je blok analytické exponenciální modulace (dále jen AEM), pro který platí následující rovnice:

$$x(t) = e^{\hat{f}(t)} \cdot \cos(f(t)) \quad (20)$$

$$y(t) = -e^{\hat{f}(t)} \cdot \sin(f(t)) \quad (21)$$

Rovnice (20) a (21) jsem v simulačním modelu implementoval v podobě samostatného blokového schématu (AEM) ( viz. schéma 4.2).

Použitím vztahů (7), (8), (9), (20) a (21), lze funkci  $z(t)$  popsat vztahem

$$z(t) = x(t) + iy(t) = e^{\hat{f}(t)} \cdot \cos(f(t)) - e^{\hat{f}(t)} \cdot \sin(f(t)). \quad (22)$$

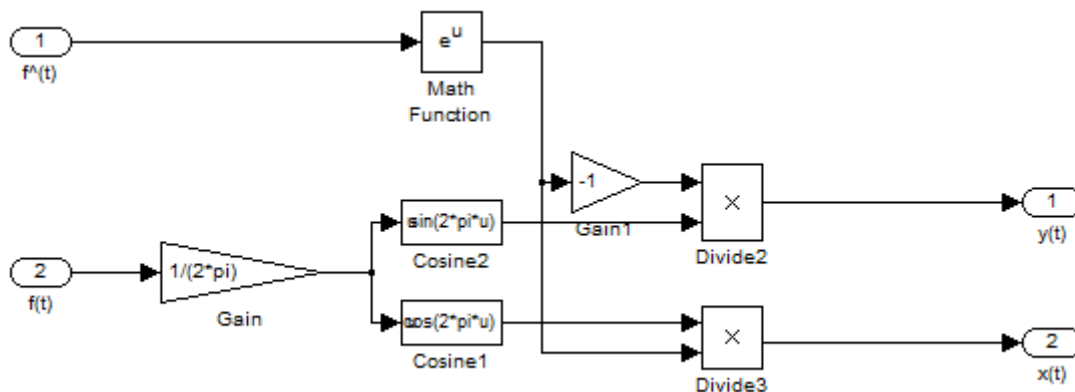


Schéma 4.2 Blokové schéma AEM

Za pomoci výše uvedených vztahů (10) a (22) dospějeme ke vztahu pro výpočet funkční závislosti  $s(t)$

$$s(t) = \operatorname{Re}\{\bar{z}(t) \cdot e^{ict}\} = x(t) \cdot \cos(ct) + y(t) \cdot \sin(ct), \quad (23)$$

přičemž nuly funkce  $s(t)$  jednoznačně určují výsledný signál podle vztahu

$$q(t) = -\frac{\pi}{2} \cdot \{sign(s(t))\} \cdot \{sign(\sin(ct))\}. \quad (24)$$

Při návrhu matematického modelu ale nastalo několik problémů, které jsem musel postupně vyřešit. Software prostředek Simulink neobsahuje přímo funkční blok pro Hilbertovu transformaci, takže jsem musel najít adekvátní náhradu tohoto funkčního bloku.

Dle [7] lze Hilbertovu transformaci nahradit funkčním blokem pro konvoluci v časové oblasti podle vzorce

$$\hat{f}(t) = f(t) * \frac{1}{\pi \cdot t}. \quad (25)$$

Tuto možnost náhrady za Hilbertovu transformaci jsem z důvodu omezeného počtu funkčních bloků simulačního programu opět nemohl použít, neboť Simulinkový model neobsahuje funkční blok konvoluce. Ke konečnému řešení mě nakonec přivedl článek [3] zabývající se výpočtem a vlastnostmi Hilbertovy transformace. V tomto článku je znázorněn schematický model výpočtu Hilbertovy transformace pomocí Hilbertova filtru a vhodného časového zpoždění Hilbertova filtru v paralelní signálové větvi.

Posledním krokem bylo nahrazení logického bloku XOR. Tento blok jsem nahradil pomocí matematické funkce (24), kde jsou jednotlivé členy pouze pronásobeny.

Celkové schéma matematického modelu tvorby pulzně-šířkově modulovaného signálu dle metody ZePoC je znázorněna ve schématu ( viz. schéma 4.3).

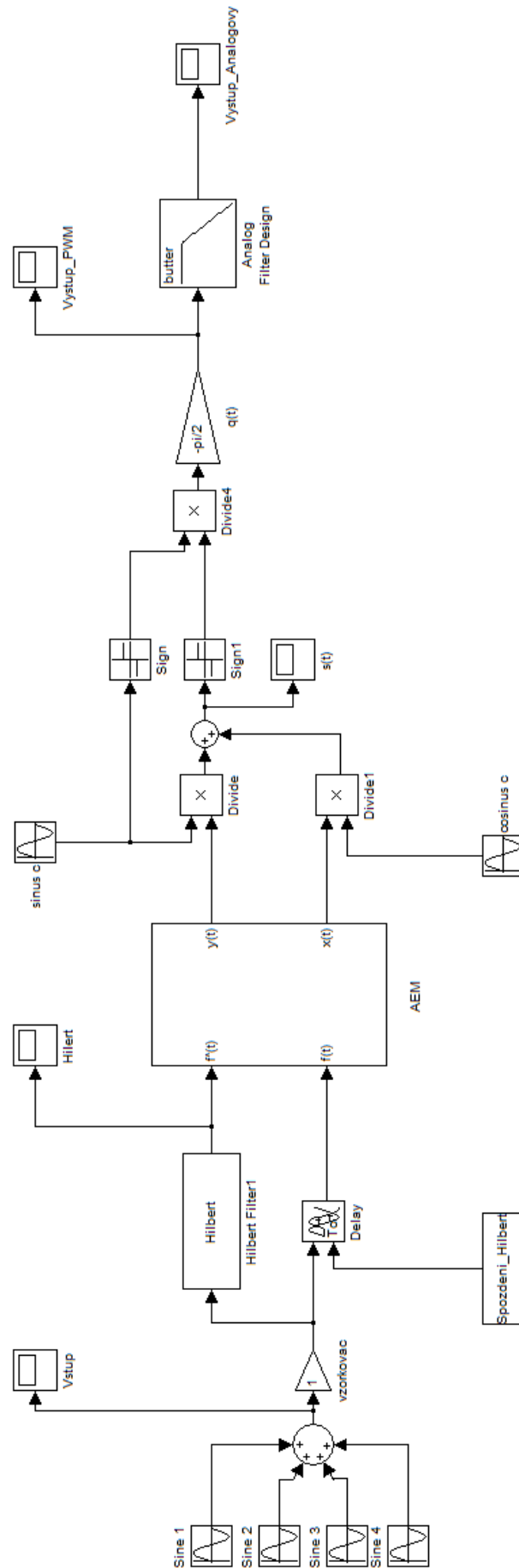


Schéma 4.3 Blokové schéma modelu metody ZePoC

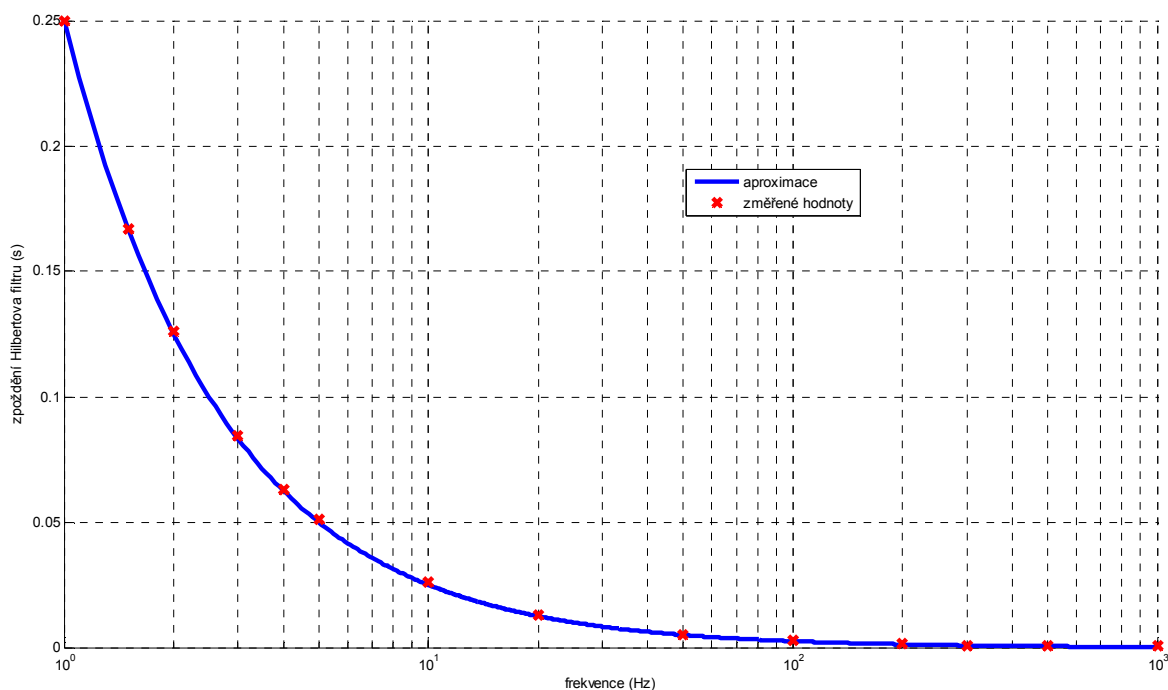
## 4.1. Identifikace neznámých konstant simulačního modelu

Pro správnou funkčnost modelu metody ZePoC je důležité najít vhodnou aproximaci pro hodnoty zpoždění Hilbertova filtru.

Proto jsem porovnával vstupní a výstupní signál Hilbertova filtru a jejich vzájemný časový posun. Jelikož mají oba zmíněné signály stejnou frekvenci, porovnával jsem hodnoty pro průchod signálu nulovou hodnotou se shodným znaménkem derivace v tomto bodě. Takto získané hodnoty jsem navzájem odečetl podle vzorce

$$t_{zp} = t_H - t_v, \quad (26)$$

kde  $t_{zp}$  je výsledná hodnota zpoždění Hilbertova filtru,  $t_H$  je hodnota změřená po průchodu Hilbertova filtru a  $t_v$  je hodnota změřená pro signál před průchodem Hilbertovým filtrem.



Graf 4.1.1 Měření zpoždění časového zpoždění Hilbertova filtru

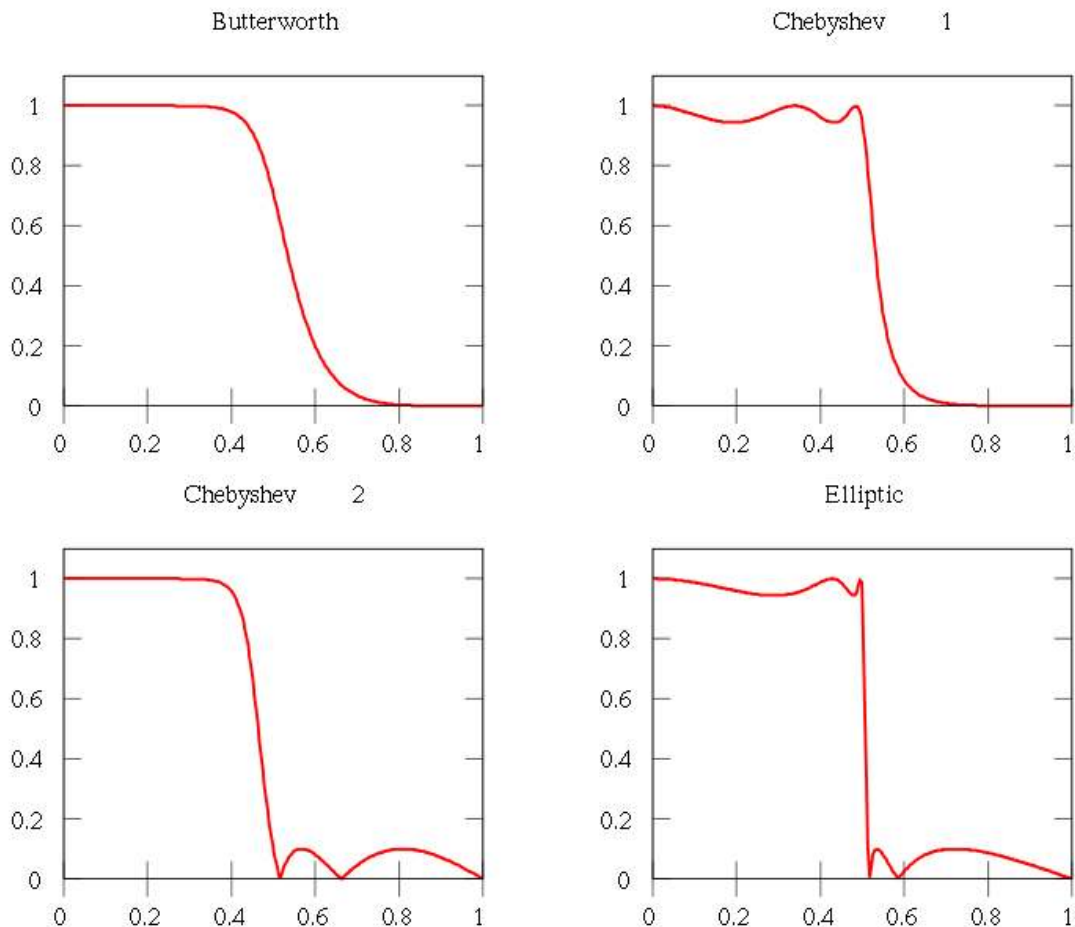
Naměřené hodnoty (viz. Graf 4.1.1) jsem poté aproximoval funkcí dle vzorce

$$t_{zp} = \frac{1}{4 \cdot f}, \quad (27)$$

kde  $f$  je frekvence vstupního signálu.

Pro signály, které obsahují více harmonických (periodických) signálů platí, že se zpoždění Hilbertova filtru rovná součtu zpoždění pro jednotlivé periodické složky vstupního signálu.

Nakonec jsem volil vhodný filtr pro demodulování výstupního PWM signálu. Simulink nabízí několik předem nastavených typů filtrů. Na výběr je Butterworthův, Eliptický a Besselův filtr, nebo Chebyshevův filtr I. a II. typu ( viz. graf 4.1.2).



Graf 4.1.2 Frekvenční závislosti filtrů

Besselův filtr není znázorněn z důvodů velké podobnosti s Butterworthovým filtrem. Rozdíl je jen v rychlosti útlumu pro frekvence větší než je zlomová frekvence, kde Butterworthův filtr má rychlejší pokles při stejném řádu filtru.

Jelikož je potřeba, aby požadované frekvence vstupního signálu byly zachovány i na výstupu, je nutné, aby v propustném pásmu bylo jednotné zesílení všech propouštěných frekvencí. Z tohoto důvodu se nehodí eliptický a Chebyshevův filtr 1. typu. U Chebysheva filtru 2. typu je problém s pozdějšími kmity u vyšších frekvencí, které mohou svým vlivem poškodit tvar výstupního signálu.

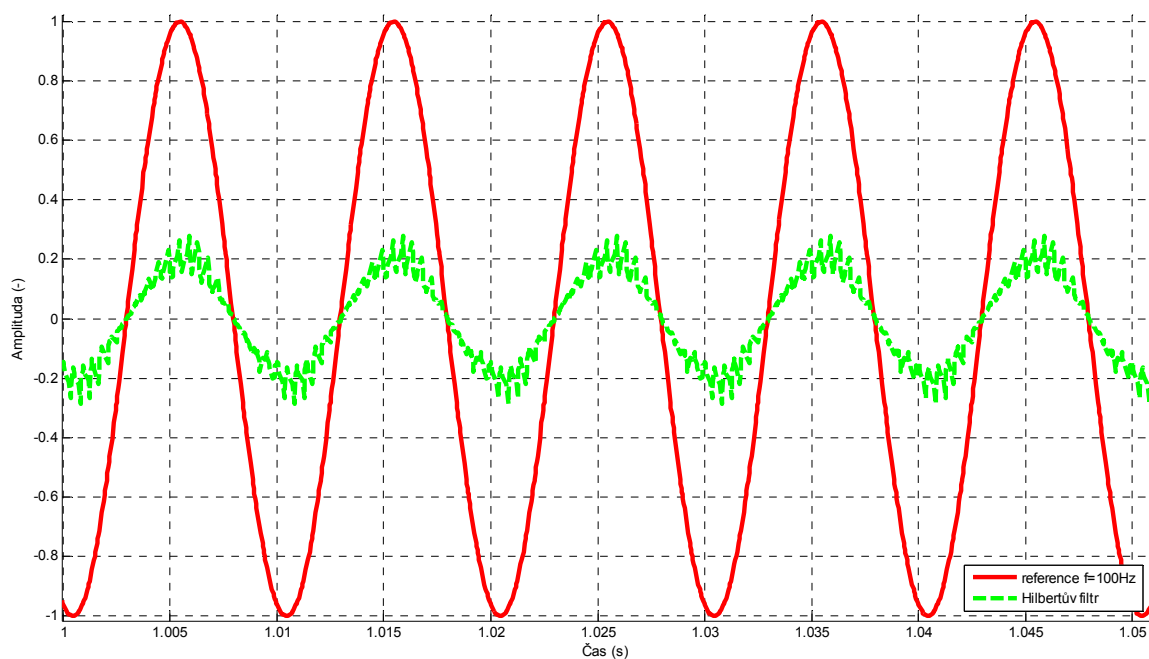
Nejlépe Simulinkový model pracuje s Butterworthovým filtrem, neboť v propustné části frekvenčního spektra má jednotné zesílení a pro frekvence větší než je požadovaná zlomová frekvence je pokles zesílení pro tyto frekvence dostatečně veliký, aby je odstranil z frekvenčního spektra.

## 4.2 Výsledky simulace

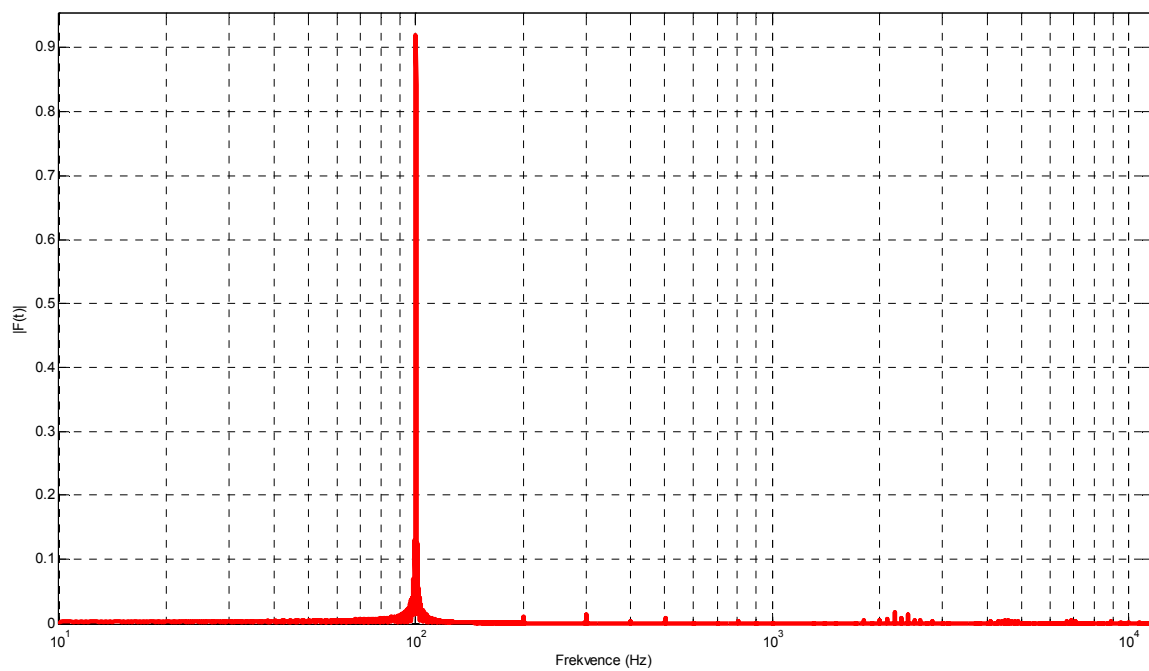
Ověření funkčnosti celého modelu generace pulzně-šířkové modulace metodou ZePoC jsem uskutečnil na náhodně zvoleném signálu s jednou hodnotou frekvence  $f_1 = 100\text{Hz}$  a amplitudou  $A=1$ . Odstup neužitečného pásma od zlomové frekvence jsem zvolil jednu dekádu ( $f_o = 1100\text{Hz}$ ).

Z grafu (viz. graf 4.2.3) je vidět, že došlo pouze ke zmenšení amplitudy analogového výstupního signálu, nikoliv k jeho zašumění ani ke změně ve frekvenci signálu. Tento fakt lze pozorovat na amplitudových spektrech vstupního (viz. graf 4.2.2) a výstupního demodulovaného signálu (viz. graf 4.2.4).

Odstup užitečného pásma, obsahující jen jednoduchý sinusový signál, od neužitečného pásma vyšších harmonických signálů vzniklých při generování obdélníkového PWM signálu s frekvencí spínání  $2c$  jsem ověřil vypočítáním frekvenčního spektra pulzně-šířkově modulovaného signálu (viz. graf 4.2.5).

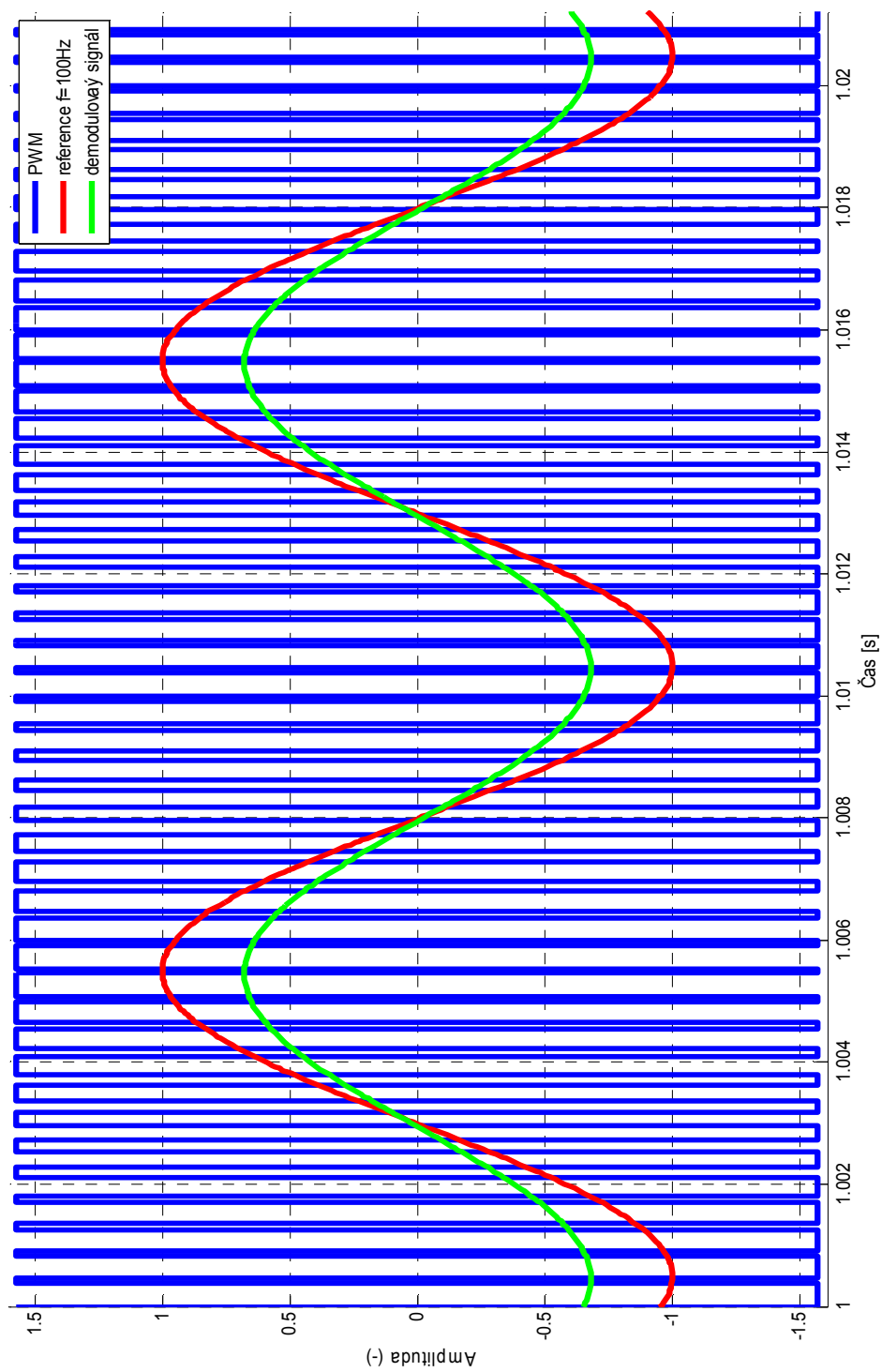


Graf 4.2.1 Ověření časového zpoždění Hilbertova filtru

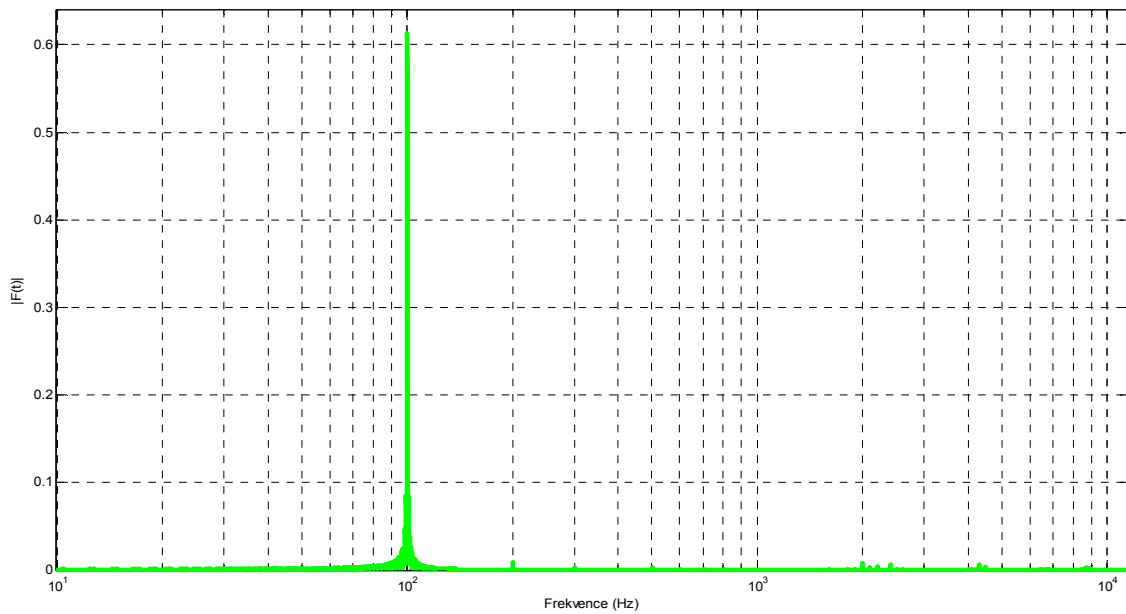


Graf 4.2.2 Amplitudové spektrum vstupního signálu

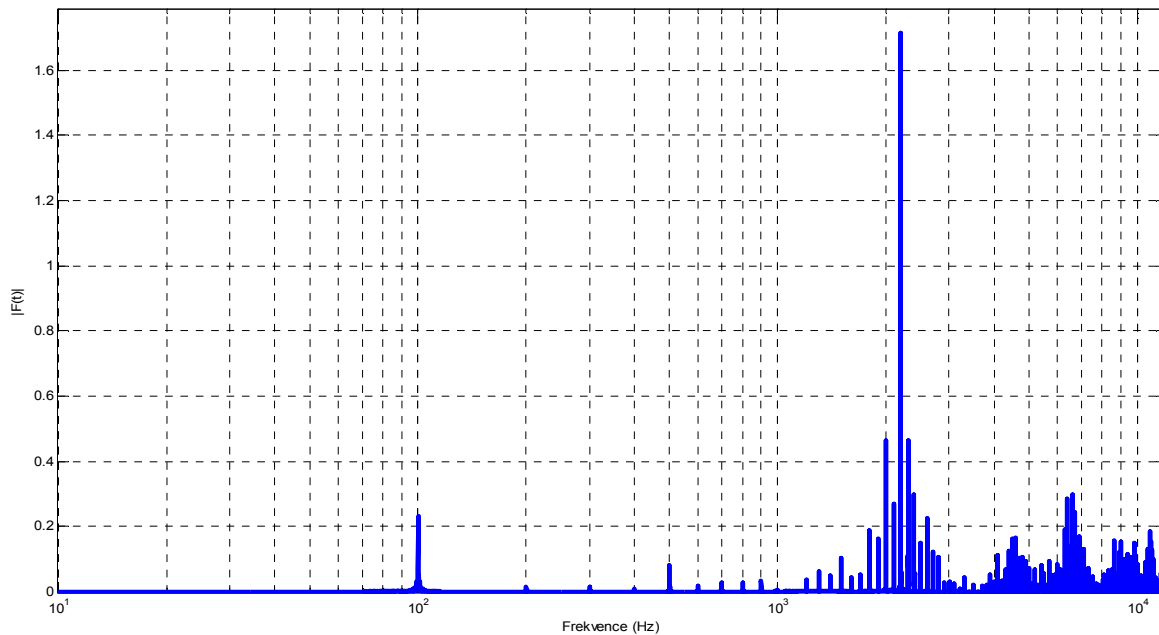




Graf 4.2.3 Výsledky simulace



Graf 4.2.4 Amplitudové spektrum výstupního demodulovaného signálu



Graf 4.2.5 Amplitudové spektrum výstupního PWM signálu

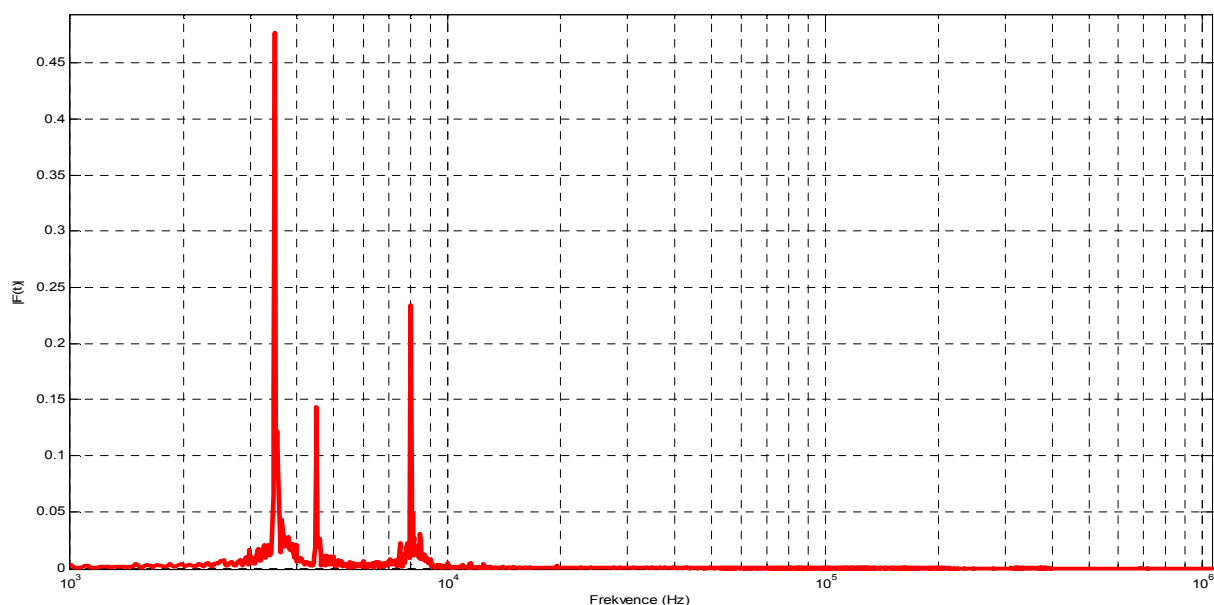
Z výše uvedených grafů usuzuji, že navržený model modulátoru PWM signálu je plně funkční a splňuje všechny předpokládané požadavky.

## 5. Porovnání výsledků generovaného PWM signálu

Pro přímé porovnání obou metod, konkrétně metody optimálního PWM a metody ZePoC, jsem si pomocí programu vytvořil signál s funkčním předpisem:

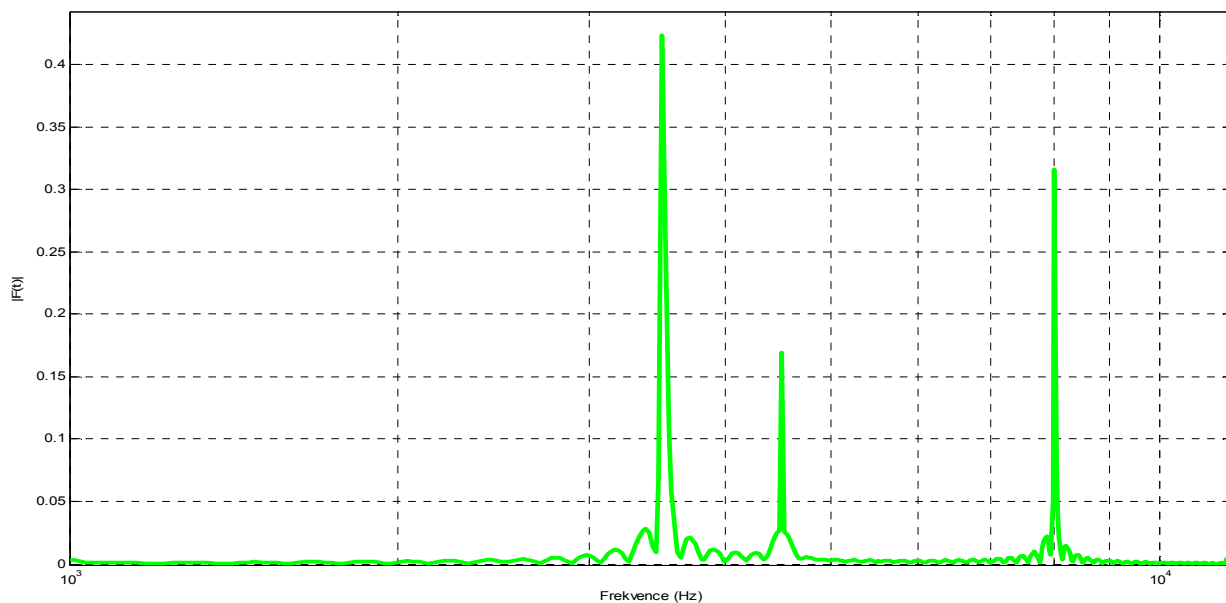
$$f_{sig}(t) = -\frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 3500 \cdot t) + \frac{1}{6} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 4500 \cdot t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 8000 \cdot t) \quad (28)$$

Ve frekvenčních spektrech vstupního a výstupního signálu se dle předpokladů objevily tři spektrální čáry o hodnotách  $f_1 = 3500 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 4500 \text{ Hz}$ ,  $f_3 = 8000 \text{ Hz}$  (viz. graf 5.1). Z důvodu již zmíněného utlumení, -3 dB na zlomové frekvenci Butterworthova filtru, jsem zlomovou frekvenci  $f_c$  Butterworthova filtru zvolil tak, aby k tomuto jevu nedocházelo ( $f_c = 16000 \text{ Hz}$ ). Odstup pásma neužitečných vyšších harmonických složek od užitečného pásma měronosného signálu jsem volil jako desetinásobek největší frekvence obsažené v signálu ( $f_o = 80000 \text{ Hz}$ ). Vzorkovací frekvence jsem volil jako trojnásobek maximální frekvence ( $f_s = 24000 \text{ Hz}$ ), tedy aby splnila vzorkovací podmínku  $f_s > 2f_{\max}$ .

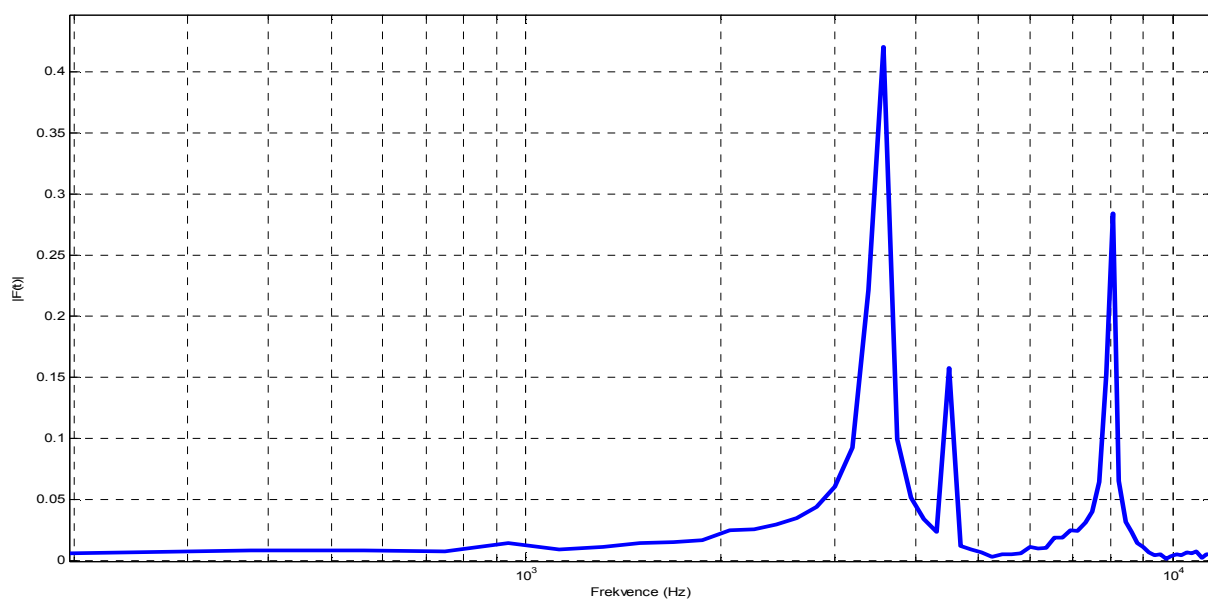


Graf 5.1 Frekvenční spektrum vstupního (referenčního) signálu

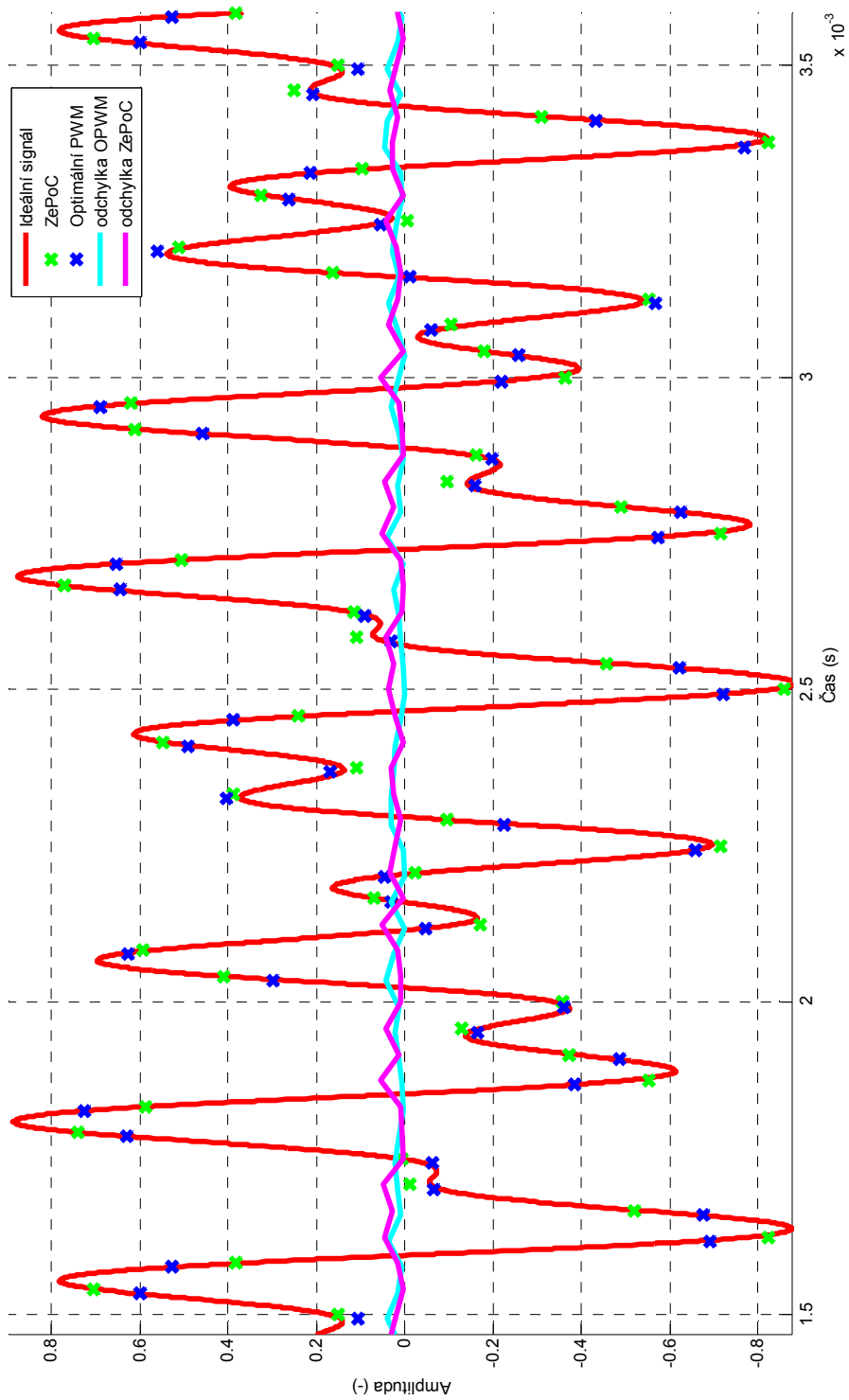
Dle očekávání se shodné tři frekvence obsažené ve vstupním signálu objevily i ve frekvenčních spektrech vyfiltrovaného pulzně-šířkově modulovaného signálu jak pro metodu ZePoC (viz. graf 5.2), tak pro metodu optimálního PWM (viz. graf 5.3).



Graf 5.2 Frekvenční spektrum výstupního demodulovaného signálu (ZePoC)



Graf 5.3 Frekvenční spektrum výstupního demodulovaného signálu (OPWM)



Graf 5.4 Vizualizace výstupního signálu (porovnání metody ZePoC a OPWMM)

Takto získané diskrétní signály se vzorkovací frekvencí ( $f_s = 16000 \text{ Hz}$ ) jsem porovnal vůči ideálnímu nezkruslenému vstupnímu signálu (viz. graf 5.4). Pro vzájemné porovnání pulzně-šířkové modulační metody ZePoC a optimálního PWM jsem použil následující vztah

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} |y_{id}(t_i) - y_{sig}(t_i)|}{\sum_{i=1}^{i=N} |y_{id}(t_i)|} \cdot 100\% = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} |y_{id}(t_i) - y_{sig}(t_i)|}{\sum_{i=1}^{i=N} |y_{id}(t_i)|} \cdot 100\% , \quad (29)$$

kde  $N$  je počet vzorků,  $y_{id}(t_i)$ ,  $y_{sig}(t_i)$  je amplituda ideálního signálu, respektive vyfiltrovaného výstupního signálu v čase  $t_i$ .

Dle vzorce (29) jsem poté vypočetl odlišnost vyfiltrovaného signálu jak pro metodu ZePoC, tak i pro metodu optimálního PWM

$$E_{ZePoC} = 6.2243 \quad \% ,$$

$$E_{OPWM} = 4.7106 \quad \% .$$

Přičemž maximální odchylka od ideální hodnoty je pro metodu ZePoC  $\Delta y_{ZePoC} = 0.0585$ , pro metodu optimálního PWM je tato maximální odchylka  $\Delta y_{OPWM} = 0.0474$ .

## 6. Závěr

Touto prací jsem potvrdil funkčnost pulzně-šířkové modulační metody ZePoC. V simulacích dosahovala teoreticky předpokládaných výsledků.

Obě metody, jak metoda optimálního PWM, tak metoda ZePoC, jsou v praxi využitelné pro generaci pulzně šířkově modulovaného signálu s předem nastavitelným frekvenčním odstupem mezi pásmem obsahující užitečné frekvence signálu od pásma neužitečných vyšších harmonických složek modulovaného signálu, které jsou způsobené obdélníkovým tvarem výstupního, pulzně-šířkově modulovaného signálu.

Této nesporné výhody, kterou je předem nastavitelný odstup využitelného a „nepotřebného“ pásma vyšších frekvencí modulovaného signálu, lze docílit i u klasické komparační metody generace PWM signálu, ale na úkor využití mnohonásobně vyšších frekvencí komparačního signálu (viz kapitola 2).

Na základě naměřených výsledků v předešlé kapitole (kapitola 5), kde jsem porovnával metodu ZePoC a metodu optimálního PWM, je zřetelné, že metoda optimálního PWM dosahuje lepších výsledků než metoda ZePoC. Odlišnost výstupního diskrétního filtrovaného signálu od ideálního průběhu pro metodu ZePoC by jistě šla ještě zmenšit použitím přesnějšího simulačního modelu. Nespornou výhodou modulační metody ZePoC je její větší výpočetní rychlost pulzně-šířkově modulovaného signálu ze vstupních dat. Na základě tohoto faktu bych rád později na tuto práci navázal a použil některé výpočetní vlastnosti metody ZePoC pro urychlení a zefektivnění metody optimálního PWM, vyvíjeného na katedře řízení.

Těchto metod lze využít pro uchovávání zvukových dat, dále pak lze tyto metody využít pro zesilovače třídy D, ve kterých je právě použit pulzně šířkově modulovaný signál.

## 7. Zdroje

- [1] M. Streitenberger, F. Felgenhauer, H. Bresch: „Zero Position Coding (ZePoC) – A Generalised Konzept of Pulse-Lenght Modulated Sinals and its Appication to Class-D Audio Power Amplifiers“, Audio Engieneering Society, 2001
- [2] Donald N. Bracewell: „The Fourier Transform and its Application“, McGraw-Hill Higher Education, str. 359-365, 2000
- [3] M. Johansson: „The Hilbert transform“
- [4] Alan V. Oppenheim, Roland W. Schafer, John R. Buck: „Discrete-Time Signal Processing“, kapitola 11, 1998
- [5] Jorge Varona: „Power Digital-to-Analog Conversion Using Sigma-Delta and Pulse Width Modulations“, ECE University of Toronto
- [6] B. F. Logan, jr.: „Theory of Analytic Modulation Systems“, The Bell System Technical Journal, 1977
- [7] Simon Angetal: „Introduction to Clil Modulation“, Texas Instrument, 2005, [www.eetimes.com/design/audio-design/4017803/Introduction-to-Click-Modulation](http://www.eetimes.com/design/audio-design/4017803/Introduction-to-Click-Modulation)
- [8] Simon Angetal: „A New Audio File Format For Low-Cost, High-Fidelity, Portable Digital Audio Amplifiers“, Texas Instrument, 2005, [www.eetimes.com/design/analog-design/4017802/A-New-Audio-File-Format-For-Low-Cost-High-Fidelity-Portable-Digital-Audio-Amplifiers](http://www.eetimes.com/design/analog-design/4017802/A-New-Audio-File-Format-For-Low-Cost-High-Fidelity-Portable-Digital-Audio-Amplifiers)
- [9] Petr Kujan, Martin Hromčik, Michael Šebek: „Complete Fast Analytic Solution of the Optimal Odd Single-Phase Multilevel Problem“, IEEE Ttransaction on Industrial Electronic, vol.57, No. 7, 2010
- [10] E. C. Titchmarsh: „The Theory of Functions“, Oxford University Press, 1939



## 8. Příloha

### Obsah CD:

1. Text bakalářské práce ve formátu PDF
2. Simulinkové modely:
  - a. ZePoC\_spojity.mdl
  - b. ZePoC\_disktretni.mdl
  - c. ZePoC\_zvuk.mdl
3. Zdrojové kódy pro Matlab 2010a
  - a. ZePoC\_spojity.m
  - b. ZePoC\_disktretni.m
  - c. ZePoC\_zvuk.m