

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
Fakulta elektrotechnická  
Katedra řídicí techniky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

# Podpora výuky předmětů teorie řízení v bakalářském studiu



## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW apod.) uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne .....

.....

podpis

## **Anotace**

Tato práce je rozdělena na dvě hlavní části. První částí práce je učební pomůcka pro podporu výuky na katedře řízení. Zpracovaným tématem jsou Integrované transformace (Laplaceova a Fourierova). Každá z transformací je vysvětlena definicí a následně, na konkrétních příkladech, ukázáno její využití. Současně jsou ke každému problému uvedeny neřešené příklady.

V druhé části jsou znalosti získané v předmětech teorie řízení aplikované na konkrétní model. Tímto modelem je *kulička na tyči* z laboratoří teorie řízení. Na modelu je ukázána identifikace systému a jeho řízení.

## **Abstract**

This essay is divided into two main parts. First of them is textbook for education support on Department of Control Engineering. Elaborated topic is Integral transform (Laplace and Fourier). Each transformation is explained by its definition and subsequently its usage is shown on particular examples. There are also listed unsolved examples for each problem.

There are knowledge gained in theory control subject applied on particular model in second part. This model is ball on beam from theory control laboratories. Identification and controlling is shown on model.

## **Poděkování:**

Děkuji vedoucímu své bakalářské práce, Ing. Petru Huškovi, Ph.D za zapůjčení literatury, čas věnovaný konzultacím a hlavně za jeho cenné rady.

# INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE

## 1 Laplaceova Transformace

### 1.1 Rychlý úvod do problematiky:

Při řešení lineárních diferenciálních rovnic a jejich soustav s konstantními koeficienty můžeme použít integrální transformace, které nahrazují operace derivování a integrování násobením či dělením a vlastní řešení diferenciální rovnice je převedeno na řešení soustavy algebraických rovnic. Jedna z nejčastěji používaných integrálních transformací je tzv. **Laplaceova transformace**. Připomeneme nejprve definici a základní vlastnosti Laplaceovy transformace, které při řešení diferenciálních rovnic a jejich soustav používáme. Laplaceova transformace umožňuje:

- nalézt homogenní a partikulární řešení v jednom kroku,
- převést diferenciální rovnice na algebraické rovnice,
- zavést **obrazový přenos, blokovou algebru, frekvenční přenos** atd., což pak nachází široké uplatnění v analýze a syntéze řízení

**Definice 1 (Laplaceova transformace)** *Laplaceovým obrazem funkce  $f(t)$  definované na  $(0, \infty)$  je funkce*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (1)$$

□

pokud integrál konverguje pro alespoň jedno  $s \in C$ .

O funkci  $f(t)$  mluvíme jako o předmětu, funkci  $F(s)$  nazýváme obrazem.

Značení:  $\mathcal{L} : f(t) \mapsto F(s)$ ,  $\mathcal{L}\{f\} = F$ ,  $f \hat{=} F$ .

Pro výpočet Laplaceova obrazu se zpravidla nepoužívá definiční integrál (1), ale využívá se vlastností Laplaceovy transformace nebo se pracuje se slovníkem Laplaceovy transformace. Použití definičního integrálu pro výpočet Laplaceova obrazu je demonstrováno na následujícím příkladě.

**Příklad 1** Nalezněte Laplaceův obraz funkce  $f(t) = e^{at}$  pomocí definičního vztahu Laplaceovy transformace (1).

*Řešení:*

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{t(a-s)} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{t(a-s)}}{a-s} \right]_0^T = \frac{1}{s-a}$$

□

**Příklad 2** Nalezněte Laplaceův obraz funkce  $f(t) = \sin t$  pomocí definičního vztahu Laplaceovy transformace (1).

*Řešení:*

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{\sin t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}\right\} = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} (e^{jt} - e^{-it})e^{-st} dt = \\ &= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} (e^{-(s-j)t} - e^{-(s+j)t}) dt = \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{s-j} - \frac{1}{s+j} \right] = \frac{1}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

□

## 1.2 Tabulka často používaných funkcí

Předmět	Obraz	Předmět	Obraz
1	$\frac{1}{s}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{\omega^2 + s^2}$
$t^2$	$\frac{2}{s^3}$	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$t^n, t \in N$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$te^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t^2 e^{at}$	$\frac{2}{(s-a)^3}$	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$t^n e^{at}, n \in N$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{s}{(s-a)^2 + \omega^2}$

## 1.3 Věty Laplaceovy transformace:

Při hledání obrazů Laplaceovy transformace využíváme těchto vět:

Linearita

$$\mathcal{L}\{k_1 f_1(t) \pm k_2 f_2(t)\} = k_1 F_1(s) \pm k_2 F_2(s) \quad (2)$$

Limitní věty

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (4)$$

Rovnice(4) platí pouze tehdy, když  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  existuje.

Derivace funkce

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{n-1}(0) \quad (5)$$

Integrál funkce

$$\mathcal{L}\left\{\underbrace{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty}_{n} f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s^n} \quad (6)$$

Zpoždění funkce

$$\mathcal{L}\{f^n(t - T_d)\} = F(s)e^{-sT_d} \quad (7)$$

Translace vobrazu

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a) \quad (8)$$

Derivace obrazu

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^n(s) \quad (9)$$

Integrál obrazu

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(z) dz \quad (10)$$

Konvoluce

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u) du\right\} = F(s)G(s) \quad (11)$$

**Příklad 3** Ověřte neplatnost věty (4) pro funkci  $f(t) = \cos(t)$ .

*Řešení:*  $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{s}{1+s^2}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \cos t \neq \lim_{t \rightarrow 0} s \frac{s}{1+s^2}$$

Neboť  $\lim_{t \rightarrow \infty} \cos t$  neexistuje. □

## 1.4 Zpětná Laplaceova transformace

**Definice 2 (Zpětná Laplaceova transformace)** *Definiční vztah inverzní (zpětné) Laplaceovy transformace:*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s)e^{st} ds = \sum \text{res} [F(s)e^{st}]_{s=s_k} \quad (12)$$

□

Hledáme funkci  $f(t)$ , pro kterou je  $F(s) = f(t)$ ,  $F(s)$  je racionální funkce. Ještě poznamenejme, že z vlastností Laplaceovy transformace vyplývá, že ve funkci  $F(s)$  je stupeň čitatele alespoň o jednu menší než stupeň jmenovatele.

Funkci  $F(s)$  rozložíme na součet parciálních zlomků a k jednotlivým sčítancům najdeme předměty pomocí vztahu a vzorců, které jsme uvedli v prvním odstavci. Zde se omezíme na nejjednodušší případy. Budeme uvažovat, že jmenovatel funkce  $F(s)$  má komplexní kořeny násobnosti nejvýše 2. Pro reálné kořeny není třeba nějaké omezení uvažovat.

**Příklad 4** Proveďte zpětnou Laplaceovu transformaci obrazu  $F(s) = \frac{s^3}{(s+2)^2(s+1)(s+3)}$ .

*Řešení:*

Nejprve rozložíme funkci  $F(s)$  na součet parciálních zlomků.

$$\frac{s^3}{(s+2)^2(s+1)(s+3)} = \frac{A}{(s+2)^2} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+3}.$$

$$s^3 = A(s+1)(s+3) + B(s+2)(s+1)(s+3) + C(s+2)^2(s+3) + D(s+2)^2(s+1).$$

Dosadíme do této rovnice hodnoty kořenů jmenovatele.

$$s = -2: \quad -8 = -A \Rightarrow A = 8;$$

$$s = -1: \quad -1 = -2C \Rightarrow C = -\frac{1}{2};$$

$$s = -3: \quad -27 = -2D \Rightarrow D = \frac{27}{2};$$

Nyní už stačí jen dosadit do rovnice např.  $s = 0$ , tím získáme hodnotu posledního koeficientu:

$$0 = 3A + 6B + 12C + 4D \Rightarrow B = -\frac{1}{6}(24 - 6 + 54) = -12.$$

Tedy:

$$F(s) = \frac{8}{(s+2)^2} - \frac{12}{s+2} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{27}{2(s+3)},$$

a s využitím vztahu (9)

$$f(t) = 8te^{-2t} - 12e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{27}{2}e^{-3t}, t \geq 0.$$

□

**Příklad 5**

$$F(s) = \frac{2s+3}{s^2+4s+3}$$

Rovnice  $s^2 + 4s + 3 = 0$  má 2 reálné kořeny  $s_1 = -3$  a  $s_2 = -1$ . Je tedy

$$F(s) = \frac{2s+3}{s^2+4s+3} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1}$$

$$2s+3 = A(s+1) + B(s+3).$$

Dosadíme hodnoty kořenu  $s_1 = -3$  a  $s_2 = -1$  a vypočteme koeficienty A a B.

Je tedy  $F(s) = \frac{3}{2} \frac{1}{s+3} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+1}$ , a tudíž

$$f(t) = \frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t}$$

**Příklad 6** Proved'te zpětnou Laplaceovu transformaci obrazu  $F(s) = \frac{s-5}{s^2+2s+10}$ .

*Řešení:* Polynom ve jmenovateli nemá reálné kořeny a proto daný obrazu upravíme tak, aby obsahoval výrazy z odstavce 1.2.

$$\frac{s-5}{s^2+2s+10} = \frac{s-5}{(s^2+2s+1)+9} = \frac{(s+1)-6}{(s+1)^2+9} = \frac{s+1}{(s+1)^2+9} - 2 \frac{3}{(s+1)^2+9}$$

Nyní jsme již schopni určit výsledek:

$$f(t) = e^{-t} (\cos 3t - 2 \sin 3t), t \geq 0,$$

□

**Příklad 7** Určete impulsní charakteristiku systémů s přenosy

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s+2}, \quad G_3(s) = \frac{2}{s+2}$$

a vyčíslete hodnoty impulsní charakteristiky pro  $t = 0$  a  $t \rightarrow \infty$  (ze vztahu pro  $g(t)$  a také z vět o Laplaceově transformaci).

*Řešení:* Podle vztahu pro zpětnou Laplaceovou transformaci určíme odezvy výstupů  $y_i(t)$  pro jednotlivé přenosy

$$g_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G_1(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} = e^{-t}$$

$$g_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} = e^{-2t}$$

$$g_3(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G_3(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s+2} \right\} = 2e^{-2t}$$

Určíme hraniční hodnoty (v 0 a  $\infty$ )

$$g_1(0) = e^0 = 1 = \lim_{t \rightarrow 0} e^0 = 1 \quad g_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}(e^t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{s+1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{s}} = 1.$$

$$g_1(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s+1} = 0.$$

□



## 1.5 Diferenciální rovnice

**Definice 3 (Lineární diferenciální rovnice)** Lineární diferenciální rovnici (LDR) s konstantními koeficienty nazýváme rovnicí tvaru:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y(t) = u(t). \quad (13)$$

Je-li  $u(t) = 0$ , mluvíme o homogenní LDR, jestliže  $u(t) \neq 0$  mluvíme o nehomogenní LDR.  $\square$

Řešení LDR lze nalézt jako součet obecného řešení homogenní a jednoho partikulárního řešení LDR.

**Definice 4** Charakteristickou rovnicí LDR rozumíme:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 \lambda = 0. \quad (14)$$

$\square$

Má-li charakteristická rovnice (14)  $n$  různých reálných kořenů  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ , potom fundamentální systém řešení je

$$y_1 = e^{\lambda_1 t}, y_2 = e^{\lambda_2 t}, y_3 = e^{\lambda_3 t}, \dots, y_n = e^{\lambda_n t}.$$

Jsou-li kořeny charakteristické rovnice (14) vícenásobné, tzn. rovnice má  $k$ -násobný reálný kořen, pak tomuto kořenu odpovídá fundamentální systém řešení

$$y_1 = e^{\lambda t}, y_2 = t e^{\lambda t}, y_3 = t^2 e^{\lambda t}, \dots, y_k = t^{k-1} e^{\lambda t}.$$

Má-li charakteristická rovnice (14) komplexně sdružené kořeny  $\lambda_{1,2} = a \pm jb$  pak odpovídající fundamentální systém řešení je:

$$y_1 = e^{at} \cos bt, \quad y_2 = e^{at} \sin bt.$$

Má-li charakteristická rovnice (14)  $k$ -násobné komplexně sdružené kořeny  $\lambda_{1,2,\dots,k} = a \pm jb$ , je fundamentální systém řešení:

$$y_1 = e^{at} \cos bt, y_2 = t e^{at} \cos bt, y_3 = t^2 e^{at} \cos bt, \dots, y_k = t^{k-1} e^{at} \cos bt$$

$$y_{k+1} = e^{at} \sin bt, y_{k+2} = t e^{at} \sin bt, y_{k+3} = t^2 e^{at} \sin bt, \dots, y_{2k} = t^{k-1} e^{at} \sin bt$$

Obecné řešení homogenní LDR je potom:

$$y_o = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_n y_n,$$

kde  $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{C}$ .

**Příklad 8** Řešte rovnici  $\ddot{y} - 8y = 0$  podle předchozího postupu.

*Řešení:* Charakteristická rovnice:

$$\lambda^3 - 8 = 0 \quad (\lambda - 2)(\lambda^2 + \lambda + 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}j.$$

Z toho pak fundamentální systém řešení:

$$y_1 = e^{2t}, y_2 = e^{-t} \cos \sqrt{3}t, y_3 = e^{-t} \sin \sqrt{3}t.$$

Obecné řešení

$$y_o = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \cos \sqrt{3}t + C_3 e^{-t} \sin \sqrt{3}t.$$

□

Partikulární řešení nehomogenní LDR můžeme nalézt například pomocí metody **variací konstant**.

Tuto metodu ilustrujeme na následujícím příkladu:

**Příklad 9** Nalezněte partikulární řešení nehomogenní LDR

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = te^{-2t} \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.$$

*Řešení:* Nejprve nalezneme obecné řešení příslušné homogenní LDR:

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2,$$

příslušné obecné řešení:

$$y_o = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}.$$

Metoda variací konstant spočívá v nahrazení konstant  $C_1, C_2, \dots, C_n$  obecného řešení funkcemi  $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$ :

$$y = C_1(t) e^{\lambda_1 t} + C_2(t) t e^{\lambda_2 t} = C_1(t) e^{-2t} + C_2(t) t e^{-2t}.$$

Určíme postupně derivace této funkce  $\ddot{y}$  a  $\dot{y}$ :

$$\dot{y} = \underbrace{\dot{C}_1(t) e^{-2t} + \dot{C}_2(t) t e^{-2t}}_0 - 2C_1(t) e^{-2t} + C_2(t) e^{-2t} - 2C_2(t) t e^{-2t}.$$

Ze zvolené podmínky plyne zjednodušení:

$$\dot{y} = -2C_1(t) e^{-2t} + C_2(t) e^{-2t} - 2C_2(t) t e^{-2t}.$$

Spočteme druhou derivaci:

$$\ddot{y} = -2 \left( \underbrace{\dot{C}_1(t) e^{-2t} + \dot{C}_2(t) t e^{-2t}}_0 \right) + 4C_1(t) e^{-2t} + \dot{C}_2(t) e^{-2t} - 4C_2(t) e^{-2t} + 4C_2(t) t e^{-2t}.$$

Nyní dosadíme do původní rovnice. Z toho po odečtení dostaneme:

$$\dot{C}_2(t) e^{-2t} = t e^{-2t} \Rightarrow \dot{C}_2(t) = t.$$

Integrací dostaneme:

$$C_2(t) = \int t dt = \frac{t^2}{2},$$

potom z podmínky  $\dot{C}_1(t)e^{-2t} + \dot{C}_2(t)te^{-2t} = 0$ :

$$\dot{C}_1(t)e^{-2t} + t^2e^{-2t} = 0 \quad \text{po integraci} \quad C_1 = -\frac{t^3}{3}.$$

Nyní dosadíme vypočtené hodnoty  $C_1, C_2$  do partikulární rovnice:

$$y = C_1(t)e^{-2t} + C_2(t)te^{-2t} = -\frac{t^3}{3}e^{-2t} + \frac{t^2}{2}te^{-2t} = e^{-2t} \left( \frac{(-2+3)t^3}{6} \right) = \frac{1}{6}t^3e^{-2t}.$$

□

Obecné řešení nehomogenní LDR je  $Y = y_o + y$ . Pak tedy pro předchozí příklad dostaneme obecné řešení ve tvaru:

$$Y = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t} + \frac{1}{6}t^3e^{-2t}$$

K řešení diferenciálních rovnic využíváme s výhodou Laplaceovu transformaci(1). Jak ukážeme na řešení následujícího příkladu.

**Příklad 10** Nalezněte řešení diferenciální rovnice popisující spojitý lineární stacionární systém

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

s počáteční podmínkou  $x(t_0) = x_0$ , kde  $a, b$  jsou reálné konstanty a  $u(t)$  je vstup systému. Uvažujme

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0, \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$

a určete  $x(t)$  pro  $t \rightarrow \infty$ .

*Řešení:* Nejprve určíme Laplaceův obraz zadané diferenciální rovnice s počáteční podmínkou  $x_0$

$$sX(s) - x_0 = aX(s) + bU(s).$$

Po vyjádření  $X(s)$  a dosazení za  $U(s)$  získáme

$$X(s) = \frac{x_0}{s-a} + \frac{b}{s(s-a)} = \frac{x_0}{s-a} + \frac{\frac{b}{a}}{s-a} - \frac{\frac{b}{a}}{s} = \frac{x_0}{s-a} + \frac{b}{a} \left( \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s} \right)$$

Provedeme-li zpětnou Laplaceovu transformaci tohoto výrazu, obdržíme řešení zadané diferenciální rovnice

$$x(t) = x_0 e^{at} - \frac{b}{a} (1 - e^{at}).$$

Nyní vyšetříme ustálenou hodnotu veličiny  $x(t)$  pro  $t \rightarrow \infty$ . Podíváme-li se na předchozí rovnici, zjistíme, že pro  $a > 0$  budou exponenciely divergovat. Naopak pro

$a < 0$  budou exponenciely pro  $t \rightarrow \infty$  konvergovat k nule, z čehož vyplývá, že veličina  $x(t)$  bude konvergovat k hodnotě

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -\frac{b}{a}$$

Tuto hodnotu můžeme ověřit podle vztahu (4)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s \left[ \frac{x_0}{s-a} + \frac{b}{s(s-a)} \right] \right\} = -\frac{b}{a}, \quad \text{pro } a < 0.$$

Protože se jedná o lineární systém, platí princip separace. Počáteční podmínka tedy odezní a nepotřebujeme ji pro určení ustálené hodnoty stavu  $x(t)$  znát. Jinými slovy, ustálená hodnota stavu  $x(t)$  na počáteční podmínce nezávisí.  $\square$

**Příklad 11** Řešte stejnou rovnici jako v příkladě 9

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = te^{-2t} \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0,$$

pomocí Laplaceovy transformace.

*Řešení:*

$$[s^2 Y(s) - 0s + 0] + 4[sY(s) + 0] + 4Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

Odtud vyjádříme  $Y(s)$ :

$$Y(s)(s^2 + 4s + 4) = \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+2)^4},$$

Zpětnou Laplaceovou transformací dotaneme:

$$y(t) = \frac{1}{6} t^3 e^{-2t}.$$

Vydíme, že stejného výsledku jsme dosáhli v mnohem kratším čase než v příkladu (9).  $\square$

**Příklad 12**

$$\dot{x} + 2x = 3, x(0) = 0$$

*Řešení:* Označme  $X(s) \hat{=} x(t)$  obraz řešení.

Využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, potom pro obraz řešení dostáváme:

$sX(s) - 0 + 2X(s) = \frac{3}{s}$  a odtud vypočteme, že

$$X(s) = \frac{3}{s(s+2)}$$

Předmět k funkci  $X(s)$  získáme postupem popsáním v odstavci 1.4:

$$x(t) = \frac{3}{2} (1 - e^{-2t}), t \geq 0$$

$\square$

### Příklad 13

$$\dot{x}(t) + x(t) = f(t), \quad x(0) = 1,$$

kde

$$f(t) = \begin{cases} 5 \cos 2t & \text{pro } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{pro } t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

*Řešení:* Platí

$$\mathcal{L}(f(t)) = 5 \cos 2t [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2})] = 5 \cos 2t \mathbf{1}(t) + 5 \cos 2(t - \frac{\pi}{2}) \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2})$$

Tedy  $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{5s}{s^2+4}(1 + e^{-\frac{\pi}{2}s})$ .

Značme  $X(s) \hat{=} x(t)$  obraz řešení.

Využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, potom pro obraz řešení dostáváme:  $(s+1)X(s) - 1 = \frac{5s}{s^2+4}(1 + e^{-\frac{\pi}{2}s})$  a odtud vypočteme, že

$$X(s) = \frac{5s}{(s^2+4)(s+1)}(1 + e^{-\frac{\pi}{2}s}) + \frac{1}{s+1}$$

Předmět k funkci  $X(s)$  získáme postupem popsáním v odstavci 1.4, odtud:

$$X(s) = \frac{s+4}{s^2+4} + \left( \frac{s+4}{s^2+4} - \frac{1}{s+1} \right) e^{-\frac{\pi}{2}}$$

dále:

$$x(t) = (\cos 2t + 2 \sin 2t) \mathbf{1}(t) + \left( \cos 2(t - \frac{\pi}{2}) + 2 \sin 2(t - \frac{\pi}{2}) - e^{-(t-\frac{\pi}{2})} \right) \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}), t \geq 0$$

Použili jsme vztahy  $\dot{x}(t) \hat{=} sX(s) - x(0)$ , větu o translaci a vzorce  $\cos 2t \hat{=} \frac{s}{s^2+4}$ ,  $\sin 2t \hat{=} \frac{2}{s^2+4}$ ,  $e^{-t} \hat{=} \frac{1}{s+1}$ .  $\square$

## 2 Fourierova transformace

Řada jevů v přírodě má periodický charakter, a proto se při řešení technických úloh při jejich popisu setkáváme s periodickými funkcemi. Periodické jsou základní goniometrické funkce sinus a kosinus a v této kapitole ukážeme, že se periodická funkce dá rozvinout v nekonečnou řadu, jejíž jednotlivé členy, harmonické, mají charakter goniometrických funkcí. Pripomeňme nejprve pojem periodické funkce.

**Definice 5 (Periodická funkce)** Říkáme, že reálná či komplexní funkce  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}(C)$  je periodická s periodou  $T, T > 0$ , jestliže pro každé  $t \in \mathcal{R}$  je

$$f(t+T) = f(t). \tag{15}$$

$\square$

**Příklad 14** Je-li  $\omega > 0$ , ukažme, že funkce  $\cos k\omega t$ ,  $\sin k\omega t$  a  $e^{jk\omega t}$ , kde  $k$  je celé číslo jsou periodické s periodou  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

*Řešení:* Je-li  $k$  celé číslo, pak  $\cos k\omega(t+T) = \cos(k\omega t + 2k\pi) = \cos k\omega t$  a  $\sin k\omega(t+T) = \sin(k\omega t + 2k\pi) = \sin k\omega t$ , neboť funkce sinus a kosinus jsou periodické s periodou  $2\pi$ . Protože je  $e^{jk\omega t} = \cos k\omega t + j \sin k\omega t$ , je podmínka definice periodické funkce splněna také.  $\square$

Je-li funkce  $f$  periodická s periodou  $T$  pak je periodická i s periodou  $kT$ , kde  $k \in \mathcal{N}$ . Jsou-li  $f$  a  $g$  periodické funkce s periodou  $T > 0$ , pak jsou periodické i funkce  $f+g, f \cdot g, |f|$  a  $\dot{f}$ , pokud má  $f$  derivaci.

**Definice 6 (Trigonometrický polynom)** *Trigonometrickým polynomem nazýváme polynom stupně  $n$*

$$T_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \quad (16)$$

kde  $a_k, b_k$  jsou reálná či komplexní čísla.  $\square$

Je vidět, že trigonometrický polynom stupně  $n \in \mathcal{N}$  je periodický s periodou  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

**Definice 7 (Fourierova řada)** *Na základě znalostí periodických funkcí a jejich vlastností jsme schopni definovat **Fourierovu řadu** což je speciální případ trigonometrické řady (6)*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \quad (17)$$

kde  $a_k, b_k$  jsou reálná či komplexní čísla a  $\omega > 0$ .  $\square$

Nechť

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

Za předpokladu stejnosměrné konvergence, můžeme psát:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Důkaz tohoto tvrzení zde provádět nebudeme. Co zde však uvedeme je, že předchozí vzorce mají smysl, jakmile je funkce  $f(t)$  integrovatelná v intervalu  $\langle 0, T \rangle$ , kde  $T$  je perioda funkce  $f(t)$ . Lze tudíž v každém takovém případě funkci  $f(t)$  formálně vyjádřit *Fourierovou řadou*.

**Definice 8** Necht' je funkce  $f$  periodická s periodou  $T > 0$  a integrovatelná na intervalu  $\langle 0, T \rangle$  Řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t),$$

kde

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos k\omega t dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin k\omega t dt, k = 0, 1, 2, \dots$$

nazýváme Fourierovou řadou funkce  $f(t)$  □

**Příklad 15** Napište Fourierovu řadu funkce  $f(t)$ , která je periodickým prodloužením funkce: a)  $f(t) = t, t \in \langle 0, 1 \rangle$  b)  $f(t) = t^2, t \in \langle -1, 1 \rangle$ .

*Řešení:* a) Je  $T = 1, \omega = 2\pi$ . Potom dostaneme:

$$a_0 = 2 \int_0^1 t dt = [t^2]_0^1 = 1$$

$$a_k = 2 \int_0^1 t \cos 2k\pi t dt = 2 \left[ t \frac{\sin 2k\pi t}{2k\pi} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sin 2k\pi t}{2k\pi} dt = 0 - 2 \left[ -\frac{\cos 2k\pi t}{4k^2\pi^2} \right]_0^1 = \frac{\cos 2k\pi - 1}{2k^2\pi^2} = 0;$$

$$b_k = 2 \int_0^1 t \sin 2k\pi t dt = 2 \left[ -t \frac{\cos 2k\pi t}{2k\pi} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{\cos 2k\pi t}{2k\pi} dt = -\frac{1}{k\pi} + 2 \left[ \frac{\sin 2k\pi t}{4k^2\pi^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{k\pi};$$

Tedy

$$f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \sin 2k\pi t.$$

□

*Řešení:* b) Je  $T = 2, \omega = \pi$ :

$$a_0 = 2 \int_{-1}^1 t^2 dt = 2 \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3};$$

$$a_k = \int_{-1}^1 t^2 \cos k\pi t dt = \left[ t^2 \frac{\sin k\pi t}{k\pi} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2t \frac{\sin k\pi t}{k\pi} dt =$$

$$= \left\{ - \left[ 2t \frac{-\cos k\pi t}{k^2\pi^2} \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{\cos k\pi t}{k^2\pi^2} dt \right\} = \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2} + \frac{-2}{k^2\pi^2} \left[ \frac{\sin k\pi t}{k\pi} \right]_{-1}^1 = \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2}.$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \int_{-1}^1 t^2 \sin k\pi t dt = \left[ t^2 \frac{\cos k\pi t}{k\pi} \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 2t \frac{\cos k\pi t}{k\pi} dt = \\
&= 0 + \left[ 2t \frac{\sin k\pi t}{k^2\pi^2} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{\sin k\pi t}{k^2\pi^2} dt = 2 \left[ \frac{\cos k\pi t}{k^3\pi^3} \right]_{-1}^1 = 0.
\end{aligned}$$

Tudíž

$$f(t) = \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2} \cos 2k\pi t.$$

□

Fourierova řada je limitou posloupnosti trigonometrických polynomů  $T_n$  (6), které mají část složenou z kosinů a část složenou ze sinů. Funkce kosinus je sudá, funkce sinus je lichá. Všimněme si, jak se tato skutečnost projeví ve výpočtu Fourierovy řady. V příkladě (15.b) byla funkce sudá a odpovídající řada měla pouze sudé členy, kosinové. V příkladě (15.a) je funkce  $f(t) - \frac{1}{2}$  lichá a odpovídající řada také, obsahuje pouze sinové členy. Snadno zjistíme, že tato vlastnost platí obecně.

**Definice 9 (Sudá/lichá Fourierova transformace)** *Nechť je funkce  $f(t)$  sudá, periodická s periodou  $T > 0$ , pak příslušná Fourierova řada je kosinová, tj.*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t$$

a

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt, b_k = 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

*Je-li funkce  $f$  lichá, pak bude výsledná Fourierova transformace sinová, tj*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t$$

a

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t dt, b_k = 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

□

Důkaz tohto tvrzení zde provádět nebudeme.



**Definice 10 (Periodické prodloužení)** Je-li funkce  $f^* : \langle 0, T \rangle \rightarrow R(C)$  definovaná pro  $t \in \langle 0, T \rangle$ , pak jejím periodickým prodloužením je periodická funkce  $f(t)$  definovaná předpisem

$$f(t) = f^*(t - kT), t \in \langle kT, (k+1)T \rangle,$$

$k$  je celé číslo. Ještě uveďme, že používáme označení  $f$  jak pro původní funkci  $f^*$  tak i pro její periodické prodloužení.  $\square$

**Příklad 16** Určete Fourierovu řadu funkce, která je periodickým prodloužením funkce:  $f(t) = \sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle$ .

*Řešení:* Určitě  $T = \pi, \omega = 2$  a funkce  $f$  je sudá  $\Rightarrow$  Fourierova řada je kosinová. Ze vztahů z definice 9 vyplývá:

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \frac{4}{\pi};$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos 2kt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(2k+1)t - \sin(2k-1)t) dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos(2k+1)t}{2k+1} + \frac{\cos(2k-1)t}{2k-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right) = \frac{-4}{\pi(4k^2-1)} \end{aligned}$$

$$b_k = 0.$$

Tudíž

$$f(t) = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4k^2-1)} \cos 2kt.$$

$\square$

**Definice 11** Nechť funkce  $f(t)$  je periodická s periodou  $T > 0$  a je po úsecích spojitá a má spojitou derivaci. Je-li

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

Fourierova řada funkce  $f$ , pak platí: a) Má-li také funkce  $\dot{f}(t)$  po úsecích spojitou derivaci, pak Fourierova řada této funkce má tvar

$$\dot{f}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (k\omega b_k \cos k\omega t - k\omega a_k \sin k\omega t)$$

b) je-li  $a_0 = 0$ , pak Fourierova řada funkce  $F(t) = \int_0^t f(u) du$  má tvar

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{b_k}{k\omega} \cos k\omega t + \frac{a_k}{k\omega} \sin k\omega t \right).$$

$\square$

Víme, že funkci tvaru  $a \cos \omega t + b \sin \omega t$  lze přepsat na tvar  $A \sin(\omega t + \varphi)$ . Porovnáme-li obě vyjádření dostaneme:

$$A \cos \varphi = b, \quad A \sin \varphi = a,$$

To znamená  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  a  $\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

**Definice 12 (Aplitudově-fázový tvar.)** *Je-li dána řada*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t),$$

*pak ji lze napsat ve tvaru*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \sin(k\omega t + \varphi_k),$$

*kde  $\varphi_k$  je řešením rovnic*

$$\cos \varphi_k = \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \quad \sin \varphi_k = \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}.$$

□

**Definice 13 (Komplexní tvar Fourierovy řady)** *Jestliže použijeme exponenciálních vztahů funkcí sinus a cosinus dostaneme komplexní tvar Fourierovy řady platí:*

$$\cos(k\omega t) = \frac{1}{2}(e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}),$$

$$\sin(k\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}).$$

*Aplikujeme-li tyto vzorce na Fourierovu řadu (1), můžeme ji psát v komplexním tvaru:*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega t}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{\alpha-L}^{\alpha+L} f(t) e^{-jk\omega t} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18)$$

*kde  $\alpha$  je střed periody,  $L$  je půlperiody,  $T = 2L$*

□

**Příklad 17** Vyjádřete Fourierovou řadu periodického prodloužení funkce  $f(t) = e^t, t \in \langle 0, 1 \rangle$  v komplexním tvaru:

*Řešení:*

$T = 1, \omega = 2\pi$ , pak je

$$C_k = \int_0^1 e^t e^{-j2\pi kt} dt = \int_0^1 e^{t(1-j2\pi k)} dt = \left[ \frac{e^{t(1-j2\pi k)}}{1-2k\pi j} \right]_0^1 = \frac{e \cdot e^{-2k\pi j} - 1}{1-2k\pi j} = \frac{(e-1)(1+2k\pi j)}{1+4\pi^2 k^2}$$

a tedy

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(e-1)(1+k\pi j)}{1+4k^2\pi^2} e^{j2k\pi t}$$

□

V předchozím výkladu jsme ukázali, že každou periodickou funkci  $f(t)$  s periodou  $T > 0$ ,  $T \in \mathcal{R}$  jsme schopni vyjádřit jako součet nekonečné řady tvořené *sinovými* a *kosinovými* členy. Neperiodickou funkci  $f(t)$ ,  $t \in \mathcal{R}$  která je absolutně integrovatelná můžeme chápat jako mezní případ funkce periodické pro  $t \rightarrow \infty$ . Lze předpokládat, že v tomto případě Fourierova řada přejde ve **Fourierův integrál**. Kvůli obtížnosti provedení limitních úvah se Fourierův integrál často odvozuje samostatně nezávisle na Fourierově řadě. V následujícím odvození se budeme snažit, aby byl dostatečně zřejmý vztah mezi Fourierovou řadou a Fourierovým integrálem.

Ještě zavedeme integrál 18 v novém označení, aby nedošlo k záměně (zaměníme  $t$  za  $x$ )

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{\alpha-L}^{\alpha+L} f(x) e^{-jk\omega x} dx \quad (19)$$

Dosadíme-li (19) do řady  $f(t)$  (18) dostaneme:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{\alpha-L}^{\alpha+L} f(x) e^{-jk\omega x} e^{jk\omega t} dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{\alpha-L}^{\alpha+L} f(x) e^{jk\omega(t-x)} dx \quad (20)$$

Uvědomme si, že  $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{L}$ , pak 20 můžeme přepsat na:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{2L\pi} \int_{\alpha-L}^{\alpha+L} f(x) e^{jk\omega(t-x)} dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \Delta\omega \int_{\alpha-L}^{\alpha+L} f(x) e^{jk\omega(t-x)} dx \quad (21)$$

V případě limitního přechodu ( $T \rightarrow \infty \Rightarrow L \rightarrow \infty$ ) je zřejmě  $\Delta\omega \rightarrow 0$  a suma v posledním vztahu přejde na integrál:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-jk\omega x} dx \right] e^{jk\omega t} d\omega \quad (22)$$

**Definice 14 (Komplexní Fourierův obraz)** Označíme-li vnitřní integrál z 22 jako funkci  $F(j\omega)$  a zároveň označíme  $t$  za  $x$ , pak funkci

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-jk\omega t} dt. \quad (23)$$

nazveme **komplexním Fourierovým obrazem** funkce  $f(t)$ . Je tedy zřejmé, že funkce  $f(t)$  je předmětem (originálem). □

**Definice 15 (Fourierova transformace)** Zobrazení, které přiřazuje předmětu  $f(t)$  Fourierův obraz  $F(j\omega)$  dle definičního vztahu 23 nazýváme **Fourierovou transformací**. Fourierův obraz  $F(j\omega)$  též nazýváme spektrální funkce (hustota) originálu  $f$ .  $\square$

**Definice 16 (Zpětná Fourierova transformace)** Za podmínky existence dvojného, konvergentního Fourierova integrálu (22), definujeme zpětnou Fourierovu transformaci vztahem:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} F(j\omega) e^{jk\omega t} d\omega. \quad (24)$$

$\square$

Porovnáme-li vzorec pro Fourierovu transformaci (23) s Laplaceovou transformací (1):

- definiční obor  $f$  pro Fourierovu transformaci je celá osa  $\mathcal{R}$  namísto kladné poloosy  $\mathcal{R}_+$  u Laplaceovy transformace
- rozepíšeme-li  $s$  z na  $s = Res + jIm s = \sigma + j\omega$ , pak pro Fourierovu transformaci  $s = j\omega$

Pro výpočet Fourierovy transformace využijeme aparátu Laplaceovy transformace a ve výsledném vztahu dosadíme  $s = j\omega$ .

**Příklad 18** Aparátu Fourierovy transformace použijte pro výpočet Fourierova obrazu funkce  $f(t) = 3t + \sin 2t$ .

*Řešení:* Nejprve určíme  $\mathcal{L}(f(t))$ :

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{3}{s^2} - \frac{2}{s^2 + 4},$$

yní dosadíme  $s = j\omega$  a dostaneme Fourierův obraz funkce  $f(t)$

$$F(j\omega) = -\frac{3}{\omega^2} - \frac{2}{4 - \omega^2}$$

$\square$

## 3 Neřešené příklady

### 3.1 Laplaceova transformace

#### 3.1.1 Přímá Laplaceova transformace

Pomocí základních vztahů transformace a s využitím uvedených obrazů některých funkcí určete obraz  $F(s)$  k předmětu  $f(t)$ .

**Příklad 19**

$$f(t) = 2 + 3te^{-2t} - 4t^2e^{-3t}$$

$$F(s) = \frac{2}{s} + \frac{3}{(s+2)^2}$$

Použijeme linearitu (2) a vztahy  $e^{at}f(t) \hat{=} F(s-a)$ ,  $a = -2$ ,  $a = -3$ ,  $1 \hat{=} \frac{1}{s}$ ,  $t \hat{=} \frac{1}{s^2}$ ,  $t^2 \hat{=} \frac{2}{s^3}$

**Příklad 20**

$$f(t) = t(\sin 2t + 4 \cos 2t)$$

$$F(s) = -\left(\frac{2}{s^2+4} + \frac{4s}{s^2+4}\right)'$$

**Příklad 21**

$$f(t) = 3 \sin 3t \cos t$$

a podle součtového vzorce je  $f(t) = \frac{3}{2}(\sin 4t + \sin 2t)$ , tedy

$$F(s) = \frac{3}{2} \left( \frac{4}{s^2+16} + \frac{2}{s^2+4} \right) = \frac{3}{s^2+4} + \frac{6}{s^2+16}$$

**Příklad 22**

$$f(t) = e^{-2t}(3 \cos 3t - 4 \sin 3t)$$

$$F(s) = \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+9} - \frac{4 \cdot 3}{(s+2)^2+9} = \frac{3s-6}{s^2+4s+13}$$

$f(t)$	$F(s)$
1. $f(t) = 3t^2 - 5t + 1$	$[F(s) = \frac{6}{s^3} - \frac{5}{s^2} + \frac{1}{s}]$
2. $f(t) = 2e^t - 5e^{-2t} + 5e^{-t}$	$[F(s) = \frac{2}{s-1} - \frac{5}{s+2} + \frac{5}{s+1}]$
3. $f(t) = te^{-2t} - t^2e^{-3t}$	$[F(s) = \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{5}{s+2} + \frac{5}{s+1}]$
4. $f(t) = 6te^{-2t} - 2e^{-t} + t^3e^{-4t}$	$[F(s) = \frac{6}{(s+2)^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{6}{(s+4)^4}]$
5. $f(t) = 2 \sin t - 3 \cos$	$[F(s) = \frac{2-3s}{(s^2+1)}]$
6. $f(t) = 4 \cos 2t \cos 3t$	$[F(s) = \frac{3s(s^2+13)}{(s^2+1)(s^2+25)}]$
7. $f(t) = 6 \sin 3t \cos t$	$[F(s) = \frac{18(s^2+8)}{(s^2+16)(s^2+4)}]$
8. $f(t) = 5 \sin 4t \sin t$	$[F(s) = \frac{72}{(s^2+9)(s^2+25)}]$
9. $f(t) = 4e^{-2t} \sin^2 3t$	$[F(s) = \frac{72}{(s+2)(s^2+4s+40)}]$
10. $f(t) = 3e^{-t} \sin^2 2t$	$[F(s) = \frac{3(2s^2+3s+17)}{2(s+1)(2s^2+3s+17)}]$
11. $f(t) = ta^t, a > 0$	$[F(s) = \frac{1}{(s-\ln a)^2}], a^t = e^{t \ln a}$

### 3.1.2 Zpětná Laplaceova transformace

$F(s)$	$f(t)$
1. $F(s) = \frac{2s+3}{s^2+4}$	$[f(t) = 2 \cos 2t + \frac{3}{2} \sin 2t, t > 0]$
2. $F(s) = \frac{3s+4}{s^2+2s+10}$	$[f(t) = e^{-t}(3 \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t), t > 0]$
3. $F(s) = \frac{3s-5}{s^2+2s+5}$	$[f(t) = e^{-t}(3 \cos 2t - 4 \sin 2t), t > 0]$
4. $F(s) = \frac{6s+3}{s^3+5s^2+9s+5}$	$[f(t) = -\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}(\cos t + 5 \sin t), t > 0]$
5. $F(s) = \frac{4s-3}{s^2(s+1)^2(s+2)}$	$[f(t) = -\frac{3}{2}t + \frac{23}{4} - 7te^{-t} - 3e^{-t} - \frac{11}{4}e^{-2t}, t > 0]$
6. $F(s) = \frac{2s+3}{(s^2+4)^2}$	$[f(t) = -\frac{3}{8}t \cos 2t + \frac{1}{2}t \sin 2t + \frac{3}{16} \sin 2t, t > 0]$
7. $F(s) = \frac{2s^2-4s+5}{s^3+7s^2+9s+8}$	$[f(t) = \frac{11}{3}e^{-t} - \frac{21}{2}e^{-2t} + \frac{43}{6}e^{-4t}, t > 0]$
8. $F(s) = \frac{4s+5}{s^2+6s+13}$	$[f(t) = e^{-3t}(4 \cos 2t - \frac{7}{2} \sin 2t), t > 0]$
9. $F(s) = \frac{3s^2-6s+2}{(s+1)^3(s+3)}$	$[f(t) = \frac{11}{2}t^2e^{-t} - \frac{35}{4}te^{-t} - \frac{47}{8}e^{-t} - \frac{47}{8}e^{-3t}, t > 0]$

### 3.1.3 Diferenciální rovnice

Nalezněte řešení dané rovnice na intervalu  $\langle 0, \infty \rangle$ , které vyhovuje uvedeným počátečním podmínkám.

- $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 3x(t) = 3e^{-2t}; x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$   $[x(t) = 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-2t}]$
- $\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) - 3x(t) = 3 - 4e^t; x(0) = 2, \dot{x}(0) = 3$   $[x(t) = -1 + e^t + e^{-t} + e^{3t}]$
- $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 2x(t) = e^{-t}; x(0) = 2, \dot{x}(0) = 1$   $[x(t) = e^{-t} + e^{-t} \cos t - 3e^{-t} \sin t]$
- $\ddot{x}(t) + x(t) = 3 \sin 2t; x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$   $[x(t) = -\sin 2t + \cos t + 2 \sin t]$
- $\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + x(t) = 2e^t + t - 3; x(1) = 0, \dot{x}(1) = 3e + 1$   $[x(t) = (t^2 + t - 2)e^t + t - 1]$
- $\dot{x}(t) + 4x(t) + 13 \int_0^t x(u) du = 0; x(0_+) = 1$   $[x(t) = e^{-2t}(\cos 3t \frac{2}{3} \sin 3t)]$

## 3.2 Fourierova transformace

Určete rozvoj ve Fourierovu řadu následujících funkcí:

#### Příklad 23

$$a) f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & \text{pro } t \in \langle 1, 2 \rangle \end{cases}$$

$$b) f(t) = \begin{cases} A & \text{pro } t \in \langle 0, a \rangle \\ \frac{A}{a}(2a - t) & \text{pro } t \in \langle a, 2a \rangle \end{cases}$$

$$c) f(t) = t^2 \quad \text{pro} \quad t \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

$$d) f(t) = t^2 \quad \text{pro} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

*Řešení:*

$$a) T = 2, \omega = \pi; f(t) \approx \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\cos k\pi - 1}{\pi^2 k^2} \cos k\pi t - \frac{1}{k\pi} \sin k\pi t \right);$$

$$b) T = 2a, \omega = \frac{\pi}{a}; f(t) \approx \frac{3A}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{A(\cos k\pi - 1)}{\pi^2 k^2} \cos \frac{k\pi t}{a} + \frac{A}{k\pi} \sin \frac{k\pi t}{a} \right);$$

$$c) T = 2\pi, \omega = 1; f(t) \approx \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kt;$$

$$c) T = 1, \omega = 2\pi; f(t) \approx \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k^2 \pi^2} \cos 2k\pi t - \frac{1}{k\pi} \sin 2k\pi t \right);$$

□

#### Příklad 24

$$a) f(t) = t \quad \text{pro} \quad t \in \langle -2, 2 \rangle$$

$$b) f(t) = 2 \sin t \quad \text{pro} \quad t \in \langle 0, \pi \rangle$$

$$a) f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad t \in \langle 0, \pi \rangle \\ \sin t & \text{pro} \quad t \in \langle \pi, 2\pi \rangle \end{cases}$$

$$d) f(t) = \frac{A}{a}(a - |t|) \quad \text{pro} \quad t \in \langle -a, a \rangle$$

$$e) f(t) = \cos t \quad \text{pro} \quad t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$f) f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{pro} \quad t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ 0 & \text{pro} \quad t \in \left\langle -\pi, -\frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left( \frac{\pi}{2}, \pi \right) \end{cases}$$

*Řešení:*

$$a) T = 4, \omega = \frac{\pi}{2}; f(t) \approx \frac{4}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi}{2} t;$$

$$b) T = \pi, \omega = 2; f(t) \approx \frac{4}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(4k^2 - 1)} \cos 2kt;$$

$$c) T = 2\pi, \omega = 1; f(t) \approx \frac{-1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(4k^2 - 1)} \cos 2kt;$$

$$d) T = 2a, \omega = \frac{\pi}{a}; f(t) \approx \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi^2(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{a};$$

$$e) T = 2a, \omega = 2; f(t) \approx \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \cos 2kt;$$

$$f) T = 2\pi, \omega = 1; f(t) \approx \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos t - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{\pi(4k^2-1)} \cos 2kt;$$

□

**Příklad 25** Je dána periodická funkce  $f$ , která na základním intervalu periodicity  $\langle 0, 2\pi \rangle$  je dána vztahem

$$a) \quad f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pro } t \in \langle 0, \pi \rangle \\ 0, & \text{pro } t \in \langle \pi, 2\pi \rangle \end{cases}$$

$$b) \quad f(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1, & \text{pro } t \in \langle 1, 2 \rangle \end{cases}$$

$$c) \quad f(t) = 1 - t$$

napište rozvoj funkce  $f$  ve Fourierovu řadu.

*Řešení:*

$$a) \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k\pi} \sin kt \quad b) \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k\pi} \sin k\pi t \quad c) \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi t}{k\pi}.$$

□

**Příklad 26** V komplexním tvaru vyjádřete Fourierovu řadu funkce, která je periodickým prodloužením zadané funkce:

$$a) f(t) = e^{at}, t \in \langle 0, T \rangle \quad c) f(t) = \sinh(at), t \in \langle -b, b \rangle$$

$$b) f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0, \pi \rangle \\ 0, & t \in \langle \pi, 2\pi \rangle \end{cases} \quad d) f(t) = \cosh(at), t \in \langle -b, b \rangle$$

*Řešení:*

$$a) T = T, \omega = \frac{2\pi}{T}; \quad f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{aT} - 1)(aT + 2\pi k j)}{a^2 T^2 + 4\pi^2 k^2} e^{\frac{j2k\pi t}{T}};$$

$$b) T = 2\pi, \omega = 1; \quad f(t) \approx \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{-j}{(2k+1)\pi} e^{j(2k+1)t} + \frac{j}{(2k+1)\pi} e^{-j(2k+1)t} \right);$$



$$c) T = 2b, \omega = \frac{\pi}{b}; \quad f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k j k \pi \sinh(ab)}{a^2 b^2 + k^2 \pi^2} e^{\frac{j k \pi t}{b}};$$

$$c) T = 2b, \omega = \frac{\pi}{b}; \quad f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k ab \sinh(ab)}{a^2 b^2 + k^2 \pi^2} e^{\frac{j k \pi t}{b}};$$

□

**Příklad 27** V kosinovou Fourierovou řadu rozviňte funkci:

$$\begin{array}{ll} a) f(t) = t, & t \in \langle 0, 1 \rangle \\ c) f(t) = t^2, & t \in \langle 0, \pi \rangle \end{array} \quad \begin{array}{ll} b) f(t) = 2 - t, & t \in \langle 0, 2 \rangle \\ d) f(t) = \sin t, & t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \end{array}$$

*Řešení:*

$$a) T = 2, \omega = \pi, f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)\pi t;$$

$$b) T = 4, \omega = \frac{\pi}{2}, f(t) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2};$$

$$c) T = 2\pi, \omega = 1, f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kt;$$

$$d) T = \pi, \omega = 2, f(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(4k^2 - 1)} \cos 2kt;$$

□

# REÁLNÝ MODEL

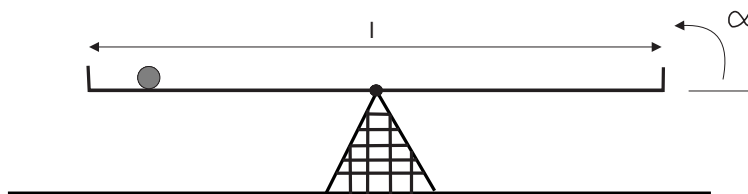
## 4 Kulička na tyči

### 4.1 Identifikace

#### 4.1.1 Popis systému

Kulička na tyči (*Ball-and-beam*) je dynamický systém, navržen pro laboratorní experimenty v laboratořích automatického řízení.

Model B&B - Utia je fyzikální systém složený z servomotoru (vnitřní servosmyčka), mechanické převodovky a tyče s kuličkou. Vstupem do soustavy je napětí na servomotor ( $U_1$ ), výstupem je napětí snímače úměrné poloze kuličky. Model je připojen k PC přes I/O kartu a je možné jej řídit z prostředí Matlab + RealTime toolbox. Jednoduchý obrázek modelu:

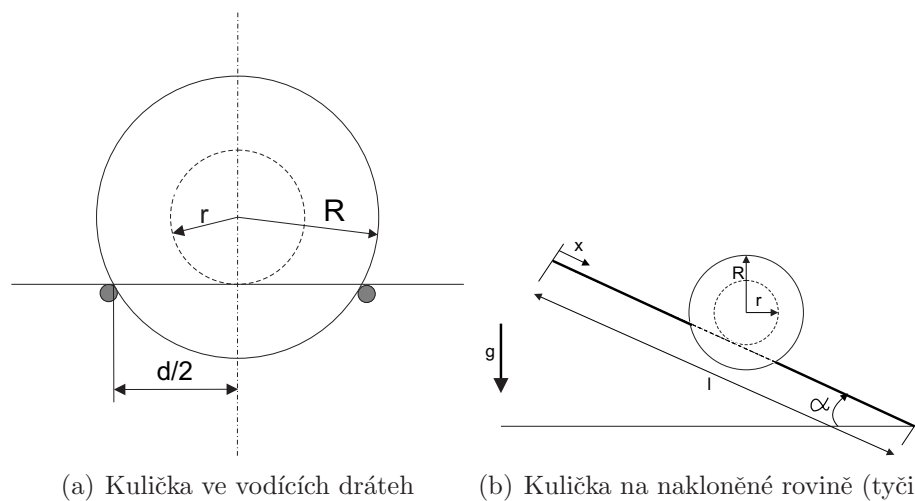


Obrázek 1: Kulička na tyči

Význam popisků použitých v obr.1:

- $\alpha$  úhel náklonu tyče
- $l$  délka tyče (85cm).

Velmi důležitou skutečnost ukazuje následující obrázek:



Obrázek 2: Schéma kuličky valící se po tyči

Význam popisků použitých v obr.2:

- $d$  rozteč vodících lišt (15mm)
- $R$  poloměr kuličky (9.5mm).
- $r$  poloměr po kterém se kulička valí  $r = \sqrt{R^2 - (\frac{d}{2})^2}$ .
- $g$  tíhové zrychlení  $g = 9.81 \frac{kg}{s^2}$ .

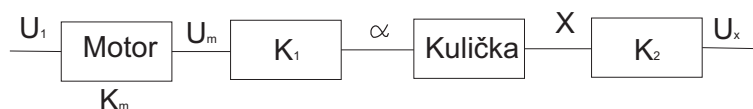
Na předchozím obrázku (obr.2) je vidět, že kulička se neodvaluje po celém svém poloměru ( $R$ ), ale po poloměru ( $r$ ), který je menší, úměrný rozteči vodících drátů ( $d$ ).

#### 4.1.2 Způsob identifikace

Identifikaci modelu kuličky na tyči provedeme jako identifikaci modelu tyče z přechodových charakteristik a pohybu kuličky po tyči z matematického popisu systému. Změříme přechodovou charakteristiku v nějakém bodě  $P_0$  a z ní určíme přenos systému. V našem případě půjde o systém druhého řádu ve tvaru

$$G_t(s) = \frac{K_m}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

Základní (blokové) schéma soustavy je:



Obrázek 3: Blokové schéma soustavy

a z toho budeme vycházet v dalších částech tohoto textu.  
 Identifikaci pohybu kuličky po tyči provedeme z popisu systému viz. obr.2 a obr.1

## 4.2 Model pohybu kuličky po nakloněné rovině

Odvození popisu tohoto modelu provedeme pomocí Lagrangeových rovnic.  
 Nejprve vyjádříme kinetickou a potenciální energii kuličky.  
 Moment setrvačnosti kuličky:

$$J = \int_m r^2 dm \quad a \quad dV = S \cdot dx = \pi(R^2 - x^2)dx,$$

z toho plyne

$$\begin{aligned} J &= \int_V \rho dV = 2 \int_0^R (R^2 - x^2) \rho \pi (R^2 - x^2) dx = \\ &= 2\pi\rho \int_0^R (R^4 - 2R^2x^2 + x^4) dx = 2\pi\rho \left( R^5 - \frac{2}{5}R^5 + \frac{1}{5}R^5 \right) = \frac{2}{5}mR^2, \end{aligned}$$

kde  $R$  je poloměr kuličky a  $m = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$  a  $r$  je poloměr po kterém se kulička valí.  
 Kinetická energie

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2} \left( m + \frac{J}{r^2} \right) v^2.$$

Potenciální energie

$$E_p = mg(l - x) \sin \alpha + E_{P0}.$$

Lagrangeova funkce systému je definována vztahem:

$$L = E_k - E_p = \frac{1}{2} \left( m + \frac{J}{r^2} \right) v^2 - mg(l - x) \sin \alpha + E_{P0},$$

její derivace

$$\frac{\delta L}{\delta x} = mg \sin \alpha \quad \frac{\delta L}{\delta v} = \left( m + \frac{J}{r^2} \right) v \quad \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta v} = \left( m + \frac{J}{r^2} \right) \ddot{x}$$

Výslednou rovnici dostaneme z Lagrangeovy rovnice:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta v} - \frac{\delta L}{\delta x} \Rightarrow \left( m + \frac{J}{r^2} \right) \ddot{x} = mg \sin \alpha \Rightarrow \left( 1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{r^2} \right) \ddot{x} = g \sin \alpha$$

Z toho za předpokladu  $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$  dostaneme rovnici popisující pohyb kuličky po nakloněné rovině, aniž bychom uvažovali tření a valivý odpor:

$$\ddot{x} = \frac{g}{\left( 1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \right)} \sin \alpha = c \sin \alpha = F(\alpha) \quad (25)$$

Model systému v okolí pracovního bodu je nelineární, tzn. že má nelineární členy (sin), proto provedeme jeho linearizaci. Jako pracovní bod zvolíme vodorovnou polohu tyče, tedy  $\alpha_0 = 0$ . Ještě je třeba říci, že tyč se naklání jen o velmi malé úhly, proto by měl linearizovaný model platit v celém rozsahu.

$$\frac{\delta F(\alpha)}{\delta \alpha} = c \cdot \cos \alpha|_{\alpha_0} = c \cdot \cos . (\alpha_0) = c\alpha.$$

Dále platí:

$$\Delta \ddot{x} = \frac{\delta F(\alpha)}{\delta \alpha} \Delta \alpha = c \Delta \alpha.$$

Protože platí:  $\ddot{x}_0 = 0$  a  $\alpha_0 = 0$ , můžeme psát výslednou rovnici po linearizaci:

$$\ddot{x} = c\alpha \quad (26)$$

Přenos vypočtený z rovnice 26 je

$$G_k(s) = \frac{x(s)}{\alpha(s)} = \frac{c}{s^2} = \frac{4.758}{s^2} \quad (27)$$

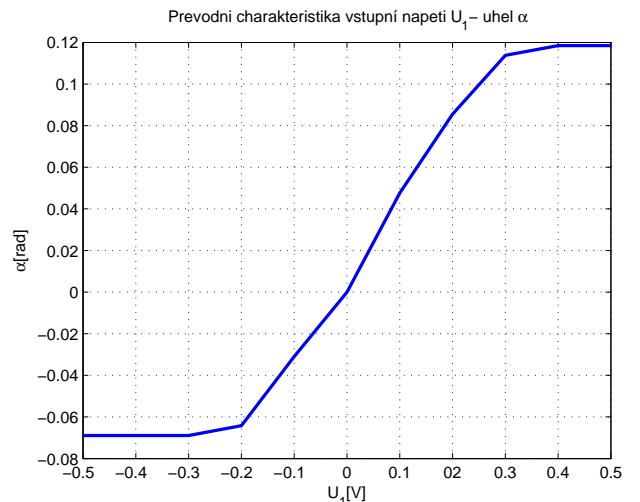
#### 4.2.1 Převodní charakteristiky

Nyní se zaměříme na převodní charakteristiky, jednak vstupního napětí ( $U_1$ ) na úhel náklonu tyče ( $\alpha$ ), jednak polohy kuličky ( $x$ ) na výstupním napětí ( $U_x$ ). Ty jsou nezbytné pro správné odvození pracovního bodu, který musí být v lineární oblasti. Tyto charakteristiky jsou také nepostradatelné pro správné zkonstruování modelu systému.

Převodní charakteristika vstupní napětí  $U_1$ -úhel  $\alpha$ :

$U_1[V]$	$\alpha[rad]$
-0.5	-0.0689
-0.4	-0.0689
-0.3	-0.0689
-0.2	-0.0642
-0.1	-0.0394
0.0	0.0000
0.1	0.0476
0.2	0.0855
0.3	0.1138
0.4	0.1185
0.5	0.1185

tabulka č.1

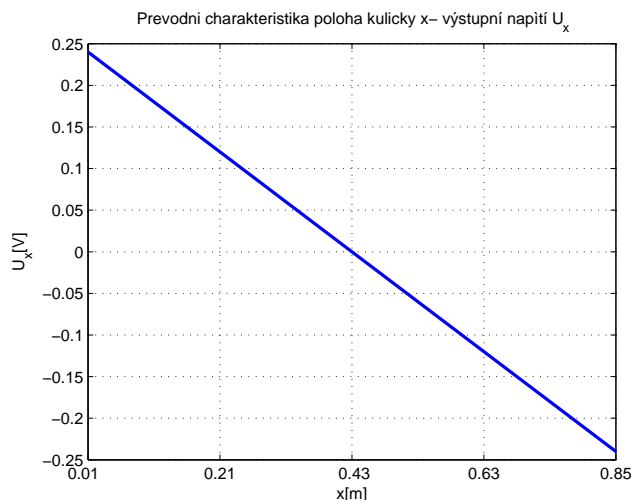


Obrázek 4: Převodní charakteristika  $U_1 \rightarrow \alpha$

Převodní charakteristika poloha kuličky  $x$ -výstupní napětí  $U_x$

$U_x[V]$	$x[m]$
-0.24	0.85
0.00	0.43
0.24	0.01

tabulka č.2



Obrázek 5: Převodní charakteristika  $x \rightarrow U_x$

Z převodní charakteristiky  $U_1 \rightarrow \alpha$  obr.5 vyplývá, že systém se chová lineárně pro  $U_1 \in [-0.2; 0.3]$ . V tomto intervalu určíme konstantu  $K_t$ , což je celkové zesílení prvních dvou bloků z obr.3,  $K_t = K_m K_1$ .

$$K_t = \frac{\Delta \alpha}{\Delta U_1}.$$

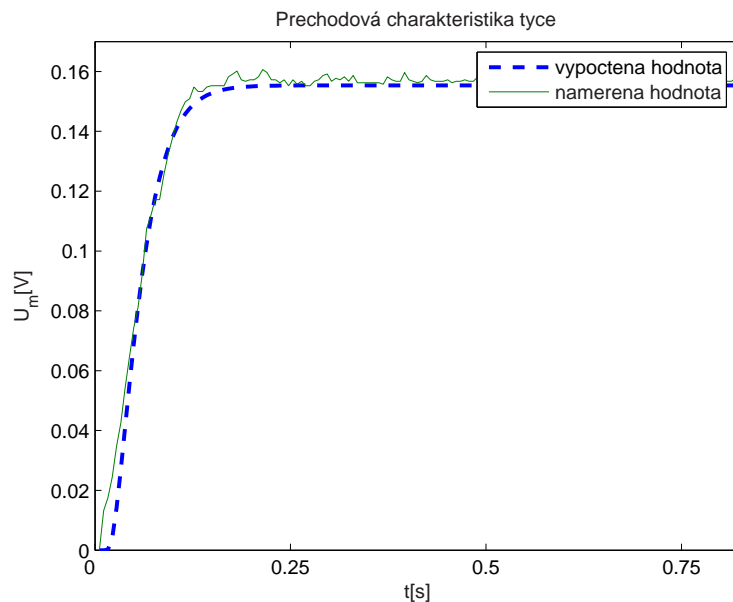
Dále z převodní charakteristiky  $x \rightarrow U_x$  obr.5 určíme konstantu  $K_2$  jako:

$$K_2 = \frac{\Delta U_x}{\Delta x} = 0.2354$$

### 4.3 Identifikace systému tyče

Identifikaci systému provedeme z přechodové charakteristiky náklonu tyče obr.6. Přechodovou charakteristiku jsme měřili pro skok vstupního napětí  $U_1$  z 0 na  $-0.2$ .

Přechodová charakteristika tyče:



Obrázek 6: Přechodová charakteristika systému tyče

Mnou zjištěný přenos pro tyč z obr.6

$$G_t(s) = \frac{U_m(s)}{U_1(s)} = \frac{K_m}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} = \frac{0.778}{(1 + 0.02s)(1 + 0.02s)} = \frac{1980}{s^2 + 100s + 2500},$$

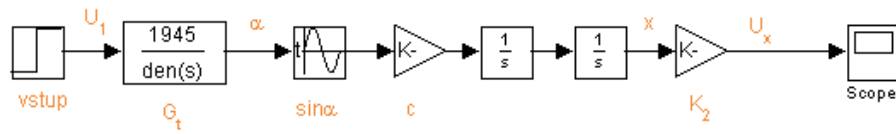
kde konstanta  $K_1$  je již zahrnuta v přenosu  $G_t(s)$ .

Ze zjištěných přenosů  $G_t, G_k$  a konstanty  $K_2$  vypočteme celkový přenos soustavy jako  $G(s) = G_t(s) \cdot G_k(s) \cdot K_2$  a ten je pro zvolený skok:

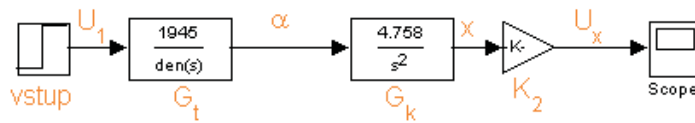
$$G(s) = \frac{1980}{s^2 + 100s + 2500} \frac{4.758}{s^2} 0.2345 = \frac{2178}{s^4 + 100s^3 + 2500s^2} \quad (28)$$

#### 4.3.1 Simulace modelu v Simulinku (MATLAB)

Namodelujeme nelinerizovaný i linearizovaný systém v programu Simulink. Protože pracujeme v rozsahu malých úhlů (největší úhel náklonu tyče je cca  $6^\circ$  viz. obr.5) okolí pracovního bodu je dostatečně malé v celém rozsahu měření a výsledné charakteristiky obou modelů můžeme kreslit do jednoho grafu.

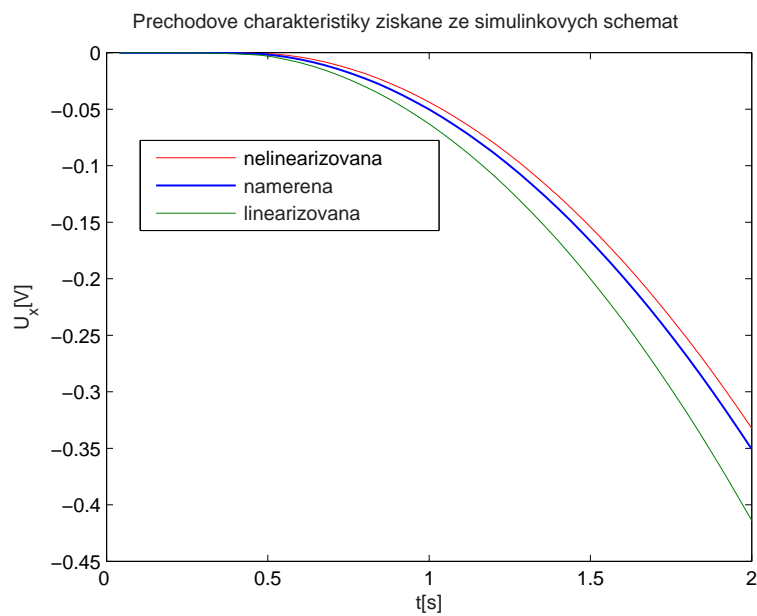


Obrázek 7: Nelinearizovaný simulinkový model soustavy



Obrázek 8: Linearizovaný simulinkový model soustavy

Charakteristiky naměřené ze simulinkových modelů:



Obrázek 9: Charakteristiky soustavy z obou modelů

Z naměřených charakteristik je vidět co provedla s průběhem linearizace. Nelinearizovaný model se svou charakteristikou přimyká lépe k charakteristice naměřené.



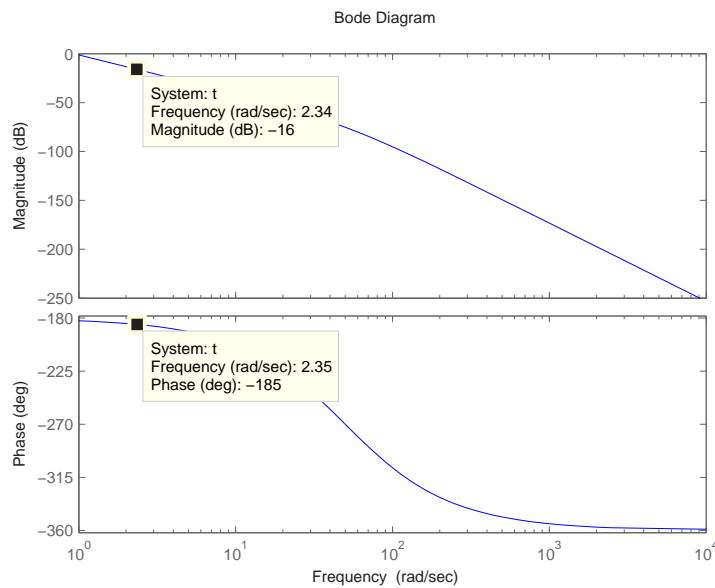
## 4.4 Regulátory

Nyní se budeme zabývat reuglátory a to hlavně regulátory typu *PDf*, které jsou pro regulaci našeho modelu nejvhodnější, protože nevnášejí do systému další integrační složky. Další typy regulátorů (*PIDf*) jsou pro regulaci méně vhodné. Tyto regulátory i přes derivační složku zvětšují astatismus. Je dobré používat regulátory s filtrem, který zamezuje přílišnému zesilování vysokofrekvenčních šumů, atd.

Ustálená odchylka bude nulová, protože sama soustava svým astatismem vnáší do regulované soustavy itegrační složku. Proto navrhovat regulátory typu *PI* ani *I* není vůbec vhodné.

### 4.4.1 Emperické metody

Metoda *Ziegler-Nichols* je metodou, která z  $\omega_k$  a kritického zesílení  $K_k$ , počítá všechny typy regulátorů podle empericky daných vztahů viz. [3]. Mezní frekvence  $\omega_k$  je frekvence, při které se soustava dostává do ustálených kmitů, ty najdeme například ve frekvenční charakteristice v místě průchodu argumentu hodnotou  $\varphi = -180$ :



Obrázek 10: Frekvenční charakteristika soustavy  $G(s)$

Z frekvenční charakteristiky je vidět, že není možné zjistit  $\omega_k$ , proto touto metodou není v našem případě možné navrhnout regulátor.

#### 4.4.2 Frekvenční metody

Návrhy frekvenčními metodami popsanými v [1] je dobře známou a prozkoušenou metodou. Spočívá v určení *fázové* bezpečnosti  $PM$  z frekvenční charakteristiky obr.10, u naší soustavy budeme muset volit pro  $PDf$  regulátor  $PM$  nižší než obvyklých  $45^\circ$ . Ze znalosti  $PM$  a  $\omega_D$  potom vypočteme koeficienty jednotlivých regulátorů.

Ukažme nyní výpočet regulátoru typu  $PDf$ , kde:

$$C(s)_{PDf} = k_P \frac{\frac{k_D}{k_P} s + 1}{T_f s + 1} \quad (29)$$

je přenos regulátoru.

Nejdříve zvolíme fázovou bezpečnost  $PM = 40^\circ$ . Pak ze vztahu

$$\arg(P(j\omega)) = -180^\circ + PM - 45^\circ,$$

a ze zvolené  $PM$  vyjde

$$\arg(P(j\omega_D)) = -185^\circ.$$

Neznámou frekvenci  $\omega_D$  tedy odečteme na frekvenční charakteristice řízeného systému (obr.10) v místě, kde jeho fáze prochází  $-185^\circ$ . Pro náš systém je  $\omega_D = 2.34$ . Ze stejného obrázku (obr.10) odečteme ještě zesílení soustavy  $|P(j\omega_D)|_{dB} = -16dB$ , neboli  $|P(j\omega_D)| = 10^{-\frac{16}{20}} = 0.1585$ .

Určíme parametry  $k_P$  a  $k_D$  ze vztahů:

$$k_D = \frac{1}{\omega_D \sqrt{2} |P(j\omega_D)|} = \frac{1}{2.34 \sqrt{2} \cdot 0.1585} = 1.9065,$$

a

$$k_P = \frac{1}{\sqrt{2} |P(j\omega_D)|} = \frac{1}{0.1585 \sqrt{2}} = 4.4612.$$

Zbývá už jen dopočítat  $T_f$ . Pro  $PDf$  regulátory se volí  $\omega_f$  v rozmezí  $(5 \div 20)\omega_D$ . My jsme zvolili  $\omega_f = 5\omega_D = 11.7$ . Vypočteme  $T_f$  jako  $T_f = \frac{1}{\omega_f} = 0.0855$ .

Dosazením do 29 dostaneme přenos regulátoru  $PDf$ :

$$C_{\text{frek}}(s) = 4.4612 \frac{0.42s + 1}{0.0855s + 1}$$

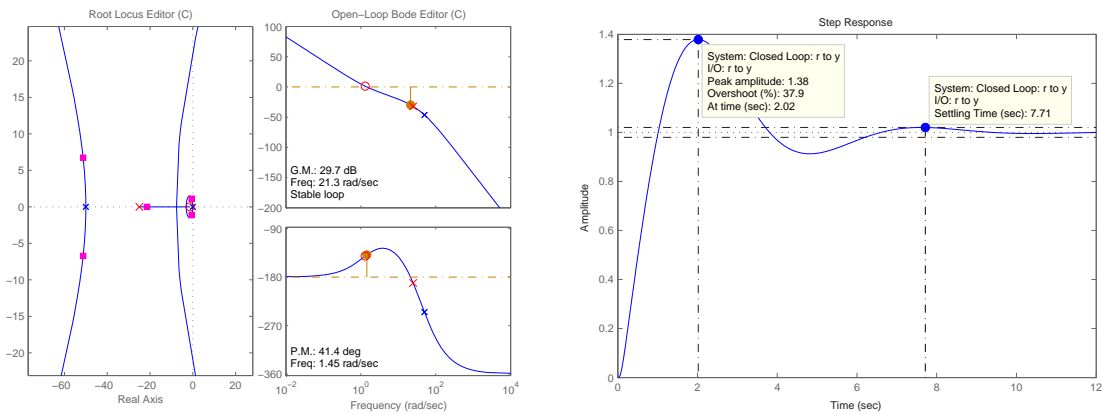
#### 4.4.3 Metoda GMK-geometrické místo kořenů

Tato metoda je metodou z mého hlediska nejjednodušší. V programu *Matlab*, příkazem *sisotool*, přidáváme kořeny a nuly do soustavy. Podle toho kam přidáme pól/nulu a kolik, realizujeme regulátory. Přidáním nuly dostaneme regulátor  $PD$ , dvou nul a dvou pólů (z toho jeden v nule)  $PIDf$  atd. Po navržení regulátoru, za pomoci základních znalostí a trochu zkušeností, nastavíme póly/nuly a zesílení tak aby výsledný regulátor co nejvíce vyhovoval zadání.

Přidáním jednoho pólu a jedné nuly jsme vytvořili regulátor  $PDF$ , který má, po zvolení vhodných poloh pólů a nul, rovnici:

$$C_{GMK}(s) = 1.62 \frac{0.77s + 1}{0.04s + 1}.$$

Jak se provádí návrh regulátoru v programu Matlab Sisotool ukazují následující obrázky:

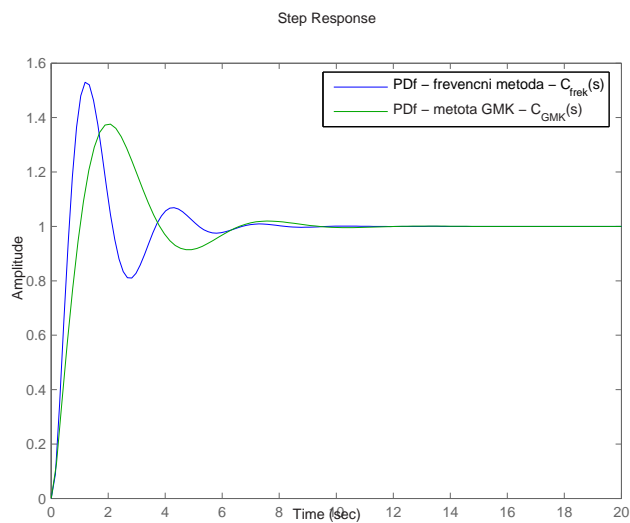


(a) Póly a nuly regulátoru

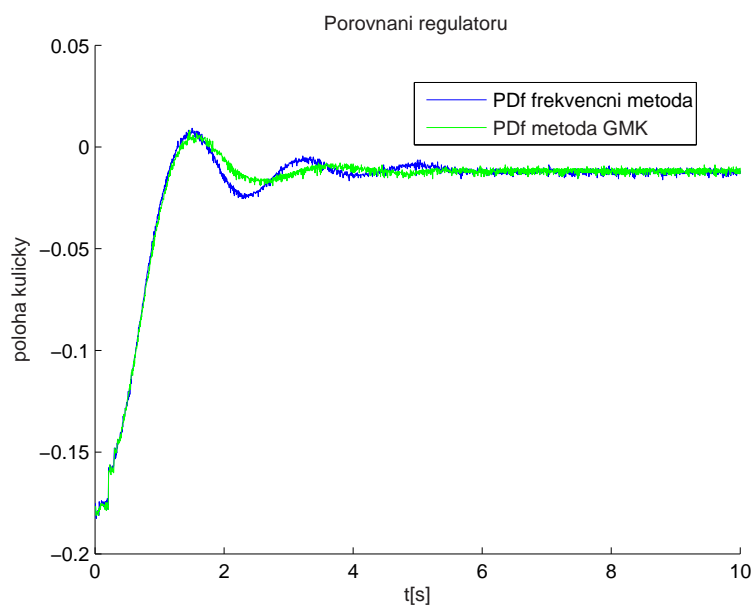
(b) Přejchodová charakteristika regulátoru

Obrázek 11: Geometrické místo kořenů pro  $PDF$  regulátor, zobrazené v Matlab Sisotool

První obrázek (11(a)) ukazuje jak vypadá regulátor  $C_{GMK}(s)$  v prostředí Sisotool. Druhý obrázek (11(b)) ukazuje reakci regulátoru  $C_{GMK}(s)$  na jednotkový skok. Jsou zde zobrazeny i některé parametry regulátoru (doba náběhu, překmit).



Obrázek 12: Porovnání přechodových charakteristik regulátorů  $C_{GMK}(s)$  a  $C_{frek}(s)$



Obrázek 13: Porovnání přechodových charakteristik regulátorů  $C_{GMK}(s)$  a  $C_{frek}(s)$  naměřených na modelu

## 5 Závěr

Učební pomůcka by v budoucnu měla být součástí skript, které obsáhne nejdůležitější kapitoly z předmětů *Systémy a modely* a *Systémy a řízení* učených na katedře Řídící techniky. Učebnice by měla být nápocna studentům k lepšímu pochopení probírané látky, než nabízí nynější literatura.

Celý systém naklánění tyče s kuličkou byl poněkud nepřesný a se značnou vůlí. Např. ramena zajišťující pohyb naklonění tyče motorkem byla značně volná, to mělo za následek pohyb tyče při přemísťování kuličky z jednoho kraje na druhý. (po provedení naklonění, kulička svým pohybem k druhému kraji tyče ještě způsobila pohyb tyče směrem dolů). Model byl proto konstruován za zjednodušených podmínek. Jakékoliv zpřesňování modelu (např. zavádění tření kuličky na tyči, valivý odpor kuličky) je zbytečné. V úloze jsme ani neuvažovali vlastnosti motoru, který přes nějaký mechanismu uváděl tyč do chodu, i když by to bylo možné, pomocí momentů motoru a převodního mechanismu, který uvádí tyč do pohybu. Identifikace systému i návrh reglátorů pro systém byli značně ovlivněny stavem zařízení.

## Reference

- [1] Fuka, J.; John, J.; Kutil, M. *Učebnice SARI [online]*., 1995, <http://dce.felk.cvut.cz/sari/>
- [2] Horáček, P. *Systémy a modely*, Praha, Vydavatelství ČVUT, 1999.
- [3] John, J. *Systémy a řízení*, Praha, Vydavatelství ČVUT, 1998.
- [4] Tkadlec, J. *Diferenciální rovnice. Laplaceova transformace*, Praha, Vydavatelství ČVUT, 2005.
- [5] Kopka, J.;Daly, P.W. *L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Kompletní průvodce*, Computer Press, 2004.