

# Analýza stability fuzzy systémů

## Diplomová práce

Ondřej Novák  
2003

Katedra: Řídicí techniky, ČVUT Fakulta elektrotechnická  
Vedoucí práce: doc. Ing. Petr Horáček, CSc.

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (litaraturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

Rád bych poděkoval doc. Ing. Petru Horáčkovi, CSc. za vedení a konzultace diplomové práce.

V Praze dne 24. května 2003

Ondřej Novák

## **Abstrakt**

V této práci jsem se zabýval stabilitou fuzzy řídicích systémů. Vypracovaný přehled je rozdělen do tří částí. První část popisuje algoritmy založené na Ljapunovově teorii stability. Je uvedena analýza stability stavového singletonového fuzzy regulátoru s řízenou soustavou, která je modelována jako Takagi-Sugeno či singletonový fuzzy systém. Druhá část se zabývá stabilitou typu vstup-výstup. Pomocí principu pasivity je uvedena podmínka stability systému s Mamdaniho fuzzy regulátorem. Dále je ukázána metoda návrhu a podmínka stability robustního MISO fuzzy regulátoru pomocí kritéria konicity. Ve třetí části je uvedena metoda založená na symbolické analýze, při které je zpětnovazební fuzzy systém modelován pomocí Petriho sítě. V rámci diplomové práce jsem implementoval podmínku stability pro navržený regulátor systému kulička v obruči.

## **Abstract**

In this text I deal with stability of fuzzy control systems. The three main approaches are introduced. The first one is based on Lyapunov theory. The stability analysis of fuzzy singleton state controller with plant modeled as a Takagi-Sugeno or singleton fuzzy system is described. The second part deals with input-output stability. Passivity approach is applied to prove stability of control system with Mamdani PD controller. Design procedure based on conicity criteria that ensures robust stability of fuzzy singleton MISO controller is introduced. The third part is dedicated to stability analysis on the symbolic level. Petri net is utilized to model behaviour of fuzzy closed loop system. Finally, design of fuzzy state controller of Ball and Hoop system and implementation of stability condition is presented.

## Tabulka použitých symbolů

$\mathcal{A}$	fuzzy množina
$\mathbf{A}$	matice lineárního časově invariantního systému (LTI)
$\mathbf{A}$	v kapitole 4 přechodová matice Petriho sítě
$\mathbf{A}(\cdot)$	maticová funkce, $\mathbf{A} : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ ; $l, m, n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{B}$	fuzzy množina
$\mathbf{B}$	matice řízení LTI
$\mathbf{B}(\cdot)$	maticová funkce, $\mathbf{B} : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ ; $l, m, n \in \mathbb{N}$
$\mathbf{b}$	vektor řízení LTI
$\mathcal{C}$	fuzzy množina
$\mathbf{C}$	výstupní matice řízení LTI
$\mathbf{C}$	v podkapitolách 1.1.3, 3.2 a 3.3 označuje statické lineární zobrazení
$\text{Co}(\cdot)$	konvexní kombinace
$d(\cdot)$	funkce odchylky (deviation function)
$e$	regulační odchylka
$F(s)$	přenos LTI
$\mathbf{F}(s)$	přenosová matice LTI
$\text{Fuz}(\cdot)$	výstup fuzzy systému
$f(\cdot)$	nelineární funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , $n \in \mathbb{N}$
$\mathbf{f}(\cdot)$	vektorová funkce $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ; $n, m \in \mathbb{N}$
$G(s)$	přenos LTI
$\mathbf{G}(s)$	přenosová matice LTI
$\mathbf{G}$	v podkapitole 2.2.2 a 5.3.2 matice LTI se stavovou zpětnou vazbou
$g(\cdot)$	zesílení systému
$\mathbf{g}(\cdot)$	vektorová funkce $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ; $n, m \in \mathbb{N}$
$H(\cdot)$	statický nelineární systém
$\mathbf{J}$	matice kritéria kvadratického programu
$\overline{\mathbf{K}}, \overline{k}$	parametry horního odhadu výstupu fuzzy systému
$\underline{\mathbf{K}}, \underline{k}$	parametry spodního odhadu výstupu fuzzy systému
$M$	marking Petriho sítě
$\mathbb{N}$	množina celých čísel
$\mathbf{P}$	matice Ljapunovovy funkce ve tvaru kvadratické formy
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^n$	prostor $n$ rozměrných reálných vektorů, $n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	prostor reálných matic rozměru $n \times m$ ; $n, m \in \mathbb{N}$
$r(\cdot)$	funkce robustnosti (robustness function)
$V(\cdot)$	Ljapunovova funkce

$\mathbf{X}$	stavový prostor $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$
$\mathbf{x}$	stavový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$
$\mathbf{y}$	výstupní vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$
$\mathbf{y}_d$	žádaná hodnota výstupu $\mathbf{y}_d \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$
$\mu$	funkce příslušnosti fuzzy množiny
$\Phi$	střed fuzzy množiny s trojúhelníkovou funkcí příslušnosti
$\Phi$	střed vícerozměrné fuzzy množiny s trojúhelníkovou funkcí příslušnosti
$\Psi$	vstupně-výstupní mapa fuzzy systému
$\Omega$	oblast vstupního prostoru fuzzy systému



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>9</b>
1.1	Stabilita systémů . . . . .	10
1.1.1	Vnitřní stabilita . . . . .	10
1.1.2	Definice pasivity a některé vlastnosti . . . . .	11
1.1.3	Stabilita vstup-výstup . . . . .	12
1.2	Fuzzy modely . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Vnitřní stabilita fuzzy systémů</b>	<b>17</b>
2.1	Stabilita autonomního systému . . . . .	17
2.1.1	Parametrické a stavové vyjádření . . . . .	18
2.1.2	Podmínky stability . . . . .	21
2.2	Stabilita zpětnovazebního řídicího systému . . . . .	22
2.2.1	Parametrický přístup . . . . .	23
2.2.2	Numerický přístup . . . . .	28
2.3	Závěr . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Stabilita vstup-výstup</b>	<b>37</b>
3.1	Vyšetřování stability pomocí pasivity . . . . .	37
3.1.1	Pasivita fuzzy regulátorů . . . . .	37
3.1.2	Stabilita zpětnovazebního řídicího systému . . . . .	40
3.1.3	Závěr . . . . .	41
3.2	Robustní stabilita založená na podmínce konicity . . . . .	41
3.2.1	Popis regulační soustavy . . . . .	42
3.2.2	Návrh robustního regulátoru . . . . .	43
3.2.3	Návrh robustního fuzzy regulátoru . . . . .	44
3.2.4	Závěr . . . . .	46
3.3	Určení stability výpočtem zesílení fuzzy systému . . . . .	47
3.3.1	Popis regulátoru . . . . .	47
3.3.2	Výpočet odhadu a podmínky stability . . . . .	48
3.3.3	Závěr . . . . .	50

<b>4</b>	<b>Symbolická stabilita</b>	<b>53</b>
4.1	Analýza stability na symbolické úrovni . . . . .	53
4.2	Analýza stability na spojitě úrovni . . . . .	58
4.3	Závěr . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Popis implementace</b>	<b>63</b>
5.1	Popis řízené soustavy - systém kulička v obruči . . . . .	63
5.2	Návrh regulátoru . . . . .	68
5.3	Implementace podmínky stability . . . . .	74
5.3.1	Aproximace výstupu fuzzy regulátoru . . . . .	76
5.3.2	Implementace kritéria ve formě LMI . . . . .	78
5.4	Závěr . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>85</b>



# Kapitola 1

## Úvod

Předmětem této práce je vyšetřování stability fuzzy systémů při řízení. Cílem bylo vypracovat přehled o algoritmech, které umožňují vyšetřit stabilitu fuzzy modelů, a vybrané algoritmy implementovat. Z práce jsem vyřadil postupy zabývající se stabilitou Takagi-Sugenových fuzzy systémů, které představují oproti zbývajícím dvěma typům fuzzy systémů speciální třídu. Analýze těchto systémů se věnuje velká pozornost v souvislosti s teorií robustního řízení. Většina zde uvedených metod vychází z postupů, které jsou známé z analýzy stability nelineárních systémů. Jedná se o Ljapunovskou teorii stability a stabilitu vstup-výstup.

Členění diplomové práce je podle teorie použité k ověření stability. Práce je rozdělena na tři části věnované vnitřní stabilitě, stabilitě vstup-výstup a symbolické stabilitě. Součástí práce je i prezentace výsledků dosažených při implementaci kritéria stability regulace systému kulička v obruči.

V první části této kapitoly uvedu základní přehled definic stability a vět, které ji dokazují. V druhé části této kapitoly jsou vyjmenovány základní typy fuzzy systémů, které se v řídicí technice používají. To je užitečné zejména kvůli značení, které je v literatuře značně nejednotné. Kapitola 2 je zaměřena na vnitřní stabilitu tj. stabilitu rovnovážných bodů. Je zde použita Ljapunovská analýza stability a to jak pro samostatný, tak i pro zpětnovazební řídicí fuzzy systém. Kapitola 3 se zabývá stabilitou z pohledu vstupních a výstupních veličin. Je rozdělena na tři podčásti. První využívá k určení podmínek stability teorii pasivních systémů. Zbylé dvě části používají větu o malém zesílení a podmínku konicity. Kapitola 4 je věnovaná symbolické analýze stability, tj. vyšetřování stability na úrovni báze pravidel a vstupně výstupních fuzzy množin. V kapitole 5 uvedu popis praktické části práce. V rámci ní jsem implementoval algoritmus ověřující kritérium vnitřní stability vyjádřené pomocí lineárních maticových nerovnic.

## 1.1 Stabilita systémů

Stabilita patří k základním a nutným vlastnostem, které musí každý řídicí systém splňovat. V moderní teorii řízení je návrh regulátoru formulován jako optimalizační úloha, která z množiny stabilizujících regulátorů vybírá optimální podle zadaného kritéria. Jiná je situace u fuzzy systémů, které jsou navrhovány podle znalostí experta či metodami automatického návrhu z dat, jako je třeba shlukování. Tento přístup není založen na přesných analytických vztazích mezi jednotlivými veličinami. Oproti tomu většina definic stability pracuje a vyžaduje „ostré“ závislosti.

Fuzzy systémy patří obecně mezi nelineární systémy a jako takové mohou vykazovat velmi variabilní chování. Dále uvedené definice a věty nedávají vyčerpávající přehled o problematice stability nelineárních systémů. Uvedl jsem zde definice a přístupy, které použiji v dalším textu. Dobrý přehled lze nalézt v knize [17] nebo [12]. Základní metody vyšetřování stability fuzzy systémů jsou uvedeny v [3] a v přehledové práci [4]. Historický přehled vývoje analýzy stability fuzzy systémů je v článku [16].

Následující podkapitola má toto členění. První část se týká vnitřní stability rovnovážných bodů ve stavovém prostoru. Uvedu její definice a Ljapunovovy metody, které udávají dostačující podmínky stability. V druhé části uvedu definici pasivního systému a podmínky stability zpětnovazebního zapojení pasivních systémů. Třetí část pojednává o větě o malém zesílení a podmínce konicity.

### 1.1.1 Vnitřní stabilita

Uvažujeme obecný nelineární systém se stavovým modelem ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (1.1)$$

kde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  je stavový vektor,  $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je spojitá přechodová funkce. Důležitá je otázka stability rovnovážného bodu. Rovnovážný bod systému (1.1)  $\bar{\mathbf{x}}$  je vektor, pro který platí

$$\mathbf{f}(t, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (1.2)$$

pro všechna  $t \geq t_0$ . Rovnovážný bod je (Ljapunovsky) stabilní, když pro každé kladné  $\epsilon$  a každé  $t_0 \in \mathbb{R}_+$  existuje takové kladné číslo  $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$ , že pro všechna řešení  $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$  s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}_0$  splňující  $\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$  a pro všechna  $t \geq t_0$  platí

$$\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \epsilon. \quad (1.3)$$

Přísnější podmínkou stability je asymptotická stabilita. Rovnovážný bod je asymptoticky stabilní, je-li Ljapunovsky stabilní a navíc platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}}\| = \mathbf{0}. \quad (1.4)$$

Předcházející definice uvažovaly jen lokální stabilitu v okolí rovnovážných bodů. Systém (1.1) je globálně stabilní, platí-li (1.3) pro  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Stejně tak je systém (1.1) je globálně asymptoticky stabilní, platí-li (1.4) pro  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ .

V dalším výkladu se bude zejména využívat Ljapunových metod pro určení stability autonomního časově invariantního systému. Ten je popsán vztahem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.5)$$

kde  $\mathbf{x}$  je opět stavový vektor a  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je spojitá přechodová funkce, která v tomto případě nezávisí na čase. První Ljapunovova metoda využívá lokální linearizace k určení lokální stability nelineárního systému. Platí, že systém (1.5) je lokálně stabilní v bodě  $\bar{\mathbf{x}}$ , má-li matice  $\mathbf{A}$  definovaná

$$\mathbf{A} = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\bar{\mathbf{x}}} \quad (1.6)$$

všechna vlastní čísla kladná. Druhá (přímá) Ljapunova metoda umožňuje určit stabilitu nebo asymptotickou stabilitu nelineárního systému (1.5) s rovnovážným bodem v počátku na základě existence Ljapunovovy funkce. Ljapunovova funkce  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá reálná funkce definovaná na intervalu  $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| < B\}$ , která splňuje podmínky

1. Je spojitá a má spojitě první parciální derivace v oblasti  $\Omega$  okolo počátku,
2. Je pozitivně definitní v  $\Omega$ ,
3. Její časová derivace podél řešení (1.5) je negativně definitní nebo semidefinitní v oblasti  $\Omega$ .

Existuje-li Ljapunovova funkce a její časová derivace  $\dot{V}(\mathbf{x})$  je negativně semidefinitní, pak je systém (1.5) stabilní. Je-li  $\dot{V}(\mathbf{x})$  negativně definitní, pak je (1.5) asymptoticky stabilní. Reálná spojitá funkce  $V$  je pozitivně definitní (semidefinitní) v oblasti  $\Omega$ , jestliže platí  $V(\mathbf{0}) = 0$  a  $V(\mathbf{x}) > 0$  ( $V(\mathbf{x}) \geq 0$ ) pro všechna  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

### 1.1.2 Definice pasivity a některé vlastnosti

Spojité SISO systém se vstupem  $u(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , výstupem  $y(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a stavovým vektorem  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  je pasivní [12], když existuje spojitá nezáporná reálná zásobní funkce  $S(\mathbf{x})$  splňující  $S(\mathbf{0}) = 0$  a zásobovací tok  $W(u(\tau), y(\tau)) = u(\tau)y(\tau)$  takový, že platí následující disipativní nerovnost pro  $\forall t > 0$

$$S(\mathbf{t}) - S(\mathbf{0}) \leq \int_0^t W(u(\tau), y(\tau)) d\tau. \quad (1.7)$$

Je-li zásobovací tok definován:

- $W(u(\tau), y(\tau)) = u(\tau)y(\tau) - \epsilon u(\tau)^2, \epsilon > 0$ , pak o systému říkáme, že je vstupně striktně pasivní.
- $W(u(\tau), y(\tau)) = u(\tau)y(\tau) - \epsilon y(\tau)^2, \epsilon > 0$ , pak o systému říkáme, že je výstupně striktně pasivní.
- $W(u(\tau), y(\tau)) = u(\tau)y(\tau) - \epsilon_1 u(\tau)^2 - \epsilon_2 y(\tau)^2, \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ , pak o systému říkáme, že je vstupně a výstupně striktně pasivní.

Teorie pasivity je zejména důležitá při vyšetřování stability zpětnovazebních systémů a systémů složených z více podsystémů. Vlastnosti pasivity uvádí následující teorém.

**Teorém 1** *Uvažujme dva pasivní subsystémy  $S_1$  a  $S_2$ , které jsou spojeny zápornou zpětnou vazbou. Pak výsledný zpětnovazební systém je stabilní. Tento systém je navíc asymptoticky stabilní, když platí jedna z následujících (neekvivalentních) podmínek:*

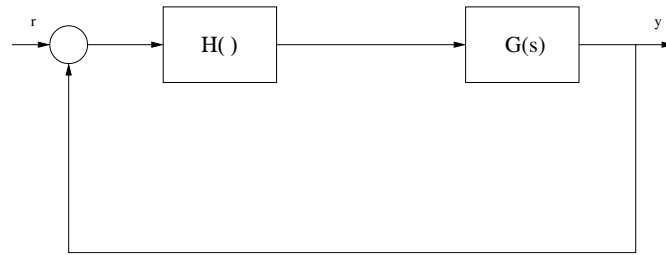
1. *Jeden z podsystémů je striktně vstupně a výstupně pasivní.*
2. *Oba podsystémy jsou vstupně striktně pasivní.*
3. *Oba podsystémy jsou výstupně striktně pasivní.*
4. *Systém s otevřenou smyčkou  $S_1(-S_2)$  má detekovatelný nulový stav (zero-state detectable) a buď  $S_2$  je vstupně pasivní nebo  $S_1$  je výstupně pasivní.*
5. *Systém s otevřenou smyčkou  $S_2S_1$  má detekovatelný nulový stav (zero-state detectable) a buď  $S_2$  je výstupně pasivní nebo  $S_1$  je vstupně pasivní.*

Je-li tedy jeden ze subsystémů ve zpětnovazebním zapojení pasivní dostačující podmínkou stability je, že druhý subsystém je také pasivní.

### 1.1.3 Stabilita vstup-výstup

V následující části zmíním jen základní věty použité teorie, které budou dále využity při ověřování stability a na které se budu odkazovat. Podrobnější výklad je uveden v [12] nebo [17].

Předpokládejme vyšetřovaný systém, jako zpětnovazební zapojení dvou systémů  $G$  a  $H$  viz obrázek 1.1, kde  $G$  a  $H$  představují v obecném případě relace mezi příslušnými vstupy a výstupy. Stabilitu takové soustavy lze ověřit pomocí



Obrázek 1.1: Schéma zpětnovazebního systému

věty o malém zesílení. Ta říká, že zpětnovazební zapojení systémů  $\mathbf{G}$  a  $\mathbf{H}$  je stabilní, když platí:

$$g(\mathbf{G})g(\mathbf{H}) < 1, \quad (1.8)$$

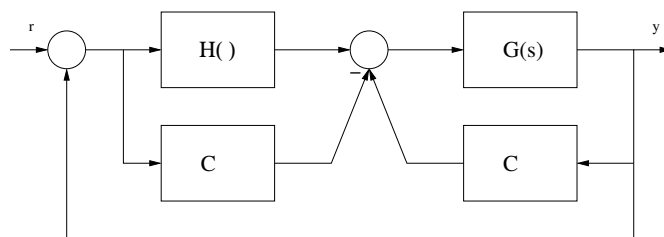
kde  $g(\cdot)$  označuje zesílení systému, definované jako supremum poměru normy výstupu k normě vstupu. Výpočet zesílení je pro obecné nelineární systémy složitý. Jednoduše lze určit zesílení stabilních lineárních časově invariantních systémů (LTI) a statických nelineárních systémů. Pro LTI stabilní systém je zesílení definováno rovnicí

$$g(\mathbf{G}) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega)), \quad (1.9)$$

kde  $\bar{\sigma}$  označuje maximální singulární číslo přenosové matice  $\mathbf{G}$ . Pro statický nelineární systém  $\mathbf{H}$  je zesílení definováno vztahem

$$g(\mathbf{H}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{H}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}. \quad (1.10)$$

V případě, že vyšetřovaný systém podmínku (1.8) nesplňuje, je možno provést transformaci na ekvivalentní systém podle obrázku 1.2. Lze dokázat, že transfor-



Obrázek 1.2: Schéma transformace systému

movaný systém je stabilní tehdy a jen tehdy, když je stabilní i systém původní. Podmínka stability (1.8) pro transformovaný systém je

$$g(\{\mathbf{G}, \mathbf{C}\})g(\mathbf{H} - \mathbf{C}) < 1, \quad (1.11)$$

kde  $\{\cdot, \cdot\}$  označuje zpětnovazební zapojení a  $C$  je nějaký lineární statický systém. Ten se často nazývá střed. Předcházející podmínku lze definovat pomocí funkce robustnosti (robustness function)

$$r(C) = r(C)_G = 1/g(\{G, C\}) \quad (1.12)$$

a odchylky (deviation function)

$$d(C) = d(C)_H = g(H - C). \quad (1.13)$$

Pak lze podmínku (1.11) formulovat jako

$$r(C) > d(C). \quad (1.14)$$

## 1.2 Fuzzy modely

V této části je uveden základní přehled fuzzy systémů, podrobný výklad včetně definic zde uvedených pojmů je v [18]. Fuzzy systémy jsou pravidlové systémy s bázi pravidel, která je tvořena relací implikace ve tvaru:

$$\text{IF } \langle \text{předpoklad} \rangle \text{ THEN } \langle \text{závěr} \rangle.$$

Podle typu závěru lze fuzzy systémy rozdělit na následující skupiny.

### Lingvistické fuzzy systémy

Tento typ fuzzy systémů má v předpokladu i závěru svých pravidel fuzzy množiny. V literatuře se někdy také označuje jako Mamdaniho fuzzy systém. Jeho  $i$ -té pravidlo  $R_i$  má tvar

$$R_i: \text{IF } \mathbf{u} \text{ is } \mathcal{A}_i \text{ THEN } \mathbf{y} \text{ is } \mathcal{B}_i,$$

kde  $\mathbf{u}$  je vektor vstupu,  $\mathbf{y}$  je vektor výstupu,  $\mathcal{A}_i$  a  $\mathcal{B}_i$  jsou vícerozměrné fuzzy množiny definované na vstupním a výstupním prostoru a  $i = 1 \dots N$ ,  $N$  je počet pravidel. Každé pravidlo reprezentuje jednu relaci mezi vstupní a výstupní fuzzy množinou. Analytický vztah pro výstup tohoto typu fuzzy systému je poměrně komplikovaný a závisí na mnoha parametrech, jako je typ fuzzy množin, druh zvolené implikace a způsob defuzzifikace. Detailní popis je nad rámec tohoto přehledu a lze najít například v [3] nebo [18].

### Singletonové fuzzy systémy

Tento druh fuzzy systémů má místo fuzzy množin v závěru pravidel singleton. Singleton je fuzzy množina, jejíž funkce příslušnosti je nenulová, rovná jedné jen pro jednu hodnotu. To přináší zjednodušení při výpočtu výstupu. Pravidla mají tvar

$$R_i: \text{IF } \mathbf{u} \text{ is } \mathcal{A}_i \text{ THEN } \mathbf{y} \text{ is } \mathbf{Y}_i,$$

kde  $\mathcal{A}_i$  je fuzzy množina definovaná na prostoru vstupu,  $\mathbf{Y}_i$  je singleton (v tomto případě reálný vektor) a  $i = 1 \dots N$ , kde  $N$  je počet pravidel. Výstup tohoto systému je dán vztahem

$$\mathbf{y} = \frac{\sum_{i=1}^N \mu_i(\mathbf{u}) \mathbf{Y}_i}{\sum_{i=1}^N \mu_i(\mathbf{u})}, \quad (1.15)$$

kde  $\mu_i(\mathbf{u})$  hodnota funkce příslušnosti fuzzy množiny  $\mathcal{A}_i$  v bodě  $\mathbf{u}$ .

### Takagi-Sugeno fuzzy systémy

Poslední typ má v závěru pravidel místo fuzzy množin nebo čísel funkce, které představují lokální model. Pomocí fuzzy množin v předpokladu pravidel pak dochází k přepínání mezi jednotlivými modely. Pravidla jsou ve tvaru

$$R_i: \text{IF } \mathbf{u} \text{ is } \mathcal{A}_i \text{ THEN } \mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{u}),$$

kde  $\mathbf{u}$  je vektor vstupu,  $\mathcal{A}_i$  je fuzzy množina definovaná na vstupním prostoru,  $\mathbf{y}$  je výstupní vektor a  $\mathbf{Y}(\mathbf{u})$  je vektorová funkce. Výstup tohoto systému se určí ze vztahu

$$\mathbf{y} = \frac{\sum_{i=1}^N \mu_i(\mathbf{u}) \mathbf{Y}_i(\mathbf{u})}{\sum_{i=1}^N \mu_i(\mathbf{u})}, \quad (1.16)$$

kde  $\mu_i(\mathbf{u})$  hodnota funkce příslušnosti fuzzy množiny  $\mathcal{A}_i$  v bodě  $\mathbf{u}$ ,  $N$  je počet pravidel a  $i = 1 \dots N$ . Častý je případ, kdy v závěrech pravidla jsou lineární funkce.





## Kapitola 2

# Vnitřní stabilita fuzzy systémů

V této kapitole se budu zabývat postupy k ověření vnitřní stability fuzzy systémů. Kromě zvlášť uvedených případů se jedná o singletonové fuzzy systémy. Všechny dále uvedené metody analýzy stability jsou založené na Ljapunovově metodě, avšak liší se v přístupu k formalizaci vstupně-výstupní funkce.

První část je věnována autonomním fuzzy singletonovým systémům. Bude definováno parametrické a stavové vyjádření fuzzy systému a transformace na po částech polytopický afinní systém. V závěru této části je uvedena podmínka asymptotické stability.

Druhá podkapitola, věnovaná stabilitě zpětnovazebních řídicích systémů, rozšíří postup uvedený v předchozí části. Místo složitě analytického popisu vstupně-výstupní funkce uvedu metodu, která je založená na hledání horního a dolního odhadu hodnoty výstupu. A uvedu podmínky asymptotické stability ve formě lineárních maticových nerovnic (LMI).

### 2.1 Stabilita autonomního systému

V první části provedu analýzu stability samotného fuzzy systému tak jak ji publikoval Sugeno v článku [16]. Vlastnosti dále uvažovaného systému udává tabulka 2.1.

Tabulka 2.1: Přehled vlastností

Autonomní model	
Typ:	dynamický singletonový fuzzy systém
Rozměr:	MIMO
Omezení:	trojúhelníkové funkce příslušnosti definovaný způsob pokrytí vstupu fuzzy množinami

### 2.1.1 Parametrické a stavové vyjádření

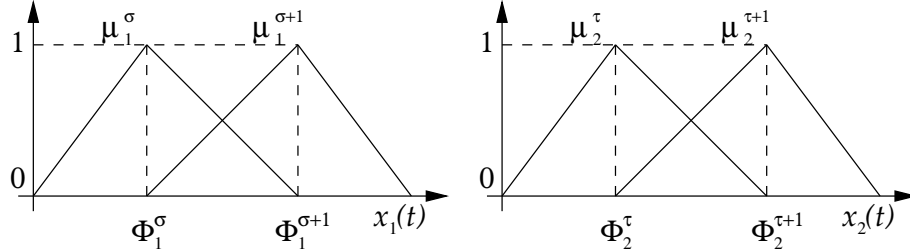
Předmětem zájmu bude v této části fuzzy singletonový dynamický systém. Jeho pravidla jsou ve tvaru:

$$\text{IF } \mathbf{x}(t) \text{ is } \mathcal{A}^{\sigma,\tau} \text{ THEN } \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{h}_{\sigma,\tau}, \quad (2.1)$$

kde  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2$  je stavový vektor,  $\mathcal{A}^{\sigma,\tau}$  je fuzzy množina s funkcí příslušnosti  $\boldsymbol{\mu}_{\sigma,\tau} = (\mu_1^\sigma(x_1(t)), \mu_2^\tau(x_2(t)))^T$ ,  $\mathbf{h}_{\sigma,\tau} \in \mathbb{R}^2$  je singleton a  $\sigma = 1, 2, \dots, N_1$ ,  $\tau = 1, 2, \dots, N_2$ , kde  $N_1$  a  $N_2$  je počet fuzzy množin. Jedná se tedy o nelineární systém druhého řádu s přechodovou funkcí realizovanou fuzzy pravidly. Dále uvedená metoda však může být rozšířena pro systémy vyššího řádu.  $\boldsymbol{\mu}_{\sigma,\tau}$  jsou normalizované trojúhelníkové funkce příslušnosti (viz. obr.2.1) ve tvaru:

$$\mu_i^\lambda(x_i) = \begin{cases} \frac{x_i - \Phi_i^{\lambda-1}}{\Phi_i^\lambda - \Phi_i^{\lambda-1}}, & \Phi_i^{\lambda-1} \leq x_i \leq \Phi_i^\lambda \\ \frac{\Phi_i^{\lambda+1} - x_i}{\Phi_i^{\lambda+1} - \Phi_i^\lambda}, & \Phi_i^\lambda \leq x_i \leq \Phi_i^{\lambda+1} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \quad (2.2)$$

kde  $i = 1, 2$ ,  $\lambda = \sigma$  nebo  $\tau$ ,  $\Phi_i^\lambda$  jsou středy fuzzy množiny, které jsou uspořádány tak, že  $\Phi_i^\lambda < \Phi_i^{\lambda+1}$  pro všechna  $\lambda = 1, \dots, N_i - 1$ ,  $i = 1, 2$ . K defuzzifikaci je



Obrázek 2.1: funkce příslušnosti

použitá metoda váženého průměru. Výstup fuzzy systému je dán vztahem

$$\mathbf{x}(t+1) = \sum_{\sigma=1}^{N_1} \sum_{\tau=1}^{N_2} \mu_1^\sigma(x_1(t)) \mu_2^\tau(x_2(t)) \mathbf{h}_{\sigma,\tau}, \quad (2.3)$$

kde  $\sum_{\sigma=1}^{N_1} \sum_{\tau=1}^{N_2} \mu_1^\sigma(x_1(t)) \mu_2^\tau(x_2(t)) = 1$ ,  $N_i$  je počet fuzzy množin na  $i$ -tém vstupu,  $i = 1, 2$ .

Rozdělíme-li celý stavový prostor do čtvercových oblastí  $\Omega_{\sigma,\tau}$  podle středů jednotlivých fuzzy množin ve vstupní části fuzzy systému

$$\Omega_{\sigma,\tau} \equiv [\Phi_1^\sigma, \Phi_1^{\sigma+1}] \times [\Phi_2^\tau, \Phi_2^{\tau+1}]. \quad (2.4)$$

Pak pro  $\mathbf{x}(t) \in \Omega_{\sigma,\tau}$  platí

$$\mathbf{x}(t+1) = \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \mu_1^i(x_1(t)) \mu_2^j(x_2(t)) \mathbf{h}_{i,j}. \quad (2.5)$$

Zavedením pomocných proměnných  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$

$$\alpha_1 = \frac{\Phi_1^{\sigma+1} - x_1}{\Phi_1^{\sigma+1} - \Phi_1^\sigma} \quad (2.6)$$

$$\alpha_2 = \frac{\Phi_2^{\tau+1} - x_2}{\Phi_2^{\tau+1} - \Phi_2^\tau} \quad (2.7)$$

je možné napsat parametrická vyjádření fuzzy systému

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \alpha_1 \alpha_2 \Phi^{\sigma,\tau} + \alpha_1 (1 - \alpha_2) \Phi^{\sigma,\tau+1} \\ &\quad + (1 - \alpha_1) \alpha_2 \Phi^{\sigma+1,\tau} \\ &\quad + (1 - \alpha_1) (1 - \alpha_2) \Phi^{\sigma+1,\tau+1}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \alpha_1 \alpha_2 \mathbf{h}_{\sigma,\tau} + \alpha_1 (1 - \alpha_2) \mathbf{h}_{\sigma,\tau+1} \\ &\quad + (1 - \alpha_1) \alpha_2 \mathbf{h}_{\sigma+1,\tau} \\ &\quad + (1 - \alpha_1) (1 - \alpha_2) \mathbf{h}_{\sigma+1,\tau+1}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

kde  $\Phi \equiv (\Phi_1^\sigma, \Phi_2^\tau)$ . V oblasti  $\mathbf{x}(t) \in \Omega_{\sigma,\tau}$  lze výstup fuzzy systému chápat jako konvexní kombinaci singletonů, které tvoří její vrcholy. Z výše uvedeného také plyne (viz. obr. 2.2)

$$\mathbf{x}(t) = \Phi^{i,j} \Rightarrow \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{h}_{i,j} \quad (2.10)$$

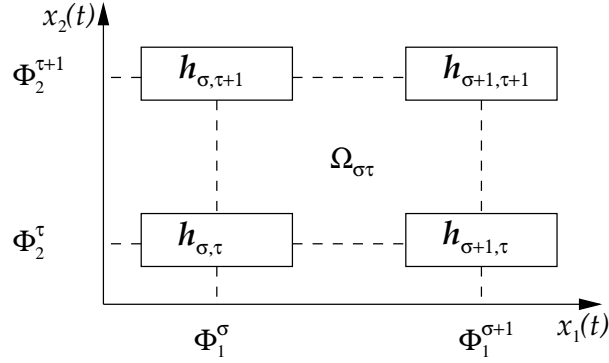
kde  $i = \sigma, \sigma + 1$  a  $j = \tau, \tau + 1$ .

Pro zkoumání stability systému je důležité nalezení podmínky, za které platí, že  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  je rovnovážný bod tj.  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  implikuje  $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{0}$ . Předpokládejme, že existuje  $\sigma$  a  $\tau$  takové, že  $\Phi_1^\sigma < 0 < \Phi_1^{\sigma+1}$  a  $\Phi_2^\tau < 0 < \Phi_2^{\tau+1}$ . Pak se oblast

$$\Omega_{\sigma\tau}^0 \equiv [\Phi_1^\sigma, \Phi_1^{\sigma+1}] \times [\Phi_2^\tau, \Phi_2^{\tau+1}] \quad (2.11)$$

nazývá nulová oblast (zero-region). Pro rovnovážný bod v počátku získáme dosažením  $x_1(t) = x_2(t) = 0$  do výrazu (2.9) podmínku

$$\begin{aligned} &\alpha_1^0 \alpha_2^0 \mathbf{h}_{\sigma,\tau} + \alpha_1^0 (1 - \alpha_2^0) \mathbf{h}_{\sigma,\tau+1} \\ &\quad + (1 - \alpha_1^0) \alpha_2^0 \mathbf{h}_{\sigma+1,\tau} \\ &\quad + (1 - \alpha_1^0) (1 - \alpha_2^0) \mathbf{h}_{\sigma+1,\tau+1} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.12)$$



Obrázek 2.2:

kde

$$\alpha_1^0 \equiv \alpha_1 = \frac{\Phi_1^{\sigma+1}}{\Phi_1^{\sigma+1} - \Phi_1^\sigma} \quad (2.13)$$

$$\alpha_2^0 \equiv \alpha_2 = \frac{\Phi_2^{\tau+1}}{\Phi_2^{\sigma+1} - \Phi_2^\sigma}. \quad (2.14)$$

Z rovnice (2.9) je v [16] odvozen obecný stavový popis diskrétního systému (2.1), který použijeme dále, ve formě

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}_{\sigma,\tau}(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{o}_{\sigma,\tau}, \quad \mathbf{x}(t) \in \Omega_{\sigma,\tau}, \quad (2.15)$$

kde  $\mathbf{o}_{\sigma,\tau} = \mathbf{0}$  pro  $\mathbf{x}(t) \in \Omega_{\sigma,\tau}^0$ . Systém popsany rovnicí (2.15) je obecně nelineární, protože matice  $\mathbf{A}_{\sigma,\tau}$  závisí na  $\mathbf{x}(t)$ . Je možné jej také vyjádřit pomocí tzv. extrémních nebo přesněji hranových systémů

$$\mathbf{x}(t+1) = \alpha_2[\mathbf{S}_{\cdot,\tau}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{o}_{\sigma\tau}] + (1 - \alpha_2)[\mathbf{S}_{\cdot,\tau+1}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{o}_{\sigma\tau}], \quad (2.16)$$

kde  $\mathbf{S}_{\cdot,\tau}$  a  $\mathbf{S}_{\cdot,\tau+1}$  jsou hranové matice, které již nezávisí na  $\mathbf{x}(t)$ . Jejich definici lze nalézt v [16]. Název plyne z toho, že pro  $\mathbf{x}(t) \equiv (x_1(t), x_2(t)) \in \Omega_{\sigma,\tau}$  a zároveň  $x_2(t) = \Phi_2^\tau$  resp.  $x_2(t) = \Phi_2^{\tau+1}$  je  $\mathbf{A}_{\sigma,\tau} = \mathbf{S}_{\cdot,\tau}$  resp.  $\mathbf{A}_{\sigma\tau} = \mathbf{S}_{\cdot,\tau+1}$ . Výstup systému (2.15) je možné vypočítat i jako kombinaci hranových matic  $\mathbf{S}_{\sigma,\cdot}$  a  $\mathbf{S}_{\sigma+1,\cdot}$ .

Systém (2.15) může být vyjádřen jako po částech polytopický afinní systém

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) = & \alpha_1\alpha_2[\mathbf{S}_{\sigma,\tau}\mathbf{x}(t) + \mathbf{o}_{\sigma\tau}] \\ & + \alpha_1(1 - \alpha_2)[\mathbf{S}_{\sigma,\tau+1}\mathbf{x}(t) + \mathbf{o}_{\sigma\tau}] \\ & + (1 - \alpha_1)\alpha_2[\mathbf{S}_{\sigma+1,\tau}\mathbf{x}(t) + \mathbf{o}_{\sigma\tau}] \\ & + (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)[\mathbf{S}_{\sigma+1,\tau+1}\mathbf{x}(t) + \mathbf{o}_{\sigma\tau}], \end{aligned} \quad (2.17)$$

kde  $\mathbf{S}_{i,j}$  pro  $i = \sigma, \sigma + 1$  a  $j = \tau, \tau + 1$  je vrcholová matice, pro kterou platí, že  $\mathbf{A}_{i,j} = \mathbf{S}_{i,j}$ , když  $\mathbf{x}(t) = (\Phi_1^i, \Phi_2^j)$ , a její definici lze opět nalézt v [16].

## 2.1.2 Podmínky stability

Analýza stability je provedena nalezením podmínek existence Ljapunovovy funkce ve tvaru

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t), \quad (2.18)$$

kde  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ .

Časová diference  $\Delta V$  Ljapunovovy funkce (2.18) je

$$\Delta V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t+1)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t+1) - \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t). \quad (2.19)$$

Platí-li podmínka existence rovnovážného bodu v počátku (2.12), pak je  $\Delta V(\mathbf{0}) = 0$  a zbývá dokázat, že  $\Delta V(\mathbf{x}) < 0$  pro  $\forall \mathbf{x}$ . Je nutné, aby  $\Delta V(\mathbf{x}) < 0$  na hranách a vrcholech každé čtvercové oblasti  $\Omega_{\sigma\tau}$ . Z důvodu jednoduššího zápisu označíme časovou diferenci Ljapunovovy funkce ve vrcholu  $\Phi^{i,j}$  jako

$$\Delta V_{i,j} \equiv \Delta V(\Phi^{i,j}). \quad (2.20)$$

Dosazením z (2.8) a (2.9) do (2.19) pro  $\mathbf{x}(t) = \Phi^{i,j}$  dostaneme

$$\Delta V_{i,j} = \mathbf{h}_{i,j}^T \mathbf{P} \mathbf{h}_{i,j} - \Phi^{i,j,T} \mathbf{P} \Phi^{i,j}, \quad (2.21)$$

kde  $i = \sigma, \sigma + 1$  a  $j = \tau, \tau + 1$ . Následující nerovnost se v [16] nazývá podmínka stability vrcholu (stable vertex condition)

$$\Delta V_{i,j} < 0, \quad i = \sigma, \sigma + 1 \text{ a } j = \tau, \tau + 1. \quad (2.22)$$

Podmínka  $\Delta V(\mathbf{x}(t)) < 0$  na hranách oblasti  $\Omega_{\sigma\tau}$  je zaručena při platnosti následujících nerovností definovaných a označených v [16] jako podmínky stability hran (stable edge conditions)

$$\begin{aligned} C_{i,\cdot} &< \sqrt{\Delta V_{i,\tau} \Delta V_{i,\tau+1}}, & i = \sigma, \sigma + 1, \\ C_{\cdot,j} &< \sqrt{\Delta V_{\sigma,j} \Delta V_{\sigma+1,j}}, & j = \tau, \tau + 1, \end{aligned} \quad (2.23)$$

kde

$$C_{i,\cdot} = \mathbf{h}_{i,\tau}^T \mathbf{P} \mathbf{h}_{i,\tau+1} - \Phi^{i,\tau,T} \mathbf{P} \Phi^{i,\tau+1}, \quad i = \sigma, \sigma + 1,$$

a

$$C_{\cdot,j} = \mathbf{h}_{\sigma,j}^T \mathbf{P} \mathbf{h}_{\sigma+1,j} - \Phi^{\sigma,j,T} \mathbf{P} \Phi^{\sigma+1,j}, \quad j = \tau, \tau + 1.$$

Před tím, než uvedeme souhrnný teorém zaručující asymptotickou stabilitu, zbývá vyšetřit stabilitu rovnovážného bodu v počátku. Označíme

$$\mathbf{A}(\cdot, \alpha_2) \equiv \alpha_2 \mathbf{S}_{\cdot,\tau} + (1 - \alpha_2) \mathbf{S}_{\cdot,\tau+1}.$$

Pak vzhledem k (2.16) platí v nulové oblasti  $\Omega_{\sigma\tau}^0$

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(\cdot, \alpha_2)\mathbf{x}(t). \quad (2.24)$$

Linearizací (2.24) v počátku dostáváme systém

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(\cdot, \alpha_2^0)\mathbf{x}(t), \quad (2.25)$$

který je asymptoticky stabilní tehdy a jen tehdy, platí-li podmínka stability počátku (stable zero condition)

$$-\mathbf{A}(\cdot, \alpha_2^0)^T \mathbf{P} \mathbf{A}(\cdot, \alpha_2^0) + \mathbf{P} > 0, \quad (2.26)$$

kde  $\mathbf{P} > 0$ .

Nyní je možné vyslovit podmínku asymptotické stability. Fuzzy systém (2.1) vyjádřený jako po částech polytopický afinní systém

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(\cdot, \alpha_2)\mathbf{x}(t) + \mathbf{o}_{\sigma\tau}, \quad \mathbf{x}(t) \in \Omega_{\sigma\tau}, \quad (2.27)$$

kde  $\mathbf{o}_{\sigma\tau} = \mathbf{0}$  v nulové oblasti  $\Omega_{\sigma\tau}^0$  a  $\mathbf{A}(\cdot, \alpha_2) = \alpha_2 \mathbf{S}_{\cdot, \tau} + (1 - \alpha_2) \mathbf{S}_{\cdot, \tau+1}$ , je asymptoticky stabilní ve velkém, když existuje společná pozitivně definitní matice  $\mathbf{P}$  taková, že:

1. v nulové oblasti platí podmínka stability ve vrcholech (2.22), stability na hranách (2.23) a podmínka stability počátku (2.26),
2. v ostatních oblastech oba extrémní systémy  $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{S}_{\cdot, \tau}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{o}_{\sigma\tau}$  a  $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{S}_{\cdot, \tau+1}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{o}_{\sigma\tau}$  splňují podmínky stability ve vrcholech (2.22) a na hranách (2.23).

## 2.2 Stabilita zpětnovazebního řídicího systému

V této části nejdříve uvedu rozšíření parametrického vyjádření, které je uvedeno v části 2.1.1, na analýzu stability zpětnovazebního řídicího systému, jak bylo publikováno v [11]. Řízená soustava obsahuje nelinearitu v podobě singletonového fuzzy systému. Oproti předešlé části budu uvažovat spojité systémy. Výsledné podmínky stability jsou však konzistentní s výsledky předchozí podkapitoly.

V druhé části uvedu odlišný přístup publikovaný v [9]. Místo složitě analytického popisu bude výstup fuzzy regulátoru aproximován pomocí horního a dolního odhadu. Ukáži dva možné typy funkcí, které lze volit jako odhad, a způsob jejich výpočtu. Analýzu stability provedu pro lineární i nelineární řízenou soustavu.

## 2.2.1 Parametrický přístup

Před samotným výkladem uvádím v tabulce 2.2 shrnutí základních parametrů dále uvedené metody.

Tabulka 2.2: Přehled vlastností

Řízená soustava	
Typ:	Nelineární stavový model Přechodová funkce realizovaná jako singletonový fuzzy systém Přechodová funkce lineární vzhledem k řízení
Rozměr:	MIMO
Omezení:	Trojúhelníkové funkce příslušnosti Definovaný způsob překrytí funkcí příslušnosti
Regulátor	
Typ:	Fuzzy singletonový statický systém
Rozměr:	MIMO
Omezení:	Trojúhelníkové funkce příslušnosti Definovaný způsob překrytí funkcí příslušnosti

Nelineární řízená soustava je popsána vztahem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (2.28)$$

kde  $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  je stavový vektor,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  je dvoudimenzionální vektorová funkce,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  je maticová funkce a  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$  je vektor vstupu. Nelineární funkce  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  a  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  jsou realizovány statickými fuzzy singletonovými systémy s vektory  $\mathbf{f}_{\sigma,\tau} \in \mathbb{R}^2$  a maticemi  $\mathbf{B}_{\sigma,\tau} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  v závěru pravidel, kde  $\sigma = 1 \dots N_1$ ,  $\tau = 1 \dots N_2$  a  $N_i, i = 1, 2$  je počet fuzzy množin v  $i$ -té dimenzi stavového prostoru.

Systém (2.28) je řízen stavovým zpětnovazebním regulátorem, který je implementován jako statický fuzzy singletonový systém s vektory  $\mathbf{u}_{\sigma,\tau} \in \mathbb{R}^2$  v závěru pravidel, kde  $\sigma = 1 \dots N_1$ ,  $\tau = 1 \dots N_2$  a  $N_i, i = 1, 2$  je počet fuzzy množin v  $i$ -té dimenzi stavového prostoru.

V předpokladech pravidel řízené soustavy i stavového regulátoru jsou stejné fuzzy množiny  $\mathcal{A}^{\sigma,\tau}$  s trojúhelníkovou funkcí příslušnosti  $\mu_{\sigma,\tau}$ , která je definována vztahem (2.2) a její střed je určen vektorem  $\Phi^{\sigma,\tau}$ . Význam symbolů  $\sigma$  a  $\tau$  je stejný jako výše.

Tvar fuzzy množin i způsob pokrytí vstupního prostoru je shodný jako v odstavci 2.1.1 (viz vztah (2.2) a obrázek 2.1). Rozdělením vstupního prostoru na oblasti  $\Omega_{\sigma\tau}$  (viz (2.4)) lze hodnotu výstupu regulátoru pro  $\mathbf{x}(t) \in \Omega_{\sigma,\tau}$  vypočítat

podle vztahu

$$\mathbf{u} = \text{Fuz}(\mathbf{x}) = \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \alpha_1^i \alpha_2^j \mathbf{u}_{i,j}, \quad (2.29)$$

kde  $\alpha_1^i$  a  $\alpha_2^j$  jsou definovány vztahy (2.6) a (2.7). O výstupu fuzzy regulátoru se předpokládá, že splňuje podmínku  $\text{Fuz}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

### Parametrický popis řídicího systému

Stavový popis zpětnovazebního řídicího systému vyjádříme v oblasti  $\Omega_{\sigma,\tau}$  analogicky k (2.29) jako

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ &= \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \alpha_1^i \alpha_2^j \mathbf{f}_{i,j} \\ &\quad + \left( \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \alpha_1^i \alpha_2^j \mathbf{B}_{i,j} \right) \left( \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \alpha_1^i \alpha_2^j \mathbf{u}_{i,j} \right), \end{aligned} \quad (2.30)$$

kde  $\mathbf{x} \in \Omega_{\sigma,\tau}$ ,  $\mathbf{f}_{i,j}$ ,  $\mathbf{B}_{i,j}$  a  $\mathbf{u}_{i,j}$  jsou vektory resp. matice, které tvoří singletony v závěrech fuzzy systémů. Rovnici (2.30) upravíme

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \alpha_1^i \alpha_2^j \hat{\mathbf{f}}_{i,j} \\ &\quad - \alpha_2^\tau \alpha_2^{\tau+1} \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \alpha_1^i \Delta \mathbf{c}_{i,\cdot} \\ &\quad - \alpha_1^\sigma \alpha_1^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \alpha_2^j \Delta \mathbf{c}_{\cdot,j} \\ &\quad + \alpha_1^\sigma \alpha_1^{\sigma+1} \alpha_2^\tau \alpha_2^{\tau+1} \Delta \mathbf{c}_{\cdot,\cdot}, \end{aligned} \quad (2.31)$$



kde pro  $i = \sigma, \sigma + 1, j = \tau, \tau + 1$  je

$$\hat{\mathbf{f}}_{i,j} = \mathbf{f}_{i,j} + \mathbf{B}_{i,j} \mathbf{u}_{i,j} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{c}_{\cdot,\cdot} &= (\Delta \mathbf{B}_{\cdot,\tau+1} - \Delta \mathbf{B}_{\cdot,\tau}) \\ &\quad (\Delta \mathbf{u}_{\cdot,\tau+1} - \Delta \mathbf{u}_{\cdot,\tau}) \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{c}_{i,\cdot} &= (\mathbf{B}_{i,\tau+1} - \mathbf{B}_{i,\tau}) \\ &\quad (\mathbf{u}_{i,\tau+1} - \mathbf{u}_{i,\tau}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{c}_{\cdot,j} &= (\mathbf{B}_{\sigma+1,j} - \mathbf{B}_{\sigma,j}) \\ &\quad (\mathbf{u}_{\sigma+1,j} - \mathbf{u}_{\sigma,j}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\Delta \mathbf{B}_{\cdot,\tau+1} = \mathbf{B}_{\sigma+1,\tau+1} - \mathbf{B}_{\sigma,\tau+1} \quad (2.36)$$

$$\Delta \mathbf{B}_{\cdot,\tau} = \mathbf{B}_{\sigma+1,\tau} - \mathbf{B}_{\sigma,\tau}. \quad (2.37)$$

Ze vztahů (2.33)-(2.35) plyne, že jsou-li v nějaké oblasti  $\Omega_{\sigma\tau}$  všechny matice  $\mathbf{B}_{i,j} = \mathbf{B}_0$  nebo vektory  $\mathbf{u}_{i,j} = \mathbf{u}_0$  pro všechna  $i = \sigma, \sigma + 1$  a  $j = \tau, \tau + 1$ , pak  $\Delta \mathbf{c}_0 = \mathbf{0}$  a rovnice (2.31) se zjednoduší na

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \alpha_1^i \alpha_2^j \hat{\mathbf{f}}_{i,j}. \quad (2.38)$$

Stejně zjednodušení platí i v oblastech, které obsahují počátek, vzhledem k požadavku na regulátor, aby  $\mathbf{u} = \text{Fuz}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Vztah (2.38) lze upravit ([16], [11]) na ekvivalentní stavový popis

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{\sigma,\tau}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{A}_{\sigma,\tau}(\mathbf{x}) = \alpha_2^\tau \mathbf{S}_{\cdot,\tau} + \alpha_2^{\tau+1} \mathbf{S}_{\cdot,\tau+1}. \quad (2.40)$$

### Podmínky stability

K ověření stability je použita Ljapunovova funkce ve tvaru  $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ . Pro její časovou derivaci v oblasti  $\Omega_{\sigma,\tau}$  platí

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P}\mathbf{x} \\
&= \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \alpha_1^i \alpha_2^j \dot{V}_{i,j} \\
&\quad - \alpha_2^\tau \alpha_1^{\sigma+1} \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \alpha_1^i (E_{i,\cdot} + \Delta \mathbf{c}_{i,\cdot}^T \mathbf{P}\Phi_{i,*}) \\
&\quad - \alpha_1^\sigma \alpha_1^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \alpha_2^j (E_{\cdot,j} + \Delta \mathbf{c}_{\cdot,j}^T \mathbf{P}\Phi_{*,j}) \\
&\quad + \alpha_1^\sigma \alpha_1^{\sigma+1} \alpha_2^\tau \alpha_2^{\tau+1} (\Delta \mathbf{c}_{\sigma+1,\cdot} - \Delta \mathbf{c}_{\sigma,\cdot})^T \mathbf{P} (\Phi_{\sigma+1,*} - \Phi_{\sigma,*}) \\
&\quad + \alpha_1^\sigma \alpha_1^{\sigma+1} \alpha_2^\tau \alpha_2^{\tau+1} (\Delta \mathbf{c}_{\cdot,\tau+1} - \Delta \mathbf{c}_{\cdot,\tau})^T \mathbf{P} (\Phi_{*,\tau+1} - \Phi_{*,\tau}) \\
&\quad + \alpha_1^\sigma \alpha_1^{\sigma+1} \alpha_2^\tau \alpha_2^{\tau+1} \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \alpha_1^i \alpha_2^j \Delta \mathbf{c}_{i,j}^T \mathbf{P}\Phi_{i,j}, \tag{2.41}
\end{aligned}$$

kde pro  $i = \sigma, \sigma + 1, j = \tau, \tau + 1$  je

$$\dot{V}_{i,j} = \hat{\mathbf{f}}_{i,j}^T \mathbf{P}\Phi_{i,j} \tag{2.42}$$

$$E_{i,\cdot} = \left( \hat{\mathbf{f}}_{i,\tau+1} - \hat{\mathbf{f}}_{i,\tau} \right)^T \mathbf{P} (\Phi_{i,\tau+1} - \Phi_{i,\tau}) \tag{2.43}$$

$$E_{\cdot,j} = \left( \hat{\mathbf{f}}_{\sigma+1,j} - \hat{\mathbf{f}}_{\sigma,j} \right)^T \mathbf{P} (\Phi_{\sigma+1,j} - \Phi_{\sigma,j}) \tag{2.44}$$

a  $\Phi_{i,*}$  je hodnota  $\mathbf{x}$  na hraně oblasti t.j.  $\Phi_{i,*} = (\Phi_1^i, x_2)$ ,  $x_2 \in [\Phi_2^\tau, \Phi_2^{\tau+1}]$ . Význam  $\Phi_{*,j}$  je analogický. V předchozí rovnici (2.41) se využívá fakt, že vzhledem k použitým funkcím příslušnosti platí

$$\mathbf{x} = \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \alpha_1^i \alpha_2^j \Phi_{i,j}. \tag{2.45}$$

Vztah (2.41) je pro určení podmínek stability příliš složitý. Místo něj je možné použít aproximaci  $\dot{V}$ . Výrazy obsahující vyšší mocniny  $\alpha_1^i$  nebo  $\alpha_2^j$  nahradíme horními odhady

$$\begin{aligned}
\epsilon_i^1 &= \Delta \mathbf{c}_{i,\cdot}^T \mathbf{P} \Phi_{i,\tau} \wedge \Delta \mathbf{c}_{i,\cdot}^T \mathbf{P} \Phi_{i,\tau+1} \\
\epsilon_j^2 &= \Delta \mathbf{c}_{\cdot,j}^T \mathbf{P} \Phi_{\sigma,j} \wedge \Delta \mathbf{c}_{\cdot,j}^T \mathbf{P} \Phi_{\sigma+1,j} \\
\eta_1 &= (\Delta \mathbf{c}_{\sigma+1,\cdot} - \Delta \mathbf{c}_{\sigma,\cdot})^T \mathbf{P} (\Phi_{\sigma+1,*} - \Phi_{\sigma,*}) \vee 0 \\
\eta_2 &= (\Delta \mathbf{c}_{\cdot,\tau+1} - \Delta \mathbf{c}_{\cdot,\tau})^T \mathbf{P} (\Phi_{*,\tau+1} - \Phi_{*,\tau}) \vee 0 \\
\chi_{ij} &= \Delta \mathbf{c}_{\cdot,j}^T \mathbf{P} \Phi_{i,j} \vee 0,
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
(\Phi_{\sigma+1,*} - \Phi_{\sigma,*}) &\equiv (\Phi_1^{\sigma+1} - \Phi_1^\sigma, 0) \\
(\Phi_{*,\tau+1} - \Phi_{*,\tau}) &\equiv (0, \Phi_2^{\tau+1} - \Phi_2^\tau)
\end{aligned}$$

Pro horní odhad (2.41) platí

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}) &\leq \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \alpha_1^i \alpha_2^j \dot{V}_{i,j}^+ \\
&\quad - \alpha_2^\tau \alpha_2^{\tau+1} \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \alpha_1^i E_{i,\cdot}^+ \\
&\quad - \alpha_1^\sigma \alpha_1^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \alpha_2^j E_{\cdot,j}^+, \tag{2.46}
\end{aligned}$$

kde

$$\dot{V}_{i,j}^+ = \dot{V}_{i,j} + \frac{\chi_{i,j}}{16} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}
E_{i,\cdot}^+ &= E_{i,\cdot} + \epsilon_i^1 - \frac{\eta_1}{4} \\
E_{\cdot,j}^+ &= E_{\cdot,j} + \epsilon_j^2 - \frac{\eta_2}{4}. \tag{2.48}
\end{aligned}$$

V oblasti  $\Omega_{\sigma,\tau}^0$  obsahující počátek má systém (2.30) jednodušší vyjádření rovnicí (2.38). Definujeme-li opět Ljapunovovu funkci jako  $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ , pak pro její časovou derivaci dostáváme vztah

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{\mathbf{x}} &= \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \alpha_1^i \alpha_2^j \dot{V}_{i,j} \\
&\quad - \alpha_2^\tau \alpha_2^{\tau+1} \sum_{i=\sigma}^{\sigma+1} \alpha_1^i E_{i,\cdot} \\
&\quad - \alpha_1^\sigma \alpha_1^{\sigma+1} \sum_{j=\tau}^{\tau+1} \alpha_2^j E_{\cdot,j}, \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Nyní analogicky k postupu, který jsme provedli při vyšetřování stability autonomního systému, uvedeme dostačující podmínky asymptotické stability řídicího systému (2.30). Stačí vyšetřit chování Ljapunovovy funkce na hranicích jednotlivých oblastí.

Zpětnovazební systém je asymptoticky stabilní ve velkém s rovnovážným bodem v počátku, když existuje společná matice  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$  taková, že

1. v oblasti obsahující počátek platí

$$\dot{V}_{i,j} < 0, \quad \dot{V}(\mathbf{0}) = 0 \quad (2.50)$$

$$E_{i,\cdot} > \left( \sqrt{-\dot{V}_{i,\tau}} + \sqrt{-\dot{V}_{i,\tau+1}} \right)^2 \quad (2.51)$$

$$E_{\cdot,j} > \left( \sqrt{-\dot{V}_{\sigma,j}} + \sqrt{-\dot{V}_{\sigma+1,j}} \right)^2 \quad (2.52)$$

$$-\mathbf{A}(\mathbf{0})^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{A}(\mathbf{0}) > 0 \quad (2.53)$$

2. v ostatních oblastech platí

$$\dot{V}_{i,j}^+ < 0 \quad (2.54)$$

$$E_{i,\cdot}^+ > \left( \sqrt{-\gamma_2^{i,\tau} \dot{V}_{i,\tau}^+} + \sqrt{-\gamma_2^{i,\tau+1} \dot{V}_{i,\tau+1}^+} \right)^2 \quad (2.55)$$

$$E_{\cdot,j}^+ > \left( \sqrt{-\gamma_1^{\sigma,j} \dot{V}_{\sigma,j}^+} + \sqrt{-\gamma_1^{\sigma+1,j} \dot{V}_{\sigma+1,j}^+} \right)^2 \quad (2.56)$$

$$(2.57)$$

kde  $\gamma_1^{i,j} + \gamma_2^{i,j} \leq 1$ ,  $\gamma_1^{i,j}, \gamma_2^{i,j} \in [0, 1]$ ,  $i = \sigma, \sigma + 1$  a  $j = \tau, \tau + 1$ .

Výše uvedená tvrzení jsou analogická k výsledkům části věnované autonomním systémům. Vztahy (2.50) (resp. (2.54)) vyjadřují podmínku stability ve vrcholech dané oblasti. Nerovnice (2.51) a (2.52) (resp. (2.55) a (2.56)) zaručují stabilitu na hranách oblasti. A maticová nerovnice (2.53) pak zaručuje stabilitu v okolí počátku.

## 2.2.2 Numerický přístup

Odlišný přístup je použit v [10]. Analýza stability je zde rozdělena do tří částí.

1. fuzzy systém je transformován do po částech bilineární formy,
2. bilineární forma je aproximována pomocí horního a spodního odhadu, které jsou vypočítány použitím kvadratického programování,
3. analýza stability je provedena nalezením Ljapunovovy řešením lineárních maticových nerovnic.

Souhrnné informace o následující metodě jsou v tabulce 2.3

Tabulka 2.3: Přehled vlastností

Řízená soustava	
Typ:	Lineární nebo Takagi-Sugeno stavový model
Rozměr:	SIMO
Omezení:	Trojúhelníkové funkce příslušnosti Definovaný způsob překrytí funkcí příslušnosti
Regulátor	
Typ:	Fuzzy singletonový statický systém
Rozměr:	MISO
Omezení:	Trojúhelníkové funkce příslušnosti Definovaný způsob překrytí funkcí příslušnosti Pro nulový vstup nulový výstup

Dále budeme uvažovat singletonový statický fuzzy systém se vstupním vektorem  $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , s jedním výstupem  $u \in \mathbb{R}$  a s pravidly ve tvaru

$$\text{If } \mathbf{x} \text{ is } \mathcal{A}^{\sigma,\tau} \text{ then } u \text{ is } u_{\sigma,\tau}, \quad \sigma = 1 \dots N_1 \text{ a } \tau = 1 \dots N_2, \quad (2.58)$$

kde  $\mathcal{A}^{\sigma,\tau}$  je dvoudimenzionální fuzzy množina s trojúhelníkovou funkcí příslušnosti, která je definována rovnicí (2.2),  $N_1$  a  $N_2$  je počet funkcí příslušnosti na jednotlivých vstupech (viz obrázek 2.1) a  $u_{\sigma,\tau}$  je skalární hodnota fuzzy singletonu. Rozložení fuzzy množin je stejné jako v části 2.1.1.

### Transformace fuzzy systému

Stejně jako v předešlé části budeme chování fuzzy systému analyzovat v oblastech, které jsou vymezené středy funkcí příslušnosti  $\Phi^{\sigma,\tau} \equiv (\Phi_1^\sigma, \Phi_2^\tau)$ .

Výstup fuzzy systému  $u = \text{Fuz}(x_1, x_2)$  v oblasti  $\Omega_{\sigma,\tau}$  (viz (2.4)) lze vyjádřit bilineární formou

$$\text{Fuz}(x_1, x_2) = C_{12}^{\sigma,\tau} x_1 x_2 + C_1^{\sigma,\tau} x_1 + C_2^{\sigma,\tau} x_2 + C_0^{\sigma,\tau}, \quad (2.59)$$

kde koeficienty  $C_{12}^{\sigma,\tau}$ ,  $C_1^{\sigma,\tau}$ ,  $C_2^{\sigma,\tau}$  a  $C_0^{\sigma,\tau}$  jsou odvozeny v [10].

Nelineární vztah (2.59) budeme aproximovat pomocí spodního a horní odhadu ve tvaru

$$\underline{k}_1^{\sigma,\tau} x_1 + \underline{k}_2^{\sigma,\tau} x_2 \leq C_{12}^{\sigma,\tau} x_1 x_2 + C_1^{\sigma,\tau} x_1 + C_2^{\sigma,\tau} x_2 + C_0^{\sigma,\tau} \leq \bar{k}_1^{\sigma,\tau} x_1 + \bar{k}_2^{\sigma,\tau} x_2. \quad (2.60)$$

Problém nalezení koeficientů  $\underline{\mathbf{K}}^{\sigma,\tau} \equiv (\underline{k}_1^{\sigma,\tau}, \underline{k}_2^{\sigma,\tau})$  a  $\bar{\mathbf{K}}^{\sigma,\tau} \equiv (\bar{k}_1^{\sigma,\tau}, \bar{k}_2^{\sigma,\tau})$  lze redukovat zavedením nových proměnných na

$$\underline{\gamma}_1^{\sigma,\tau} x_1 + \underline{\gamma}_2^{\sigma,\tau} x_2 \leq C_{12}^{\sigma,\tau} x_1 x_2 + C_0^{\sigma,\tau} \leq \bar{\gamma}_1^{\sigma,\tau} x_1 + \bar{\gamma}_2^{\sigma,\tau} x_2, \quad (2.61)$$

kde mezi koeficienty  $\gamma$  a  $k$  je vztah

$$\begin{aligned} \bar{k}_1^{\sigma,\tau} &= C_1^{\sigma,\tau} + \bar{\gamma}_1^{\sigma,\tau} \\ \bar{k}_2^{\sigma,\tau} &= C_2^{\sigma,\tau} + \bar{\gamma}_2^{\sigma,\tau} \\ \underline{k}_1^{\sigma,\tau} &= C_1^{\sigma,\tau} + \underline{\gamma}_1^{\sigma,\tau} \\ \underline{k}_2^{\sigma,\tau} &= C_2^{\sigma,\tau} + \underline{\gamma}_2^{\sigma,\tau}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

K nalezení koeficientů horního omezení, definujeme kritérium optimality ve tvaru

$$\bar{\mathcal{J}}^{\sigma,\tau}(\bar{\gamma}_1^{\sigma,\tau}, \bar{\gamma}_2^{\sigma,\tau}) = \frac{1}{2} \int_{x_2=\Phi_2^{\tau+1}}^{\Phi_2^{\tau+1}} \int_{x_1=\Phi_1^{\sigma}}^{\Phi_1^{\sigma+1}} [\bar{\mathbf{f}}^{\sigma,\tau}(\bar{\gamma}_1^{\sigma,\tau}, \bar{\gamma}_2^{\sigma,\tau})]^2 dx_1 dx_2, \quad (2.63)$$

kde

$$\bar{\mathbf{f}}^{\sigma,\tau}(\bar{\gamma}_1^{\sigma,\tau}, \bar{\gamma}_2^{\sigma,\tau}) = (\bar{\gamma}_1^{\sigma,\tau} x_1 + \bar{\gamma}_2^{\sigma,\tau} x_2) - (C_{12}^{\sigma,\tau} x_2 x_2 + C_0^{\sigma,\tau}). \quad (2.64)$$

Optimální hodnota koeficientu  $\bar{\gamma}^{\sigma,\tau} = (\bar{\gamma}_1^{\sigma,\tau}, \bar{\gamma}_2^{\sigma,\tau})$  musí splňovat

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^{\sigma,\tau} &= \arg \min \bar{\mathcal{J}}^{\sigma,\tau}(\bar{\gamma}_1^{\sigma,\tau}, \bar{\gamma}_2^{\sigma,\tau}) \\ &= \arg \min \frac{1}{2} \int_{x_2=\Phi_2^{\tau+1}}^{\Phi_2^{\tau+1}} \int_{x_1=\Phi_1^{\sigma}}^{\Phi_1^{\sigma+1}} [\bar{\mathbf{f}}^{\sigma,\tau}(\bar{\gamma}_1^{\sigma,\tau}, \bar{\gamma}_2^{\sigma,\tau})]^2 dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (2.65)$$

za podmínky

$$\bar{\mathbf{f}}^{\sigma,\tau}(\bar{\gamma}_1^{\sigma,\tau}, \bar{\gamma}_2^{\sigma,\tau}) \geq 0. \quad (2.66)$$

Pro spodní omezení je postup analogický. Optimalizační problém lze řešit pomocí metody kvadratického programování. Kritérium (2.63) vyjádříme ve formě

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{J}}^{\sigma,\tau}(\bar{\gamma}_1^{\sigma,\tau}, \bar{\gamma}_2^{\sigma,\tau}) &= \frac{1}{2} [\bar{D}_{11}^{\sigma,\tau} (\bar{\gamma}_1^{\sigma,\tau})^2 + \bar{D}_{22}^{\sigma,\tau} (\bar{\gamma}_2^{\sigma,\tau})^2 \\ &\quad + 2\bar{D}_{12}^{\sigma,\tau} \bar{\gamma}_1^{\sigma,\tau} \bar{\gamma}_2^{\sigma,\tau} + 2\bar{D}_1^{\sigma,\tau} \bar{\gamma}_1^{\sigma,\tau} \\ &\quad + 2\bar{D}_2^{\sigma,\tau} \bar{\gamma}_2^{\sigma,\tau} + 2\bar{D}_0^{\sigma,\tau}], \end{aligned}$$

kde koeficienty  $\overline{D}_{12}^{\sigma,\tau}$ ,  $\overline{D}_1^{\sigma,\tau}$ ,  $\overline{D}_2^{\sigma,\tau}$  a  $\overline{D}_0^{\sigma,\tau}$  je možno odvodit ze vztahu (2.63) a jejich výpočet je ukázán v [10]. Celý problém ve standardním tvaru je formulován jako

$$\frac{1}{2}(\overline{\gamma}^{\sigma,\tau})^T \overline{\mathbf{H}}^{\sigma,\tau} \overline{\gamma}^{\sigma,\tau} + (\overline{\mathbf{L}}^{\sigma,\tau})^T \overline{\gamma}^{\sigma,\tau}, \quad (2.67)$$

s podmínkou

$$\overline{\mathbf{M}}^{\sigma,\tau} \overline{\gamma}^{\sigma,\tau} \leq \overline{\mathbf{n}}^{\sigma,\tau}, \quad (2.68)$$

kde

$$\overline{\mathbf{H}}^{\sigma,\tau} = \begin{pmatrix} \overline{D}_{11}^{\sigma,\tau} & \overline{D}_{12}^{\sigma,\tau} \\ \overline{D}_{12}^{\sigma,\tau} & \overline{D}_{22}^{\sigma,\tau} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{L}}^{\sigma,\tau} = \begin{pmatrix} \overline{D}_1^{\sigma,\tau} \\ \overline{D}_2^{\sigma,\tau} \end{pmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{M}}^{\sigma,\tau} = \begin{pmatrix} -\Phi_1^\sigma & -\Phi_2^\tau \\ -\Phi_1^\sigma & -\Phi_2^{\tau+1} \\ -\Phi_1^{\sigma+1} & -\Phi_2^\tau \\ -\Phi_1^{\sigma+1} & -\Phi_2^{\tau+1} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{n}}^{\sigma,\tau} = \begin{pmatrix} -(C_{12}^{\sigma,\tau} \Phi_1^\sigma \Phi_2^\tau) + C_0^{\sigma,\tau} \\ -(C_{12}^{\sigma,\tau} \Phi_1^{\sigma+1} \Phi_2^\tau) + C_0^{\sigma,\tau} \\ -(C_{12}^{\sigma,\tau} \Phi_1^\sigma \Phi_2^{\tau+1}) + C_0^{\sigma,\tau} \\ -(C_{12}^{\sigma,\tau} \Phi_1^{\sigma+1} \Phi_2^{\tau+1}) + C_0^{\sigma,\tau} \end{pmatrix}.$$

Po nalezení horního a dolního omezení ve všech oblastech a po zpětné transformaci pomocí vztahů (2.62) je možné fuzzy systém (2.58) považovat za polytopický systém

$$\text{Fuz}(\mathbf{x}) = \text{Co}(\overline{\mathbf{K}}^{1,1}, \overline{\mathbf{K}}^{1,2}, \dots, \overline{\mathbf{K}}^{N_1-1, N_2-1}, \underline{\mathbf{K}}^{1,1}, \underline{\mathbf{K}}^{2,2}, \dots, \underline{\mathbf{K}}^{N_1-1, N_2-1}) \mathbf{x}, \quad (2.69)$$

kde  $\text{Co}(\cdot)$  označuje konvexní obal.

### Stabilita systému s lineární řízenou soustavou

Nejdříve uvedeme analýzu stability pro lineární řízenou soustavu se stavovým popisem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad (2.70)$$

kde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  je stavový vektor,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  je matice systému,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  je vektor řízení a  $u \in \mathbb{R}$  je řídicí vstup.

Zpětnovazební zapojení řízené soustavy (2.70) a fuzzy regulátoru (2.58) lze reprezentovat jako následující polytopický systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \text{Fuz}(\mathbf{x}) =$$

$$= \text{Co} \left[ (\mathbf{A} + \mathbf{B}\overline{\mathbf{K}}^{11}), (\mathbf{A} + \mathbf{B}\overline{\mathbf{K}}^{12}), \dots, (\mathbf{A} + \mathbf{B}\overline{\mathbf{K}}^{(N_1-1)(N_2-1)}), \right.$$

$$\left. (\mathbf{A} + \mathbf{B}\underline{\mathbf{K}}^{11}), (\mathbf{A} + \mathbf{B}\underline{\mathbf{K}}^{22}), \dots, (\mathbf{A} + \mathbf{B}\underline{\mathbf{K}}^{(N_1-1)(N_2-1)}) \right] \mathbf{x}. \quad (2.71)$$

Systém (2.71) je kvadraticky stabilní, když existuje pozitivně definitní matice  $\mathbf{P}$ , které vyhovují maticové nerovnici

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_i)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_i) < 0, \quad i = 1, \dots, L, \quad (2.72)$$

kde  $\mathbf{K}_i$  jsou vrcholy konvexního obalu (2.69) a  $L \leq 2(N_1 - 1)(N_2 - 1)$ .

### Stabilita systému s nelineární řízenou soustavou

Modifikace výše uvedeného způsobu je uvedena v [9]. Místo omezení lineárními závislostmi (2.60) se zde uvažuje afinní omezení ve tvaru

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{K}}^{\sigma,\tau} \mathbf{x} + \underline{k}_0^{\sigma,\tau} &\equiv \underline{k}_1^{\sigma,\tau} x_1 + \underline{k}_2^{\sigma,\tau} x_2 + \underline{k}_0^{\sigma,\tau} \\ &\leq C_{12}^{\sigma,\tau} x_1 x_2 + C_1^{\sigma,\tau} x_1 + C_2^{\sigma,\tau} x_2 + C_0^{\sigma,\tau} \leq \\ \overline{\mathbf{K}}^{\sigma,\tau} \mathbf{x} + \overline{k}_0^{\sigma,\tau} &\equiv \overline{k}_1^{\sigma,\tau} x_1 + \overline{k}_2^{\sigma,\tau} x_2 + \overline{k}_0^{\sigma,\tau}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

pro  $\mathbf{x} \in \Omega_{\sigma,\tau}$ . V oblastech  $\Omega_{\sigma,\tau}^0$  obsahujících počátek se však musí předpokládat omezující závislosti lineární, protože v počátku se předpokládá rovnovážný bod.

Řízený systém je modelován jako Takagi-Sugeno fuzzy systém s pravidly ve tvaru

$$\text{IF } \mathbf{x} \text{ is } \mathcal{B}_\rho \text{ THEN } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_\rho \mathbf{x} + \mathbf{b}_\rho u, \quad (2.74)$$

kde  $\rho = 1, \dots, N_3$  a  $N_3$  je počet pravidel,  $\mathcal{B}_\rho$  jsou fuzzy množiny definované na vstupním prostoru s funkcemi příslušnosti  $\mu_\rho(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  je stavový vektor,  $\mathbf{A}_\rho \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  a  $\mathbf{b}_\rho \in \mathbb{R}^2$  jsou parametry lokálního LTI modelu a  $u \in \mathbb{R}$  je řídicí vstup systému. Výstup je dán výrazem

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{\rho=1}^{N_3} w_\rho(\mathbf{x}) (\mathbf{A}_\rho \mathbf{x} + \mathbf{b}_\rho u) \\ &= \text{Co} [(\mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_1 u), \dots, (\mathbf{A}_{N_3} \mathbf{x} + \mathbf{b}_{N_3} u)], \end{aligned} \quad (2.75)$$

kde

$$w_\rho(\mathbf{x}) = \frac{\mu_\rho(\mathbf{x})}{\sum_{\rho=1}^{N_3} \mu_\rho(\mathbf{x})} \quad w_\rho(\mathbf{x}) \geq 0. \quad (2.76)$$

Analogicky s postupem uvedeným v odstavci 2.2.2 lze nalézt konstanty odhadu  $\underline{\mathbf{K}}^{\sigma,\tau}$ ,  $\overline{k}_i$ ,  $\overline{\mathbf{K}}^{\sigma,\tau}$  a  $\underline{k}_i$  metodou kvadratického programování. Výstup fuzzy systému v oblasti  $\Omega_{\sigma,\tau}$  se vyjádří jako polytopický afinní systém

$$u = \text{Fuz}(\mathbf{x}) = \text{Co} \left( \underline{\mathbf{K}}^{\sigma,\tau} \mathbf{x} + \underline{k}_0^{\sigma,\tau}, \overline{\mathbf{K}}^{\sigma,\tau} \mathbf{x} + \overline{k}_0^{\sigma,\tau} \right). \quad (2.77)$$

Definujme ještě množinu indexů pravidel řízené soustavy (2.74), která jsou aktivována v oblasti  $\Omega_{\sigma,\tau}$

$$\Sigma^{\sigma,\tau} \equiv \{\rho | \exists \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \Omega_{\sigma,\tau}, w_\rho(\mathbf{x}) \neq 0\}.$$



Pak zpětnovazební systém v oblasti  $\Omega_{\sigma,\tau}$  lze vyjádřit jako polytopický afinní systém

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \text{Co} \left[ (\mathbf{A}_\rho + \mathbf{b}_\rho \underline{\mathbf{K}}^{\sigma,\tau}) \mathbf{x} + \mathbf{b}_\rho \underline{k}^{\sigma,\tau}, \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{A}_\rho + \mathbf{b}_\rho \overline{\mathbf{K}}^{\sigma,\tau}) \mathbf{x} + \mathbf{b}_\rho \overline{k}^{\sigma,\tau} \right] \\ &= \text{Co} \left[ \underline{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma,\tau} \mathbf{x} + \underline{\mathbf{o}}_\rho^{\sigma,\tau}, \overline{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma,\tau} \mathbf{x} + \overline{\mathbf{o}}_\rho^{\sigma,\tau} \right],\end{aligned}\quad (2.78)$$

kde  $\rho \in \Sigma^{\sigma,\tau}$ ,  $\underline{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma,\tau} \equiv (\mathbf{A}_\rho + \mathbf{b}_\rho \underline{\mathbf{K}}^{\sigma,\tau})$ ,  $\overline{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma,\tau} \equiv (\mathbf{A}_\rho + \mathbf{b}_\rho \overline{\mathbf{K}}^{\sigma,\tau})$ ,  $\underline{\mathbf{o}}_\rho^{\sigma,\tau} \equiv \mathbf{b}_\rho \underline{k}^{\sigma,\tau}$  a  $\overline{\mathbf{o}}_\rho^{\sigma,\tau} \equiv \mathbf{b}_\rho \overline{k}^{\sigma,\tau}$ .

Stabilitu zpětnovazebního systému lze dokázat nalezením Ljapunovovy funkce ve formě kvadratické funkce  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{P} \mathbf{x}$ . Zpětnovazební systém (2.78) je kvadraticky stabilní, jestliže existuje společná pozitivně definitní matice  $\mathbf{P}$  splňující následující nerovnice pro všechna  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

- v oblastech  $\Omega_{\sigma,\tau}$  neobsahující počátek

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^\top (\overline{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma,\tau} \mathbf{P} + \mathbf{P} \overline{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma,\tau}) \mathbf{x} + \overline{\mathbf{o}}_\rho^{\sigma,\tau \top} \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{P} \overline{\mathbf{o}}_\rho^{\sigma,\tau} &< 0, \\ \mathbf{x}^\top (\underline{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma,\tau} \mathbf{P} + \mathbf{P} \underline{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma,\tau}) \mathbf{x} + \underline{\mathbf{o}}_\rho^{\sigma,\tau \top} \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{P} \underline{\mathbf{o}}_\rho^{\sigma,\tau} &< 0,\end{aligned}\quad (2.79)$$

- v oblastech  $\Omega_{\sigma,\tau}^0$  obsahující počátek

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^\top (\overline{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma,\tau} \mathbf{P} + \mathbf{P} \overline{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma,\tau}) \mathbf{x} &< 0, \\ \mathbf{x}^\top (\underline{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma,\tau} \mathbf{P} + \mathbf{P} \underline{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma,\tau}) \mathbf{x} &< 0,\end{aligned}\quad (2.80)$$

kde  $\rho \in \Sigma^{\sigma,\tau}$ . Výše uvedené vztahy lze vyjádřit pomocí lineárních maticových nerovnic

$$\mathbf{P} > 0, \quad (2.81)$$

$$\overline{\mathbf{G}}_{a\rho}^{\sigma,\tau \top} \mathbf{P}_a + \mathbf{P}_a \overline{\mathbf{G}}_{a\rho}^{\sigma,\tau} - \sum_{i=1}^2 \overline{\theta}_i^{\sigma,\tau} \mathbf{Q}_{ai}^{\sigma,\tau} < 0, \quad (2.82)$$

$$\underline{\mathbf{G}}_{a\rho}^{\sigma,\tau \top} \mathbf{P}_a + \mathbf{P}_a \underline{\mathbf{G}}_{a\rho}^{\sigma,\tau} - \sum_{i=1}^2 \underline{\theta}_i^{\sigma,\tau} \mathbf{Q}_{ai}^{\sigma,\tau} < 0, \quad (2.83)$$

a v oblasti  $\Omega_{\sigma,\tau}^0$  obsahující počátek

$$\overline{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma,\tau \top} \mathbf{P} + \mathbf{P} \overline{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma,\tau} < 0, \quad (2.84)$$

$$\underline{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma,\tau \top} \mathbf{P} + \mathbf{P} \underline{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma,\tau} < 0, \quad (2.85)$$

kde

$$\overline{\mathbf{G}}_{a\rho}^{\sigma,\tau} \equiv \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{G}}_{\rho}^{\sigma,\tau} & \overline{\sigma}_{\rho}^{\sigma,\tau} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{G}}_{a\rho}^{\sigma,\tau} \equiv \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{G}}_{\rho}^{\sigma,\tau} & \underline{\sigma}_{\rho}^{\sigma,\tau} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.86)$$

$$\mathbf{Q}_1^{\sigma,\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2^{\sigma,\tau} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.87)$$

$$\mathbf{R}_1^{\sigma,\tau} = \left(-\frac{1}{2} (\Phi_1^{\sigma} + \Phi_1^{\sigma+1}) \quad 0\right)^T, \quad \mathbf{R}_2^{\sigma,\tau} = \left(0 \quad -\frac{1}{2} (\Phi_2^{\tau} + \Phi_2^{\tau+1})\right)^T, \quad (2.88)$$

$$s_1^{\sigma,\tau} = \Phi_1^{\sigma} \Phi_1^{\sigma+1}, \quad s_2^{\sigma,\tau} = \Phi_2^{\tau} \Phi_2^{\tau+1}, \quad (2.89)$$

$$\mathbf{P}_a \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.90)$$

$$\mathbf{Q}_{ai}^{\sigma,\tau} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_i^{\sigma,\tau} & \mathbf{R}_i^{\sigma,\tau} \\ \mathbf{R}_i^{\sigma,\tau T} & s_i^{\sigma,\tau} \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

$$\overline{\theta}_i^{\sigma,\tau} > 0, \quad \underline{\theta}_i^{\sigma,\tau} > 0 \quad (2.92)$$

Nalezení společné kvadratické Ljapunovovy funkce nemusí být vždy jednoduché a může se stát, že v určité oblasti nebudou požadavky na ni kladené splněny, i když je systém stabilní. Tomu se lze vyhnout použitím obecnější parametrizace kandidátů na Ljapunovovu funkci. Kim v [9] ukazuje použití po částech definované kvadratické Ljapunovovy funkce (piecewise quadratic Lyapunov function) původně publikované v [8]. Kvadratická funkce bude v každé oblasti jiná pouze s omezením, že výsledná Ljapunovova funkce, která je daná sjednocením dílčích funkcí, musí být spojitá. Ljapunovova funkce je definována ve tvaru

$$V(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x}^T \mathbf{P}^{\sigma,\tau} \mathbf{x} & \text{v oblastech } \Omega_{\sigma,\tau}^0 \text{ obsahující počátek} \\ \mathbf{x}_a^T \mathbf{P}_a^{\sigma,\tau} \mathbf{x}_a & \text{v oblastech } \Omega_{\sigma,\tau} \text{ mimo počátek} \end{cases} \quad (2.93)$$

$$\mathbf{P}^{\sigma,\tau} = \mathbf{P} + \mathbf{F}^{\sigma,\tau T} \mathbf{T} \mathbf{F}^{\sigma,\tau} \quad (2.94)$$

$$\mathbf{P}_a^{\sigma,\tau} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{\sigma,\tau} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{F}_a^{\sigma,\tau T} \mathbf{T} \mathbf{F}_a^{\sigma,\tau}, \quad (2.95)$$

kde

$\mathbf{x}_a = (x, 1)^T$  je stavový vektor v homogenních souřadnicích,

$\mathbf{0}$  je nulová matice rozměru  $2 \times 1$  a

$\mathbf{F}^{\sigma,\tau}$  je matice zaručující spojitost Ljapunovovy funkce na hranici oblastí  $\Omega_{\sigma,\tau}$  a  $\Omega_{\sigma',\tau'}$  ( $\sigma'$  a  $\tau'$  jsou indexy oblastí sousedících s  $\Omega_{\sigma,\tau}$ ) a splňující podmínku

$$\mathbf{F}^{\sigma,\tau} \mathbf{x} = \mathbf{F}^{\sigma',\tau'} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\sigma,\tau} \cap \Omega_{\sigma',\tau'}.$$

Algoritmus výpočtu matic  $\mathbf{F}^{\sigma,\tau}$  lze nalézt v [8].

Zpětnovazební systém (2.78) je asymptoticky stabilní pokud existují symetrické matice  $\mathbf{T}$  a  $\mathbf{P}$  a kladná čísla  $\overline{\theta}_i^{\sigma,\tau}$ ,  $\underline{\theta}_i^{\sigma,\tau}$  a  $\pi_i^{\sigma,\tau}$  ( $i = 1, 2, \sigma = 0, \dots, N_1$ ,

$\tau = 0, \dots, N_2, \rho \in \Sigma^{\sigma, \tau}$ ), pro které platí v oblasti  $\Omega_{\sigma, \tau}$  neobsahující počátek

$$\mathbf{P}_a^{\sigma, \tau} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{F}_a^{\sigma, \tau \top} \mathbf{T} \mathbf{F}_a^{\sigma, \tau} \quad (2.96)$$

$$\mathbf{P}_a^{\sigma, \tau} + \sum_{i=1}^2 \bar{\pi}_i^{\sigma, \tau} \mathbf{Q}_{ai}^{\sigma, \tau} > 0 \quad (2.97)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_{a\rho}^{\sigma, \tau \top} \mathbf{P}_a^{\sigma, \tau} + \mathbf{P}_a^{\sigma, \tau} \bar{\mathbf{G}}_{a\rho}^{\sigma, \tau} - \sum_{i=1}^2 \bar{\theta}_i^{\sigma, \tau} \mathbf{Q}_{ai}^{\sigma, \tau} < 0 \quad (2.98)$$

$$\underline{\mathbf{G}}_{a\rho}^{\sigma, \tau \top} \mathbf{P}_a^{\sigma, \tau} + \mathbf{P}_a^{\sigma, \tau} \underline{\mathbf{G}}_{a\rho}^{\sigma, \tau} - \sum_{i=1}^2 \underline{\theta}_i^{\sigma, \tau} \mathbf{Q}_{ai}^{\sigma, \tau} < 0 \quad (2.99)$$

a v oblasti  $\Omega_{\sigma, \tau}^0$  obsahující počátek

$$\mathbf{P}^{\sigma, \tau} = \mathbf{P} + \mathbf{F}^{\sigma, \tau \top} \mathbf{T} \mathbf{F}^{\sigma, \tau} \quad (2.100)$$

$$\mathbf{P}^{\sigma, \tau} > 0 \quad (2.101)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma, \tau \top} \mathbf{P}^{\sigma, \tau} + \mathbf{P}^{\sigma, \tau} \bar{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma, \tau} < 0 \quad (2.102)$$

$$\underline{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma, \tau \top} \mathbf{P}^{\sigma, \tau} + \mathbf{P}^{\sigma, \tau} \underline{\mathbf{G}}_\rho^{\sigma, \tau} < 0. \quad (2.103)$$

## 2.3 Závěr

Analýza stability v této kapitole je založena na hledání Ljapunovovy funkce. Výklad byl předveden na systémech druhého řádu s jedním nebo dvěma vstupy. Rozšíření na složitější systémy je možné. Byly ukázány analytické vztahy popisující závislost mezi vstupem a výstupem systému. K tomu, aby to bylo možné, byly modely řízených soustav v jednodušší formě fuzzy systémů. Byly použity singletonové nebo Takagi-Sugeno fuzzy systémy s rovnoměrným pokrytím vstupů fuzzy množinami tak, aby pro každý vstup byla nenulová hodnota funkce příslušnosti jen u dvou sousedních fuzzy množin. To může představovat omezení navržených metod. V rámci praktické části jsem kritérium uvedené v části 2.2.2 implementoval a vyzkoušel.



# Kapitola 3

## Stabilita vstup-výstup

V předchozí kapitole byl systém vyjádřen stavovým popisem, v této kapitole se budu věnovat stabilitě z hlediska vstupních a výstupních signálů. Kapitola je rozdělena na tři části. První se věnuje využití podmínky pasivity. Uvedu podmínky, za kterých lze Mamdani fuzzy PD regulátor považovat za pasivní systém. Další části se zabývají metodami, které jsou založené na větě o malém zesílení a podmínce konicity. V druhé části je popsána podmínka robustní stability fuzzy regulátoru a při jejím nesplnění algoritmus, kterým lze fuzzy regulátor upravit, aby byla podmínka stability splněna. V třetí části uvedený postup umožňuje výpočet zesílení fuzzy systému a tím při znalosti zesílení řízené soustavy ověřit platnost věty o malém zesílení.

### 3.1 Vyšetřování stability pomocí pasivity

Dále uvedený postup vychází z článků [1] a [2]. Nejdříve uvedu podmínky, za kterých lze dokázat pasivitu fuzzy regulátoru. Dále uvedu podmínky stability zpětnovazebního řídicího systému s fuzzy regulátorem.

#### 3.1.1 Pasivita fuzzy regulátorů

V následující části popíši fuzzy regulátor, který splňuje vlastnosti pasivity. V tabulce 3.1 jsou uvedeny podmínky, které musí regulátor splňovat.

Budeme uvažovat fuzzy regulátor Mamdaniho typu se dvěma vstupy  $e_1$  a  $e_2$  (regulační odchylka a její derivace), které jsou normované na stejný rozsah hodnot  $\langle -L, L \rangle$ , a jedním výstupem  $u$ .

Prostor vstupních proměnných je pokryt množinami  $\mathcal{A}_i$  s funkcemi příslušnosti  $\mu_i$ , kde  $i = \{-(N-1)/2, \dots, 0, \dots, (N-1)/2\}$  a  $N \in \mathbb{N}$  je liché číslo, které udává počet fuzzy množin. Pokrytí vstupního prostoru je u obou vstupů stejné a

Tabulka 3.1: Přehled vlastností

Řízená soustava	
Typ:	Libovolný pasivní systém
Rozměr:	SISO
Regulátor	
Typ:	Mamdani fuzzy PD regulátor
Rozměr:	SISO
Omezení:	Symetrické rozložení lichého počtu funkcí příslušnosti Definované uspořádání báze pravidel

splňuje podmínky:

$$0 \leq \mu(e)_j = \mu(-e)_{-j} \leq 1, \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \mu_i(e) = 1, \quad (3.2)$$

$$|i - j| > 1 \Rightarrow \mu_i(e)\mu_j(e) = 0. \quad (3.3)$$

Vztah (3.1) znamená, že vstupní prostor je pokryt symetricky vzhledem k nule. Vztahy (3.2) a (3.3) zaručují, že libovolná hodnota vstupu náleží (ve smyslu nennulové funkce příslušnosti) nejvýše dvěma sousedním fuzzy množinám a součet hodnot funkcí příslušnosti je roven jedné. Pro  $e_i < -L$  se předpokládá  $\mu_{-(N-1)/2} = 1$  a pro  $e_i > L$  je  $\mu_{(N-1)/2} = 1$ . Tvar použitých funkcí příslušnosti musí splňovat podmínku pro  $\forall e' \neq e$  a  $\forall \lambda \in (0, 1)$ ,

$$\mu_i(\lambda e' + (1 - \lambda)e) \geq \min(\mu_i(e'), \mu_i(e)). \quad (3.4)$$

kde  $i = \{-(N - 1)/2, \dots, -1, 1, \dots, (N - 1)/2\}$ . V případě  $i = 0$  musí být minimum na pravé straně (3.4) ostře menší, aby byla zaručena existence rovnovážného bodu v nule.

Výstupní prostor je pokryt fuzzy množinami  $\mathcal{B}_i$  se středy  $\Phi_i$ , pro které musí platit, že  $\Phi_0 = 0$ ,  $\Phi_i = -\Phi_{-i}$  a  $\Phi_i > \Phi_j$  pro  $i > j$ .

Báze pravidel je tvořena  $N^2$  pravidly ve tvaru:

$$\text{IF } e_1 \text{ is } \mathcal{A}_i \text{ and } e_2 \text{ is } \mathcal{A}_j \text{ THEN } u \text{ is } \mathcal{B}_{f(i,j)},$$

kde  $f(i, j)$  je funkce přiřazující hodnotu indexu výstupní fuzzy množiny  $\mathcal{B}_{f(i,j)}$  podle indexů vstupních fuzzy množin. Funkce  $f$  musí splňovat následující pod-

mínky:

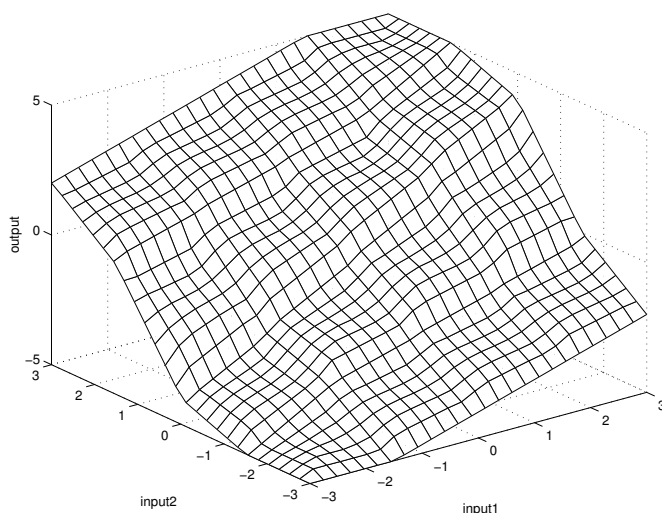
$$f(i, j) = -f(-i, -j), \forall i, j, \quad (3.5)$$

$$f(0, 0) = 0, \quad (3.6)$$

$$j(f(i, j) - f(i, 0)) > 0, \forall i, j > 0, \quad (3.7)$$

$$i(f(i, j) - f(0, j)) > 0, \forall i, j > 0. \quad (3.8)$$

Fuzzy regulátor splňující výše uvedené podmínky se v článku [1] označuje jako sektorový fuzzy regulátor. Toto označení plyne z vlastností (3.5) až (3.8), které zaručují lichou symetrii a monotónnost báze pravidel obsahující fuzzy množinu  $\mathcal{A}_0$ . Příklad výstupní funkce fuzzy systému, který splňuje výše uvedené podmínky, je na obrázku 3.1. Na obrázku 3.2 je příklad výstupu fuzzy systému, který uvedené podmínky nesplňuje. Zde je vidět, že při konstantní hodnotě prvního vstupu rovné -3 nebo 3 není v bázi pravidel zřejmě splněna podmínka (3.7).



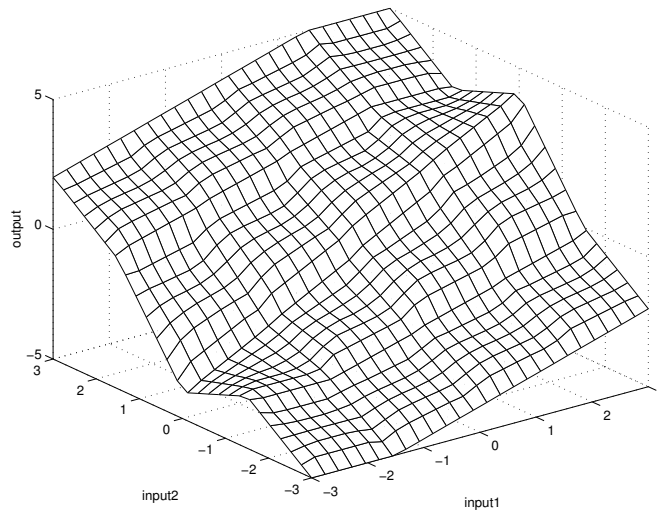
Obrázek 3.1: Výstupní funkce splňující podmínky (3.5) - (3.8)

Defuzzifikovaný výstup  $u$  je dán rovnicí:

$$u = \frac{\sum_{i=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \sum_{j=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} [\mu_i(e_1) * \mu_j(e_2)] \Phi_{f(i,j)}}{\sum_{i=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \sum_{j=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \mu_i(e_1) * \mu_j(e_2)}, \quad (3.9)$$

kde  $*$  označuje minimum nebo součin funkcí příslušnosti.

Na výše uvedený fuzzy systém se lze dívat jako na nelineární zobrazení  $\Psi(e_1, e_2)$ , které mapuje podle vztahu (3.9) vstupy  $e_1$  a  $e_2$  na výstup  $u$ . Vlastnosti tohoto zobrazení uvádí následující věta [1].



Obrázek 3.2: Výstupní funkce nespňující podmínky (3.5) - (3.8)

**Věta 1** *Sektorový fuzzy regulátor*

1.  $\Psi(e_1, e_2)$  je omezená a splňuje Lipschitzovy podmínky,
2.  $\Psi(0, 0) = 0$  - podmínka rovnovážného stavu,
3.  $\Psi(e_1, e_2) = -\Psi(-e_1, -e_2)$  - lichá symetrie,
4. pro všechna  $e_1$  a  $e_2$  platí

$$\begin{aligned} 0 \leq e_1(\Psi(e_1, e_2) - \Psi(0, e_2)) &\leq \lambda' e_1^2, \\ 0 \leq e_2(\Psi(e_1, e_2) - \Psi(e_1, 0)) &\leq \gamma' e_2^2. \end{aligned}$$

Definujeme-li stavový popis fuzzy regulátoru

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ u &= \Psi(e_1, e_2), \end{aligned} \tag{3.10}$$

pak tento nelineární SISO systém je ekvivalentní s výše uvedeným fuzzy systémem a je striktně pasivní [1].

**3.1.2 Stabilita zpětnovazebního řídicího systému**

K odvození stability zpětnovazebního regulačního systému lze přímo použít tvrzení uvedená v teorému 1.



V článku [1] je uveden následující příklad nelineární regulační soustavy.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \quad (3.11)$$

$$\zeta = h(\mathbf{x}), \quad (3.12)$$

$$\dot{y} = \zeta, \quad (3.13)$$

$$u = \Psi(e, \dot{e}), \quad (3.14)$$

$$e(t) = y_d - y(t), \quad (3.15)$$

kde  $\mathbf{x} \in \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$  je stavový vektor,  $\mathbf{X}$  je stavový prostor,  $\zeta \in \mathbb{R}$ ,  $h(\mathbf{x}) : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  je výstup,  $y_d \in \mathbb{R}$  je žádaná hodnota a  $e \in \mathbb{R}$  označuje regulační odchylku. Dále funkce  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$  splňuje podmínku  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  a funkce  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  jsou spojité. Od regulovaného systému (3.11) - (3.14) požadujeme, aby byl dosažitelný s detekovatelným nulovým stavem tj., je-li  $u(t) = 0$  a  $\zeta(t) = 0$  pak  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ .

Z předchozích rovnic je zřejmé, že regulovaný systém má rovnovážný bod v počátku. Dostačující podmínkou asymptotické stability nulového řešení systému (3.11) - (3.14) je vstupní a výstupní pasivita subsystémů  $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, h)$ . Jsou-li pouze pasivní, pak je nulové řešení pouze Ljapunovsky stabilní. Důkaz předchozího tvrzení je vzhledem k pasivitě fuzzy regulátoru (3.10) přímo důsledkem teorému 1.

### 3.1.3 Závěr

Uvedená metoda analýzy stability se od ostatních liší tím, že uvažuje použití Mamdaniho fuzzy systému. Ten je ale poměrně silně omezen podmínkami, které definují uspořádání báze pravidel, a způsobem pokrytí vstupů fuzzy množinami. Dalším omezením je, že metodu lze aplikovat jen na SISO systémy. Uvedený příklad představuje poměrně speciální aplikaci na jednorozměrnou řízenou soustavu s astatizmem prvního stupně.

## 3.2 Robustní stabilita založená na podmínce konicity

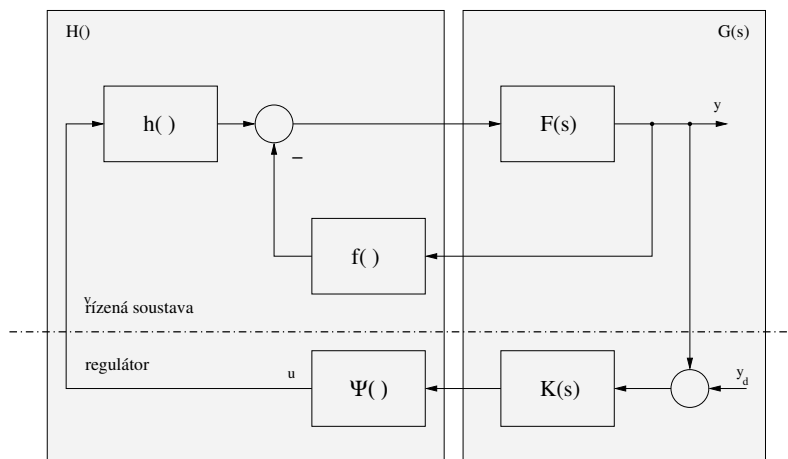
V následující části bude uvedena analýza robustní stability, která je publikována v článku [5]. V tabulce 3.2 je stručný přehled parametrů řízené soustavy a regulátoru. Ve výše uvedené práci se předpokládá, že předem existuje regulátor, který splňuje nějaké dané podmínky regulace. Pro tento nominální regulátor je odvozena podmínka robustní stability. V případě, že podmínka není splněna, je v článku uveden postup změny parametrů, aby podmínka stability byla splněna a aby nový regulátor zachovával původní vlastnosti.

Tabulka 3.2: Přehled vlastností

Řízená soustava	
Typ:	lineární stabilní sys. se statickou nelinearitou ve zpětné vazbě
Rozměr:	SIMO
Omezení:	statická nelinearita má nulovou hodnotu v počátku
Regulátor	
Typ:	fuzzy singletonový systém s vstupním lineárním filtrem
Rozměr:	MISO
Omezení:	statická nelinearita má nulovou hodnotu v počátku trojúhelníkové funkce příslušnosti na vstupu stupeň překrytí roven dvěma

### 3.2.1 Popis regulační soustavy

Regulační soustava, kterou budeme dále uvažovat, je znázorněná na obrázku 3.3. Řízený systém se skládá z lineární části popsané přenosovou maticí  $F(s)$  a nelineární části obsahující statické nelinearity  $h() : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a  $f() : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Regulátor je také rozdělen na lineární dynamickou část (filtrace, PID složky) popsanou přenosovou maticí  $K(s)$  a na nelineární statickou část  $\Psi() : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Nelineární



Obrázek 3.3: Schéma zpětnovazební regulace

části jsou modelovány jako fuzzy systémy. Pro stabilitu rovnovážného bodu v počátku musí statické nelinearity splňovat podmínku:

$$f(\mathbf{0}) = 0, \quad h(0) = 0, \quad \Psi(\mathbf{0}) = 0. \quad (3.16)$$

Druhou podmínkou je, že celý řízený systém stejně jako jeho lineární část  $F(s)$  má pouze jeden vstup. Jedná se tedy o SIMO systém s MISO regulátorem.

Uvažovaný systém bude výhodně rozdělit na lineární časově invariantní část s přenosovou maticí  $G(s)$  (viz obrázek 3.3), která obsahuje lineární část řízené soustavy  $F(s)$  a lineární část regulátoru  $K(s)$ , a na statickou nelineární část obsahující nelinearity  $f()$  a  $h()$  v řízené soustavě a  $\Psi()$  v regulátoru. Nelineární část označíme  $H(\mathbf{x})$  a platí pro ni

$$H(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - h(\Psi(\mathbf{x})), \quad (3.17)$$

kde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ .

### 3.2.2 Návrh robustního regulátoru

Cílem tohoto odstavce bude nalézt robustní regulátor, který se co nejvíce svými vlastnostmi přibližuje původnímu regulátoru  $\Psi_0(\mathbf{x})$ . Hledaný regulátor  $\Psi(\mathbf{x})$  a tedy i  $H(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}) + h(\Psi(\mathbf{x}))$  má splňovat podmínky:

$$r(\mathbf{C}) > d(\mathbf{C}) \quad (3.18)$$

$$g(H - H_0) \text{ je minimální,} \quad (3.19)$$

kde  $H_0(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}) + h(\Psi_0(\mathbf{x}))$ ,  $r()$  je funkce robustnosti a  $d()$  je funkce odchylky. Úkolem je nalézt takový střed  $\mathbf{C}$ , který splňuje podmínky (3.18) a (3.19). Vzhledem k tomu, že množina přípustných středů  $\mathcal{C}_G$  může být neomezená a otevřená, je vhodné omezit hledání na její podmnožinu definovanou například jako

$$\mathcal{C}_G^d = \{\mathbf{C} \in \mathcal{C}_G : r_G(\mathbf{C}) \geq r_{\min} > 0, |\mathbf{C}| \leq |\mathbf{C}|_{\max}\}, \quad (3.20)$$

kde parametr  $r_{\min}$  může zahrnovat předpokládanou neurčitost v řízené soustavě. V článku [5] je dokázáno, že následující algoritmus vede k nalezení regulátoru, který splňuje podmínky (3.18) a (3.19):

1. Najdi  $\mathbf{C}^* \in \mathcal{C}_G^d$  pro něž platí:

$$d_{H_0}(\mathbf{C}^*) - r_G(\mathbf{C}^*) = \min_{\mathbf{C} \in \mathcal{C}_G^d} (d_{H_0}(\mathbf{C}) - r_G(\mathbf{C})). \quad (3.21)$$

2. Označ  $r^* = r_G(\mathbf{C}^*)$ , urči pro všechna  $\mathbf{x}$  interval  $I(\mathbf{x}) = [I_l(\mathbf{x}), I_u(\mathbf{x})] = [\mathbf{C}^* \mathbf{x} - r^* \|\mathbf{x}\|, \mathbf{C}^* \mathbf{x} + r^* \|\mathbf{x}\|]$  a definuj  $H(\mathbf{x})$

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} H_0(\mathbf{x}) & \text{pro } H_0(\mathbf{x}) \subset I(\mathbf{x}), \\ H_0(\mathbf{x}) - (H_{0u}(\mathbf{x}) - I_u(\mathbf{x})) & \text{pro } H_{0u}(\mathbf{x}) > I_u(\mathbf{x}), \\ H_0(\mathbf{x}) + (I_l(\mathbf{x}) - H_{0l}(\mathbf{x})) & \text{pro } H_{0l}(\mathbf{x}) < I_l(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (3.22)$$

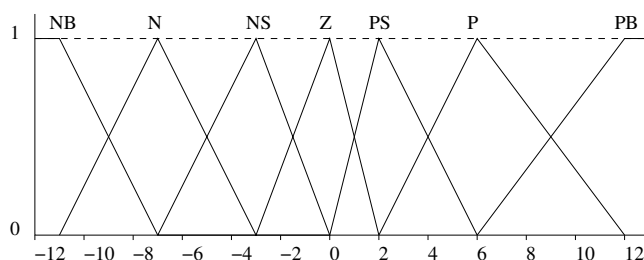
kde  $H_{0l}(\mathbf{x})$  a  $H_{0u}(\mathbf{x})$  je horní a dolní odhad funkce  $H_0(\mathbf{x})$ .

Podstatou výše uvedené metody je restrikce původní funkce  $H_0(\mathbf{x})$  do oblasti vymezené jehlanem, který je definován intervaly  $I(\mathbf{x})$ . V této oblasti je při zjištěné hodnotě robustnosti  $r^*$  zaručena platnost podmínky (3.18) a tím i stabilita systému. Volba středu  $C^*$  jako minimum rozdílu  $d_{H_0}(C) - r_G(C)$  zaručuje, že je splněna podmínka (3.19).

### 3.2.3 Návrh robustního fuzzy regulátoru

Nyní ukážeme, jak výše uvedený algoritmus aplikovat na systém, jehož nelineární části jsou modelovány jako fuzzy singletonový systém. Nejdříve popíšeme použitý fuzzy systém a jeho některé vlastnosti. V závěru je uveden fuzzy regulátor vyhovující podmínkám (3.18) a (3.19).

Uvažujeme singletonový fuzzy systém se dvěma vstupy a jedním výstupem. Vstupní prostor je v každé dimenzi pokryt fuzzy množinami s trojúhelníkovou funkcí příslušnosti se stupněm překrytí roven dvěma. Jedna z fuzzy množin má střed v nule. Příklad přípustného pokrytí jedné dimenze vstupního prostoru je na obrázku 3.4. Uvažovaný fuzzy systém má pravidla ve tvaru



Obrázek 3.4: Vstupní fuzzy množiny

$$\text{IF } x_1 \text{ is } \mathcal{A}^\sigma \text{ and } x_2 \text{ is } \mathcal{B}^\tau \text{ THEN } u \text{ is } u_{\sigma,\tau}, \quad (3.23)$$

kde  $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$  je vektor vstupu,  $\sigma = 1, \dots, N_1$ ,  $\tau = 1, \dots, N_2$ ,  $N_i$  je počet fuzzy množin na prostoru  $i$ -tého vstupu,  $i = 1, 2$ ,  $\mathcal{A}^\sigma$  a  $\mathcal{B}^\tau$  jsou fuzzy množiny s trojúhelníkovou funkcí příslušnosti se středy  $\Phi_1^\sigma$  a  $\Phi_1^\tau$ ,  $u$  je výstup a  $u_{\sigma,\tau}$  je singleton.

Na vstupním prostoru definujeme stejně jako v kapitole 2 oblast  $\Omega_{\sigma,\tau}$  (viz (2.4)). Výstup fuzzy systému s pravidly podle (3.23) je možné v této oblasti vyjádřit [5]

$$u = \text{Fuz}(x_1, x_2) = (\alpha_1, \alpha'_1) \begin{pmatrix} u_{\sigma+1,\tau+1} & u_{\sigma+1,\tau} \\ u_{\sigma,\tau+1} & u_{\sigma,\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha'_2 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$= h_0 + h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_{12} x_1 x_2, \quad (3.25)$$

kde  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  jsou definovány vztahy (2.6) a (2.7),  $\alpha'_i = 1 - \alpha_i$ , kde  $i = 1, 2$  a parametry  $h_0, h_1, h_2$  a  $h_{12}$  lze určit dosazením do (3.24) ze vztahů (2.6) a (2.7). Předchozí výraz říká, že výstup fuzzy systému je bilineární funkcí procházející body  $z_{i,j} \equiv (\Phi_1^i, \Phi_2^j, u_{i,j})^T$ , kde  $i = \sigma, \sigma + 1$  a  $j = \tau, \tau + 1$ . Tyto čtyři body  $z_{i,j}$  tvoří vrcholy čtyřstěnu  $\mathbf{T} = \text{Co}(z_{i,j})$ , uvnitř kterého je výstupní hodnota fuzzy systému  $u = \text{Fuz}(x_1, x_2)$  tj.

$$(x_1, x_2, \text{Fuz}(x_1, x_2)) \in \mathbf{T} = \text{co}(z_{ij}), \quad (3.26)$$

kde  $(x_1, x_2) \in \Omega_{\sigma,\tau}$ ,  $i = \sigma, \sigma + 1$  a  $j = \tau, \tau + 1$ .

Uvažujeme regulační soustavu dle obrázku 3.3 pro jednoduchost bez vstupní nelinearity  $h()$ . Nelineární část  $H()$  je složená z funkcí  $\Psi(\mathbf{x})$  a  $f(\mathbf{x})$ , které jsou implementovány jako fuzzy systémy s pravidly ve tvaru (3.23) se stejnými fuzzy množinami v antecedentech a se singletony  $v_\rho$  a  $w_\rho$ ,  $\rho = 1, \dots, N_1 N_2$  v závěru pravidel. Výstup nelineárního systému  $H()$  je dán rovnicí

$$\begin{aligned} u = H(\mathbf{x}) &= -f(\mathbf{x}) + \Psi(\mathbf{x}) = \sum_{\rho=1}^{N_1 N_2} u_\rho \mu_\rho(\mathbf{x}) \\ &= - \sum_{\rho=1}^{N_1 N_2} v_\rho \mu_\rho(\mathbf{x}) + \sum_{\rho=1}^{N_1 N_2} w_\rho \mu_\rho(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.27)$$

kde  $\rho$  je index přes všechna pravidla. To znamená, má-li pravidlo  $\rho$  v antecedentu množiny  $\mathcal{A}^\sigma$  a  $\mathcal{B}^\tau$  pak  $\mu_\rho(\mathbf{x}) = \mu_1^\sigma(x_1) \mu_2^\tau(x_2)$ , kde  $\mu_1^\sigma(x_1)$  je funkce příslušnosti fuzzy množiny  $\mathcal{A}^\sigma$  v bodě  $x_1$  a  $\mu_2^\tau(x_2)$  je funkce příslušnosti fuzzy množiny  $\mathcal{B}^\tau$  v  $x_2$ .

K nalezení optimálního regulátoru nejdříve určíme podle vztahu (3.21) hodnotu  $\mathbf{C}^*$  a z ní i  $r^* = r_{\mathbf{G}}(\mathbf{C}^*)$ . Aby byla splněna podmínka robustní stability musí platit

$$|H(\mathbf{x}) - \mathbf{C}^* \mathbf{x}| \leq r^* \|\mathbf{x}\|. \quad (3.28)$$

Rovnici (3.28) lze zjednodušit normováním  $H(\mathbf{x})$  podle vztahu

$$\tilde{H}(\mathbf{x}) = \frac{H(\mathbf{x}) - \mathbf{C}^* \mathbf{x}}{r^*} = \sum_{\rho=1}^{N_1 N_2} \tilde{u}_\rho \mu_\rho(\mathbf{x}), \quad (3.29)$$

kde  $\tilde{u}_\rho = \frac{u_\rho - \mathbf{C}^*(\Phi_1^\sigma, \Phi_2^\tau)}{r^*}$  a  $(\Phi_1^\sigma, \Phi_2^\tau)$  je poloha středu funkce příslušnosti  $\rho$ -tého pravidla, na vztah

$$\left| \tilde{H}(\mathbf{x}) \right| \leq \|\mathbf{x}\|. \quad (3.30)$$

Podmínka (3.30) musí platit ve všech oblastech  $\Omega_{\sigma,\tau}$ . Výstup fuzzy systému (3.29) je možné opět vyjádřit jako

$$\tilde{H}(\mathbf{x}) = \tilde{H}(x_1, x_2) = \tilde{h}_0 + \tilde{h}_1 x_1 + \tilde{h}_2 x_2 + \tilde{h}_{12} x_1 x_2. \quad (3.31)$$

V oblasti obsahující počátek, kde musí platit  $\tilde{h}_0 = 0$ , lze podmínku (3.30) ověřit nalezením extrémů funkce

$$\frac{\tilde{H}(x_1, x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{\tilde{h}_0 + \tilde{h}_1 x_1 + \tilde{h}_2 x_2 + \tilde{h}_{12} x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}. \quad (3.32)$$

V [5] provedená analýza ukazuje, že podmínka (3.30) je v oblasti  $\Omega_{\sigma, \tau}^0$  obsahující počátek splněna, platí-li:

$$\left( \frac{\tilde{u}_{\sigma+1, \tau}}{\Phi_1^{\sigma+1}} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{u}_{\sigma, \tau+1}}{\Phi_2^{\tau}} \right)^2 \leq 1, \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \overline{z_{\sigma+1, \tau}, z_{\sigma+1, \tau+1}} &\subset \mathcal{U}, \\ \overline{z_{\sigma, \tau+1}, z_{\sigma, \tau}} &\subset \mathcal{U}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

kde  $\overline{z_{i,j}, z_{k,l}} = \text{Co}(z_{i,j}, z_{k,l})$  je úsečka spojující bod  $z_{ij}$  s bodem  $z_{kl}$ ,  $i, k \in \{\sigma, \sigma + 1\}$ ,  $j, l \in \{\tau, \tau + 1\}$  a množina  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$  je definována  $\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, u)^T : u^2 \leq x_1^2 + x_2^2\}$ .

V ostatních oblastech obecně neplatí zjednodušení  $\tilde{h}_0 = 0$  a podmínka nulového gradientu funkce (3.32) při hledání jejího extrému nevede na jednoduše řešitelné rovnice. K ověření platnosti (3.30) je využit vztah (3.26), který říká, že hodnota výstupu fuzzy systému v dané oblasti je omezena čtyřstěnem s vrcholy  $z_{ij}$ ,  $i \in \{\sigma, \sigma + 1\}$  a  $j \in \{\tau, \tau + 1\}$ . Podmínka (3.30) je splněna, platí-li pro všechny body ležící na hranách čtyřstěnu  $\mathbf{T}$  tj.

$$\begin{aligned} &\overline{z_{\sigma, \tau}, z_{\sigma+1, \tau}} \cup \overline{z_{\sigma, \tau}, z_{\sigma, \tau+1}} \cup \overline{z_{\sigma+1, \tau+1}, z_{\sigma+1, \tau}} \\ &\cup \overline{z_{\sigma+1, \tau+1}, z_{\sigma, \tau+1}} \cup \overline{z_{\sigma+1, \tau}, z_{\sigma, \tau+1}} \cup \overline{z_{\sigma+1, \tau+1}, z_{\sigma, \tau}} \subset \mathcal{U} \end{aligned} \quad (3.35)$$

V případě, že výše uvedené podmínky nejsou splněny, můžeme stávající fuzzy systém předefinovat analogicky k (3.22) tak, aby v každé oblasti, která neobsahuje počátek, platil vztah (3.35) a v oblastech obsahující počátek platily podmínky (3.33) a (3.34). Omezující interval  $I(x_1, x_2)$  je v případě normovaného fuzzy systému  $\tilde{H}(x_1, x_2)$  dán množinou  $\mathcal{U}$ .

### 3.2.4 Závěr

Hlavní omezení uvedeného postupu je, že připouští pouze SIMO soustavy. Model řízené soustavy zahrnuje obecné nelineární systémy se spojitou přechodovou funkcí, která je i spojitá a nelineární vzhledem k řízení. Uvedenou metodu lze použít i na obecný SIMO systém, u kterého je známá závislost funkce robustnosti na středu  $\mathbf{C}$  (viz (1.12)).

Z hlediska implementace je výpočetně nejnáročnější výpočet optimálního středu  $\mathbf{C}^*$ , který závisí na hodnotě funkce robustnosti a odchylky. Tato úloha je zřejmě řešitelná pouze numericky. Autor článku navrhuje metodu výpočtu minima funkce (3.21) v předem určených bodech pokrývajících množinu přípustných středů nebo iterativní metodu gradientní optimalizace.

### 3.3 Určení stability výpočtem zesílení fuzzy systému

V této části neuvedu nové kritérium stability, ale algoritmus výpočtu zesílení statického fuzzy regulátoru. Jeho určení je základní problém při praktické aplikaci podmínek stability, které jsou založené na větě o malém zesílení. Řešením tohoto problému může být v případě regulátorů výpočet horního odhadu zesílení a tedy i funkce odchylky (viz (1.13)). V následující části popíši postup výpočtu tohoto odhadu podle článku [6]. Nejdříve však uvedu v tabulce 3.3 vlastnosti kladené na fuzzy regulátor.

Tabulka 3.3: Přehled vlastností regulátoru

Řízená soustava	
Typ:	Libovolný systém se známou funkcí robustnosti
Rozměr:	SIMO
Regulátor	
Typ:	Fuzzy singletonový systém
Rozměr:	MISO
Omezení:	Nezáporný výstup v okolí nuly Definované umístění funkcí příslušnosti v okolí počátku

#### 3.3.1 Popis regulátoru

Výstupní mapa uvažovaného fuzzy regulátoru  $\Psi(\mathbf{x})$  je dána vztahem:

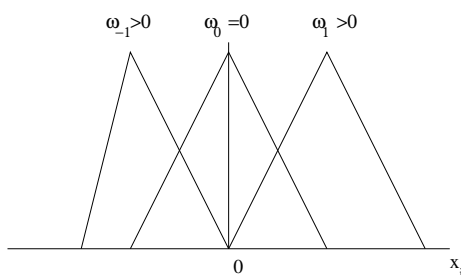
$$\Psi(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{\rho=1}^N \omega_{\rho} \mu_{\rho}(\mathbf{x})}{\sum_{\rho=1}^N \mu_{\rho}(\mathbf{x})} = \frac{\sum_{\rho=1}^N \omega_{\rho} \prod_{i=1}^n \mu_{i\rho}(x_i)}{\sum_{\rho=1}^N \prod_{i=1}^n \mu_{i\rho}(x_i)}, \quad (3.36)$$

kde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  je vektor vstupu,  $\mu_{\rho}$  je aktivace  $\rho$ -tého pravidla,  $\mu_{i\rho}$  je funkce příslušnosti  $i$ -tého vstupu fuzzy množiny v antecedentu  $\rho$ -tého pravidla,  $N$  označuje celkový počet pravidel a  $\omega_{\rho}$  je singleton v závěru  $\rho$ -tého pravidla. Funkce příslušnosti musí splňovat následující předpoklady:

**Předpoklad 1** *V každé dimenzi v okolí nuly pouze dvě funkce příslušnosti náleží pravidlu s nenulovým singletonem v závěru. Support jedné leží na kladné poloose a support druhé na záporné.*

**Předpoklad 2** *Výstup  $\Psi(\mathbf{x})$  v okolí počátku je nezáporný.*

Význam předpokladů v jednorozměrném případě ilustruje obrázek 3.5. Z předpokladu 1 plyne rozmístění fuzzy množin okolo nuly a hodnota závěru  $\omega_0$  rovná nule, zatímco zbývající dva závěry  $\omega_{-1}$  a  $\omega_1$  musí mít nenulovou hodnotu. Kladné hodnoty  $\omega_{-1}$  a  $\omega_1$  zase umožňuje splnění předpokladu 2.



Obrázek 3.5: Vstupní fuzzy množiny v okolí nuly

### 3.3.2 Výpočet odhadu a podmínky stability

Myšlenka algoritmu spočívá ve výpočtu posloupnosti  $\{\psi_j^C\}$  horních odhadů funkce robustnosti (tj. zesílení  $g(\Psi - C)$ ), která pro rostoucí  $j$  konverguje ke skutečné hodnotě zesílení. Jednotlivé odhady z této posloupnosti jsou vypočítány tak, že se vstupní prostor rozdělí do aproximačních oblastí, ve kterých se určí dílčí odhady, jejichž supremum se vezme za výslednou hodnotu odhadu pro dané rozdělení vstupního prostoru. Parametr  $j$  označuje, že se jedná o  $j$ -té rozdělení vstupního prostoru. Čím větší je jeho hodnota, tím je rozdělení hustší a výsledný odhad bližší skutečné hodnotě.

Horní odhad zesílení se určuje v oblastech, které rozdělují vstupní prostor. Jeho jednotlivé dimenze jsou rozděleny množinou uzlů. Výchozí množina uzlů  $k_1^i$  je v  $i$ -té dimenzi definována vztahem

$$k_1^i = \bigcup_{\rho=1}^N \{x \in \mathbb{R} : \mu_{i\rho}(x) \text{ se láme, nebo } \mu_{i\rho}(y) = 0 \quad \forall y < x, \\ \text{nebo } \mu_{i\rho}(y) = 0 \quad \forall x < y, \} \cup \{+\delta, -\delta, \} \setminus \{0\}, \quad (3.37)$$

kde  $\delta > 0$  je menší než absolutní hodnota libovolného z prvků množiny

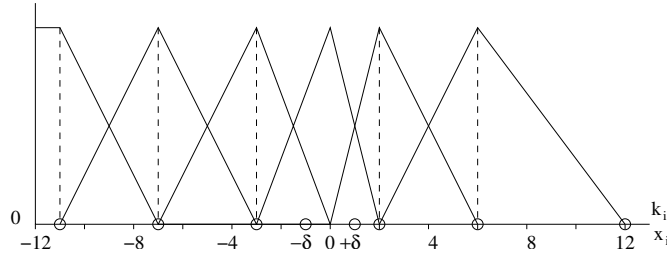
$$\{x \in \mathbb{R} : \mu_{i\rho}(x) \text{ se láme, nebo } \mu_{i\rho}(y) = 0 \quad \forall y < x, \\ \text{nebo } \mu_{i\rho}(y) = 0 \quad \forall x < y\} \setminus \{0\} \\ 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq \rho \leq N, \quad (3.38)$$

$n$  je počet vstupů a  $N$  je počet fuzzy množin. Význam definice vysvětluje obrázek 3.6. Pro fuzzy množiny zde zobrazené je  $k_1^i = \{-11, -7, -3, -1, 1, 2, 6, 12\}$  (vzhledem k (3.38) musí platit  $\delta \in (0, 2)$ ; zvoleno  $\delta$  rovno 1). Uzlové body jsou označené kroužky. Zvláště je přidán popis k bodům  $\{-\delta, +\delta\}$ .

$j$ -tá množina uzlů  $k_j^i$  v  $i$ -té dimenzi se vypočte rekurentně podle vztahu

$$k_j^i = \left\{ \lambda_1^i, \frac{\lambda_1^i + \lambda_2^i}{2}, \lambda_2^i, \dots, \frac{\lambda_{m-1}^i + \lambda_m^i}{2}, \lambda_m^i \right\}, \quad (3.39)$$





Obrázek 3.6: Uzlové body

kde

$$k_{j-1}^i = \{\lambda_1^i \dots \lambda_m^i\}, \quad \lambda_1^i \leq \lambda_2^i \leq \dots \leq \lambda_m^i. \quad (3.40)$$

Množiny uzlů rozdělují vstupní prostor na množinu aproximačních oblastí

$$\Omega = X_{i=1}^n[l_i, p_i], \quad (3.41)$$

kde  $l_i = \lambda_a^i$ ,  $p_i = \lambda_{a+1}^i$  pro  $1 \leq a \leq m - 1$ . V každé  $j$ -té aproximační oblasti  $\Omega = X_{i=1}^n[l_i, p_i]$  jsou definovány parametry

$$u_{i\rho} = \begin{cases} \max\{\mu_{i\rho}(l_i), \mu_{i\rho}(p_i)\}, & \text{pro } \omega_r > 0 \\ \min\{\mu_{i\rho}(l_i), \mu_{i\rho}(p_i)\}, & \text{pro } \omega_r \leq 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

$$v_{i\rho} = \begin{cases} \min\{\mu_{i\rho}(l_i), \mu_{i\rho}(p_i)\}, & \text{pro } \omega_r > 0 \\ \max\{\mu_{i\rho}(l_i), \mu_{i\rho}(p_i)\}, & \text{pro } \omega_r \leq 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

$$a_i = \begin{cases} l_i, & \text{pro } \alpha_i > 0 \\ p_i, & \text{pro } \alpha_i \leq 0, \end{cases} \quad (3.44)$$

$$b_i = \begin{cases} p_i, & \text{pro } \alpha_i > 0 \\ l_i, & \text{pro } \alpha_i \leq 0, \end{cases} \quad (3.45)$$

kde  $\mu_{i\rho}$  a  $\omega_\rho$  jsou parametry fuzzy systému viz (3.36) a  $\alpha_i$  jsou parametry středu  $C$  viz (1.13), pro který platí  $C(\mathbf{x}) = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]\mathbf{x}$ . Hodnota odhadu  $\psi_j^C$  se určí jako supremum z následujících výrazů

$$\left( m^2 + 2m|\alpha_1| + \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.46)$$

a

$$\frac{\max \left\{ \sum_{\forall \rho} \omega_\rho \prod_{i=1}^n u_{i\rho} - \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i - \sum_{\forall \rho} \omega_\rho \prod_{i=1}^n v_{i\rho} \right\}}{(l_1^2 + \dots + l_n^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.47)$$

kde parametr  $m$  je definován v [6]. Výraz (3.46) představuje odhad zesílení v oblastech, které obsahují počátek. Odhad zesílení ve zbylých oblastech je určen rovnicí (3.47).

Je-li známa funkce robustnosti regulované soustavy i horní odhad zesílení regulátoru pak lze stabilitu dokázat pomocí podmínky (1.14). Má-li funkce robustnosti pro nějaký střed  $C$  hodnotu  $r_C$ , pak je regulační soustava stabilní, když existuje  $J$ , pro které platí

$$\psi_J^C < r_C. \quad (3.48)$$

Aplikace výpočtu je v [6] ukázána na SISO fuzzy systému s trojúhelníkovými funkcemi příslušnosti, které mají středy v bodech  $\lambda_{-n} < \lambda_{1-n} < \dots < \lambda_0 = 0 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n$ . Jeho výstup je dán rovnicí

$$\Psi(x) = \sum_{i=-n}^{n-1} \omega_i \mu_i(x), \quad (3.49)$$

kde  $\mu_i$  je trojúhelníková funkce příslušnosti, jejíž support je tvořen intervalem  $[\lambda_i, \lambda_{i+2}]$  a  $\omega_i$  je singleton v závěru pravidla. Mají-li být splněny předpoklady 1 a 2, musí platit, že  $\omega_0 = 0$ ,  $\omega_1 \geq 0$  a  $\omega_{-1} \geq 0$ . Počáteční rozdělení vstupního prostoru  $k_1^1$  je určeno množinou bodů

$$\{\lambda_{-n}, \lambda_{1-n}, \dots, \lambda_{-1}, -\delta, \delta, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n\}, \quad (3.50)$$

kde  $\delta$  je kladné číslo, pro které platí  $\delta < \min\{\lambda_1, |\lambda_{-1}|\}$ . Pro výpočet odhadu zesílení je  $C = 0$  a tedy i  $\alpha_1 = 0$ . V tomto případě je

$$m = \max\{\mu_1(\delta), \mu_{-1}(-\delta)\} \quad (3.51)$$

$$= \max\left\{\frac{\omega_1}{\lambda_1}, \frac{\omega_{-1}}{\lambda_{-1}}\right\}. \quad (3.52)$$

po vyčíslení (3.47) v každé aproximační oblasti je odhad zesílení

$$m = \max\left\{\frac{\omega_1}{\lambda_1}, \frac{\omega_{-1}}{\lambda_{-1}}, \dots, \frac{\omega_n}{\lambda_n}, \frac{\omega_{-n}}{\lambda_{-n}}\right\}. \quad (3.53)$$

Je vidět, že vypočtený odhad je roven skutečnému zesílení fuzzy systému a to už při použití počátečního rozdělení vstupního prostoru.

### 3.3.3 Závěr

Metoda je použitelná tam, kde je známé zesílení regulované soustavy nebo i funkce robustnosti pro různou hodnotu středů (viz (1.12)). Stejně jako metoda uvedená v předešlé podkapitole i zde musí mít regulátor jen jeden výstup.

Hlavní nevýhodou metody je, že výstup regulátoru musí být nezáporný v okolí počátku. Algoritmus výpočtu neuvádí rychlost konvergence odhadu ke skutečné hodnotě zesílení. Při implementaci bude praktické omezení dáno exponenciální závislostí složitosti výpočtu během zjemňování rozdělení vstupního prostoru.



# Kapitola 4

## Symbolická stabilita

Předmětem této kapitoly bude analýza stability na symbolické úrovni, tj. místo uvažování „ostré“ hodnoty výstupu se analyzují aktivovaná pravidla vzhledem ke vstupním a výstupním fuzzy množinám. Postup, který dále uvedu, byl publikován v práci [20]. V první části kapitoly popíši regulační soustavu a uvedu podmínky stability na symbolické úrovni. Ve druhé části pak ukáži, jak souvisí chování fuzzy systému na symbolické úrovni se skutečným chováním fuzzy systému, jehož výstupem je ostrá hodnota získaná defuzzifikací. Uvedu nutné podmínky, jejichž splnění zaručuje shodu mezi chováním na symbolické i reálné úrovni. Tabulka 4.1 shrnuje vlastnosti regulační soustavy.

Tabulka 4.1: Přehled vlastností

Řízená soustava	
Typ:	diskrétní fuzzy dynamický systém
Rozměr:	SIMO
Omezení:	upravená metoda inference
Regulátor	
Typ:	singletonový fuzzy systém
Rozměr:	MISO
Omezení:	upravená metoda inference

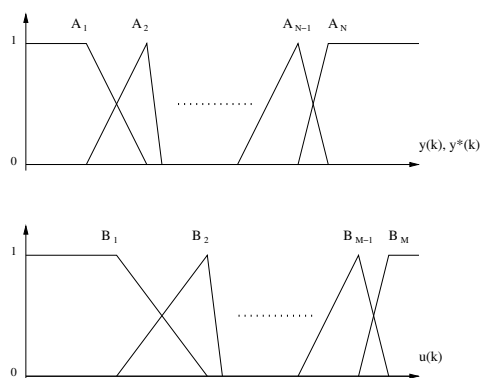
### 4.1 Analýza stability na symbolické úrovni

Řízenou soustavu tvoří fuzzy singletonový dynamický systém a fuzzy singletonový regulátor. Příkladem pravidel regulátoru  $R_i^c$  a řízené soustavy  $R_i^p$  jsou vztahy (4.1) a (4.2).

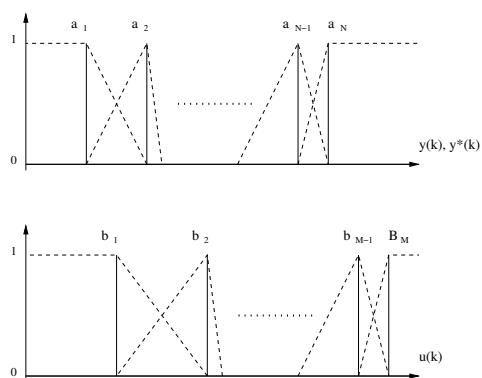
$$R^c : \text{ IF } y_k^* \text{ is } \mathcal{A}_n \text{ and } y_k \text{ is } \mathcal{A}_{i_1} \text{ and } y_{k-1} \text{ is } \mathcal{A}_{i_2} \dots, \\ \text{ THEN } u_k \text{ is } b_{j_1} \quad (4.1)$$

$$R^p : \text{ IF } y_k \text{ is } \mathcal{A}_{i_1} \text{ and } y_{k-1} \text{ is } \mathcal{A}_{i_2} \dots, \\ u_k \text{ is } \mathcal{B}_{i_1} \text{ and } u_{k-1} \text{ is } \mathcal{B}_{i_2} \dots, \\ \text{ THEN } y_{k+1} \text{ is } a_{i_0}, \quad (4.2)$$

kde  $y_k^* \in \mathbb{R}$  je žádaná hodnota výstupu řízené soustavy v  $k$ -tém kroku,  $y_k \in \mathbb{R}$  je výstup řízené soustavy,  $u_k \in \mathbb{R}$  je řídicí výstup regulátoru,  $\mathcal{A}_i$  a  $\mathcal{B}_i$  jsou fuzzy množiny, jejich typ a způsob značení ukazuje obrázek 4.1, a  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  jsou singletony ležící ve středu fuzzy množin  $\mathcal{A}_i$  a  $\mathcal{B}_i$  viz obrázek 4.2.



Obrázek 4.1: Vstupní fuzzy množiny



Obrázek 4.2: Výstupní fuzzy množiny

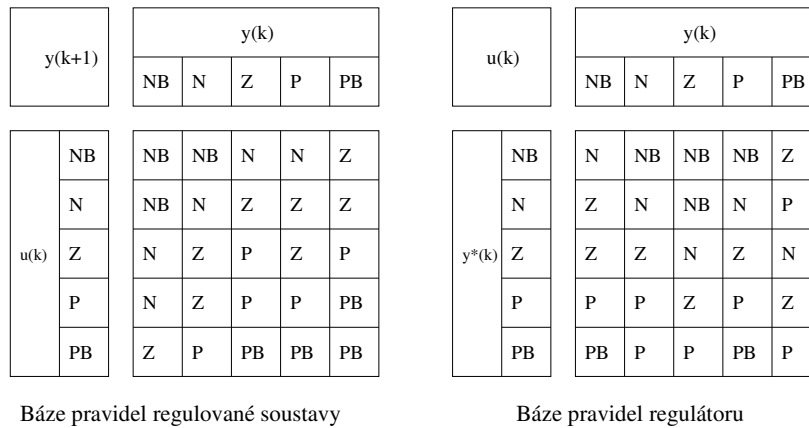
Podstatou symbolické analýzy je, že se místo ostré hodnoty vstupu uvažuje pouze fuzzy množina s největší hodnotou funkce příslušnosti, pro daný vstup.

Vstupní a výstupní prostory jsou tak rozděleny na ostře ohraničené oblasti, proto se také v [20] takto upravený systém označuje jako diskretizovaný. Výsledkem této diskretizace je zjednodušení analýzy chování, které se projeví tím, že pro libovolnou hodnotu vstupu je vždy aktivováno jen jedno pravidlo. Chování analyzované soustavy lze pak popsat řetězcem pravidel ve tvaru

$$\dots \rightarrow R^c(k) \rightarrow R^p(k) \rightarrow R^c(k+1) \rightarrow R^p(k+1) \rightarrow \dots, \quad (4.3)$$

kde  $R^c(k)$  je pravidlo regulátoru aktivované v  $k$ -tém kroku a  $R^p(k)$  je pravidlo řízení soustavy aktivované také v  $k$ -tém kroku. Analyzovaná soustava je nyní diskrétní i v hodnotách, které mohou vstupní a výstupní veličiny nabývat a lze modelovat pomocí Petriho sítí. Místa sítě odpovídají aktuální hodnotě vstupů fuzzy systému a přechody jsou určeny bází pravidel. Výše uvedený postup nejlépe ilustruje následující příklad ([20]).

Řízená soustava je SISO dynamický fuzzy systém prvního řádu. Regulátor je také fuzzy systém. Jejich báze pravidel jsou na obrázku 4.3. Použité fuzzy množiny

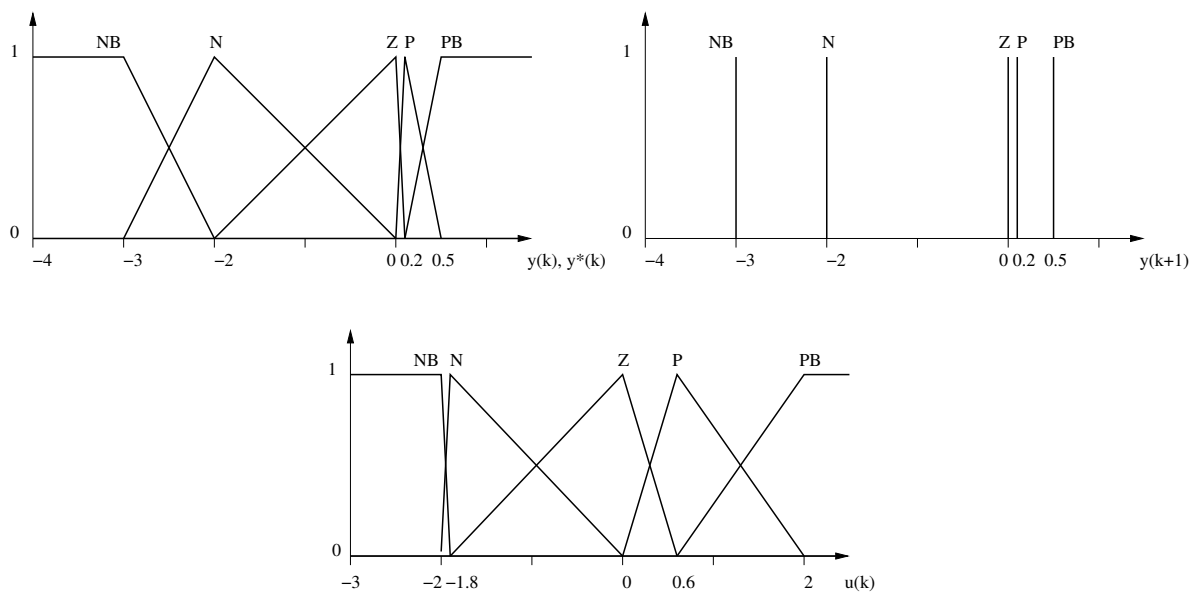


Obrázek 4.3: Báze pravidel

jsou definovány podle obrázku 4.4. Vstupní a výstupní prostory je třeba rozdělit na diskrétní oblasti podle funkcí příslušnosti. Graficky je rozdělení na oblasti dominance určité funkce příslušnosti pro proměnnou  $u_k$  znázorněno na obrázku 4.5 (pro ostatní proměnné by bylo analogické). Řetězec pravidel vzorového systému při počáteční hodnotě výstupu v čase  $k$  rovné  $y_k = -1.6$  a žádané hodnotě  $y_k^* = 0.12$  tj.  $y_k = N$  a  $y_k^* = P$  je posloupnost

$$P \rightarrow Z \rightarrow Z \rightarrow P \rightarrow P \rightarrow P \dots \quad (4.4)$$

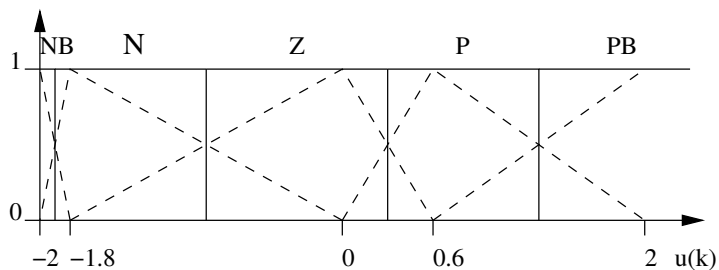
Jednotlivá pravidla jsou značena podle fuzzy množiny ve svém závěru. První je aktivováno pravidlo regulátoru odpovídající počátečním hodnotám  $y_k$  a  $y_k^*$  (viz



Obrázek 4.4: Funkce příslušnosti

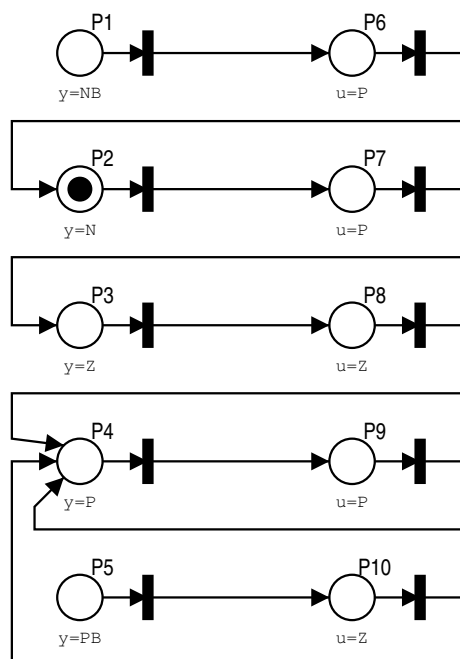
báze pravidel na obr. 4.3 vpravo). Druhé aktivované pravidlo odpovídá výstupní fuzzy množině modelu řízené soustavy. Po dvou krocích se již hodnota výstupu obou systémů nemění a je vidět, že řízený systém dosáhl žádané hodnoty. Příklad Petriho sítě, která modeluje vzorový řídicí systém při konstantní žádané hodnotě  $y^* = P$  a počáteční hodnotě výstupu  $y = N$ , je uveden na obrázku 4.6.

Stabilitu fuzzy systému lze vyšetřit pomocí přechodové matice Petriho sítě. Přechodová matice, dále ji budeme značit  $A$ , je čtvercová matice, jejíž rozměr je rovný počtu míst v síti a má v  $i$ -tém sloupci na  $j$ -tém řádku jedničku, když existuje přechod z místa  $i$  do místa  $j$ ; jinak je hodnota jejích prvků nulová. Hodnotu stavu fuzzy systému, v terminologii Petriho sítě marking sítě, před aktivací nějakého



Obrázek 4.5: Rozdělení podle funkce příslušnosti





Obrázek 4.6: Petriho síť modelující fuzzy systém

pravidla regulátoru označíme  $M_k$  a následnou změnu markingu po aktivaci nějakého pravidla regulátoru  $M'_k$ , kde  $k$  značí diskretní čas. Marking  $M'_k$  zároveň označuje stav systému před aktivací pravidla fuzzy modelu řízeného systému. Stav po aktivaci pravidla modelu a tedy před aktivací nějakého pravidla regulátoru je  $M_{k+1}$ . Výše uvedené hodnoty markingu jsou dány rovnicemi

$$M'_k = \mathbf{A}M_k, \quad (4.5)$$

$$M_{k+1} = \mathbf{A}M'_k. \quad (4.6)$$

Z nich plyne

$$M_{k+1} = \mathbf{A}^2 M_k. \quad (4.7)$$

Před vyslovením teoremu o symbolické stabilitě je třeba zavést následující definice.

**Definice 1 (Periodický stav)** Marking  $M_k$  je v periodickém stavu, když existuje kladné celé číslo  $\lambda \geq 2$  a platí

$$M'_k \neq M_k, \quad (4.8)$$

$$M_{k+\lambda} = M_k, \quad (4.9)$$

$$M'_{k+\lambda} = M'_k. \quad (4.10)$$

**Definice 2 (Neperiodicky stabilní stav)** Fuzzy řídicí systém je neperiodicky stabilní, když pro každý počáteční marking  $M_0$  a celé číslo  $K \geq 0$  a platí

$$M'_K \neq M_K, \quad (4.11)$$

$$M_{K+1} = M_K, \quad (4.12)$$

$$M'_{K+1} = M'_K. \quad (4.13)$$

Podmínku symbolické stability udává následující teorém.

**Teorém 2** Fuzzy systém je neperiodicky stabilní tehdy a jen tehdy, když přechodová matice  $\mathbf{A}$  neobsahuje žádný nulový sloupec, žádný prvek na diagonále není roven jedné a

$$\text{hod}\mathbf{A}^n = 2, \quad (4.14)$$

kde  $n$  je rozměr přechodové matice  $\mathbf{A}$ .

Aplikací uvedeného teorému na Petriho síť na obrázku 4.6 lze snadno dokázat, že modelovaný fuzzy systém je na symbolické úrovni neperiodicky stabilní.

## 4.2 Analýza stability na spojitě úrovni

V předešlé části bylo ukázáno, jak se chová fuzzy systém na symbolické úrovni. Chování skutečného fuzzy systému se však může lišit. V této části uvedu podmínky, za kterých se chování fuzzy systému shoduje jak na symbolické tak i spojitě úrovni.

V [20] je ukázáno, že se chování na symbolické úrovni a skutečné chování (v článku označované jako chování na spojitě úrovni) liší. K tomu, aby bylo možné výsledky symbolické analýzy použít, je v článku uvedena nová metoda inference podle následujícího postupu

1. Pro dané vstupy se běžným způsobem vyhodnotí aktivace pravidel. Označíme  $\omega_i$  aktivaci pravidla se singletonem  $b_i$  v závěru. Číslování je uspořádáno podle polohy, jak ukazuje obrázek 4.2.
2. Vypočítá se vážený průměr aktivovaných pravidel  $\pi$  podle vztahu

$$\pi = \frac{\sum_{\forall i} \omega_i \cdot i}{\sum_{\forall i} \omega_i} \quad (4.15)$$

3. Nová hodnota aktivace  $\omega'_i$  pravidel bude nenulová jen pro  $i = j, j + 1$ , kde  $j \leq \pi \leq j + 1$  a vypočítá se podle vztahu

$$\omega'_i = 1 - |\pi - i|, \quad (4.16)$$

kde  $i = j, j + 1$ .

4. Výstup fuzzy systému  $u_k$  je určen rovnicí

$$u_k = \sum_{i=j}^{j+1} \omega'_i \cdot u_i. \quad (4.17)$$

Použití této metody inference budeme dokumentovat na příkladu fuzzy systému podle obrázku 4.3 a 4.4. Předpokládáme na vstupu regulátoru hodnotu  $y_k = -2.1$  a  $y_k^* = -2.2$ . Pro tyto hodnoty budou nenulové dvě funkce příslušnosti v každé dimenzi. Pro  $y_k$  to je

$$\mu_{NB}(-2.1) = 0.1 \quad (4.18)$$

$$\mu_N(-2.1) = 0.9 \quad (4.19)$$

a

$$\mu_{NB}(-2.2) = 0.2 \quad (4.20)$$

$$\mu_N(-2.2) = 0.8 \quad (4.21)$$

pro  $y_k^*$ . Z báze pravidel na obrázku 4.3 je zřejmé, že pro dané hodnoty vstupu se aktivují čtyři pravidla, jenž mají v antecedentu kombinaci fuzzy množin  $N$  a  $NB$ . Síla pravidel  $\omega$  spolu s hodnotou závěru v závorce je dána vztahy

$$\omega_a = \mu_{NB}(-2.1) \cdot \mu_{NB}(-2.2) = 0.02(N) \quad (4.22)$$

$$\omega_b = \mu_{NB}(-2.1) \cdot \mu_N(-2.2) = 0.08(Z) \quad (4.23)$$

$$\omega_c = \mu_N(-2.1) \cdot \mu_{NB}(-2.2) = 0.18(NB) \quad (4.24)$$

$$\omega_d = \mu_N(-2.1) \cdot \mu_N(-2.2) = 0.72(N). \quad (4.25)$$

Aktivace pravidel podle jejich závěrů a jejich přeznačení podle pořadí, v jakém jsou rozmístěny, je

$$\omega_N = \omega_2 = 0.02 + 0.72 = 0.74 \quad (4.26)$$

$$\omega_Z = \omega_3 = 0.08 \quad (4.27)$$

$$\omega_{NB} = \omega_1 = 0.18. \quad (4.28)$$

Nyní se vypočte průměrná hodnota závěru  $\pi$  podle vztahu

$$\pi = 1 \cdot 0.18 + 2 \cdot 0.74 + 3 \cdot 0.08 = 1.9. \quad (4.29)$$

Nová hodnota aktivací  $\omega'_i$  je nenulová pro  $i = 1, 2$  a je dána rovnicemi

$$\omega'_1 = \omega'_{NB} = 1 - |1, 9 - 1| = 0.1 \quad (4.30)$$

$$\omega'_2 = \omega'_N = 1 - |1, 9 - 2| = 0.9. \quad (4.31)$$

Hodnota výstupu regulátoru je

$$u_k = 0.1 \cdot (-2) + 0.9(-1.8) = -1.82. \quad (4.32)$$

K vyslovení podmínky shody chování fuzzy systému na symbolické a spojitě úrovni je třeba ještě definovat několik pojmů. První je vzdálenost závěrů pravidel (Distance in the Consequent).

**Definice 3 (Vzdálenost závěrů)** *Vzdálenost závěrů DC pravidel se singletony  $a_i$  a  $a_j$  je definována jako*

$$DC(a_i, a_j) = |i - j|. \quad (4.33)$$

Podobně se definuje vzdálenost mezi předpoklady pravidel.

**Definice 4 (Vzdálenost předpokladů)** *Necht'  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$  je vektor indexů fuzzy množin v předpokladu pravidla  $R^i$  a stejně tak  $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n)$  je vektor indexů pravidla  $R^j$ . Pak vzdálenost předpokladů DA pravidel  $R^i$  a  $R^j$  je definována jako*

$$DA(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = k_1 + \dots + k_n, \quad (4.34)$$

kde

$$k_p = |i_p - j_p|, \quad p = 1 \dots n. \quad (4.35)$$

Poslední definicí je podmínka neoddělitelnosti.

**Definice 5 (Podmínka neoddělitelnosti)** *Podmínka neoddělitelnosti je splněna, když platí*

$$DC(S_i, S_j) \leq DA(\mathbf{i}, \mathbf{j}), \quad (4.36)$$

kde  $\mathbf{i}$  a  $\mathbf{j}$  jsou indexy všech pravidel aktivovaných v jeden okamžik a  $S_i$  a  $S_j$  jsou jim odpovídající závěry.

Podmínky, za kterých je stabilita na symbolické úrovni zaručena i pro skutečný systém (na spojitě úrovni) při použití inferenční metody popsané výše, udává následující teorém.

**Teorém 3** *Splňuje-li řídicí systém podmínku neoddělitelnosti, je-li neperiodicky stabilní na symbolické úrovni a výstup konverguje k žádané hodnotě, pak i skutečný výstup fuzzy systému konverguje do oblasti vymezené žádanou hodnotou na symbolické úrovni.*

## 4.3 Závěr

Uvedená metoda na rozdíl od předešlých kapitol umožňuje studovat stabilitu na symbolické úrovni. Postup uvedený v odstavci 4.1 dovoluje modelovat chování fuzzy systémů pomocí Petriho sítí a představuje zajímavý nástroj pro zkoumání chování fuzzy systémů. I když zde byl uvažován zpětnovazební systém, stejný postup se může použít k analýze chování fuzzy dynamických modelů.

Použitá metoda inference nepředstavuje výraznější omezení, neboť ve svém důsledku jen penalizuje méně aktivovaná pravidla. Omezením je podmínka neoddělitelnosti (definice 5), která nedovoluje libovolnou strukturu báze pravidel a říká, že pro blízká pravidla v tabulce pravidel si musí být blízké i závěry. Dalším omezením je, že je zaručena konvergence řízené veličiny jen do oblasti okolo žádané hodnoty. Rovněž není určena rychlost konvergence.



# Kapitola 5

## Popis implementace

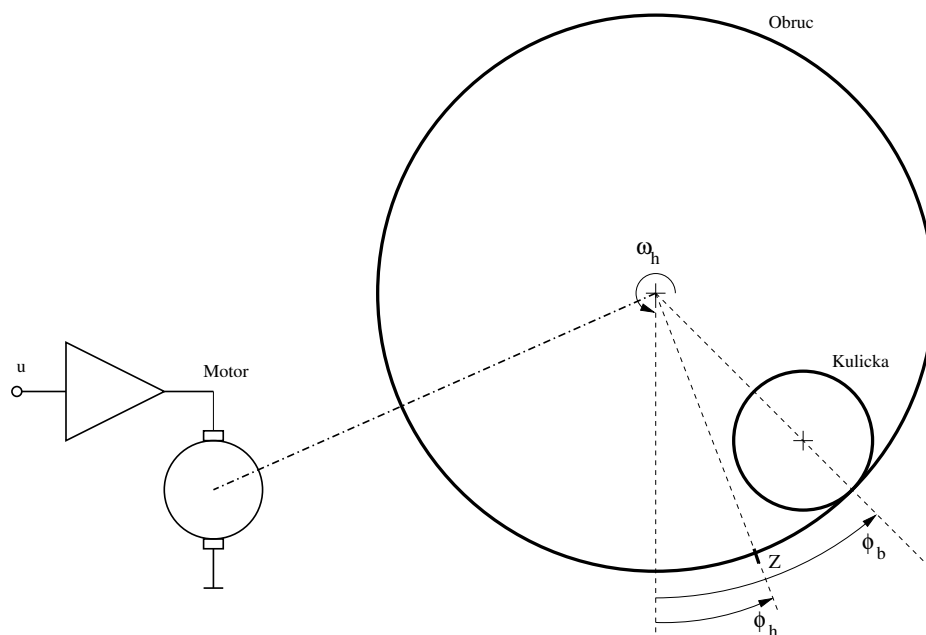
V rámci diplomové práce jsem implementoval metodu ověřující vnitřní stabilitu, která je popsána v odstavci 2.2.2. Princip metody spočívá v hledání Ljapunovovy funkce, která je ve tvaru kvadratické formy. Její autor v článku [9] předpokládá model řízené soustavy ve formě dynamického Takagi-Sugeno fuzzy systému a regulátor implementovaný jako statický fuzzy singletonový systém.

K ověření metody jsem použil model systému kulička v obruči (Ball and Hoop), který jsem modeloval jako Takagi-Sugeno fuzzy model a pro který jsem navrhl a implementoval fuzzy regulátor. Přesnost modelu řízené soustavy a chování regulátoru jsem ověřil simulací. Stabilitu regulační soustavy jsem dokázal ověřením řešitelnosti soustavy lineárních maticových nerovnic. Celé řešení jsem implementoval v prostředí Matlab s použitím Fuzzy toolboxu ([13]) a dvojice toolboxů SeDuMi ([15]) a SeDuMi Interface ([14]), které slouží k řešení lineárních maticových nerovnic.

Jednotlivé kroky implementace jsou detailně popsány následujících podkapitolách. V první popíši řízenou soustavu a její model ve formě Takagi-Sugeno fuzzy systému. Druhá část je věnována návrhu fuzzy regulátoru. Ve třetí části popisují implementaci podmínky stability. Pátá část obsahuje závěr.

### 5.1 Popis řízené soustavy - systém kulička v obruči

Systém kulička v obruči slouží k demonstraci chování sypkých nebo kapalných látek s volným povrchem v kontejneru, působí-li na ně vnější síla ([19]). Fyzikální princip funkce systému je ukázán na obrázku 5.1. Vstupem  $u$  je řídicí signál stejnosměrného motoru a výstupem jsou poloha referenční značky  $Z$  na obruči  $\phi_h$  vůči vertikální ose, signál snímače úhlové rychlosti otáčení obruče  $\omega_h$ , poloha kuličky  $\phi_b$  měřená snímacím raménkem opět vzhledem k vertikále a úhlová rychlost kuličky  $\omega_b$ . Pro matematický popis systému jsem použil model z práce [7] a tam uvedené



Obrázek 5.1: Principiální schéma

konstanty, které byly naměřeny na fyzikálním modelu systému. Nelineární model je popsán vztahy

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{ksi}{J_h} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{ksi}{L} & -\frac{B_h}{J_h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_B}{J_B} & 0 \\ 0 & \frac{r_h}{J_h(r_h-r_b)} & 0 & -\frac{r_b}{J_B(r_h-r_b)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} k_u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ m_b(r_h-r_b) \sin(x_5) \\ 0 \\ \frac{r_b m_b (r_h-r_b)}{r_h} \sin(x_5) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & k_{\omega_h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{\phi_h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\phi_b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \tag{5.1}
 \end{aligned}$$



kde vstup  $u$  odpovídá řídicímu signálu motoru a výstupní vektor je po řadě roven úhlové rychlosti obruče  $\omega_h$ , úhlu natočení obruče  $\phi_h$ , úhlové rychlosti kuličky  $\omega_b$  a vychýlení raménka  $\phi_b$ , které snímá polohu kuličky. Všechny výstupní veličiny jsou ve stupních resp. ve stupních za sekundu. Číselné hodnoty a význam použitých konstant udává tabulka 5.1.

	popis	hodnota	jednotka
$R$	odpor kotvy motoru	1.5	$\Omega$
$L$	indukce kotvy motoru	0.01	H
$ksi$	převodní konstanta motoru	0.045	[-]
$m_b$	hmotnost kuličky	0.03	kg
$J_B$	moment setrvačnosti kuličky	$3.53 \cdot 10^{-7}$	kg m <sup>2</sup>
$J_h$	moment setrvačnosti obruče	$2.1 \cdot 10^{-3}$	kg m <sup>2</sup>
$B_h$	konstanta tření obruče	$1.5 \cdot 10^{-4}$	kg m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
$B_B$	konstanta tření kuličky	$1.5 \cdot 2.0 \cdot 10^{-7}$	kg m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
$r_h$	průměr obruče	8.8	cm
$r_b$	průměr kuličky	9.7	mm
$k_{\omega_h}$	konstanta senzoru rychlosti obruče	$82 \cdot 10^{-3}$	[-]
$k_{\phi_h}$	konstanta senzoru polohy obruče	87.8	[-]
$k_{\phi_b}$	konstanta senzoru polohy kuličky	95.0	[-]

Tabulka 5.1: Konstanty modelu

Řízenou soustavu podle (5.1) jsem modeloval Takagi-Sugeno fuzzy systémem. Lineární modely v závěrech jeho pravidel jsem získal lineárizací vztahu (5.1). Implementované kritérium předpokládá řízenou soustavu ve tvaru stavového TS modelu, proto jsem nelineární model soustavy (5.1) formálně upravil tak, aby hodnoty druhého až pátého stavu odpovídaly výstupnímu vektoru. Uvedená změna představuje lineární transformaci stavů. Rovnici (5.1) lze napsat jako

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

kde hodnoty matic  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  funkce získané porovnáním vztahů (5.1) a (5.2) jsou

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{ksi}{J_h} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{ksi}{L} & -\frac{B_h}{J_h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_B}{J_B} & 0 \\ 0 & \frac{r_h}{J_h(r_h-r_b)} & 0 & -\frac{r_b}{J_B(r_h-r_b)} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} k_u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & k_{\omega_h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{\phi_h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\phi_b} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{G} \sin(x_5) = \begin{pmatrix} 0 \\ m_b(r_h - r_b) \\ 0 \\ \frac{r_b m_b(r_h - r_b)}{r_h} \\ 0 \end{pmatrix} \sin(x_5) \quad (5.3)$$

Nový stav je dán transformací

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}, \quad (5.4)$$

kde  $\mathbf{T}$  je diagonální matice

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{\omega_h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{\phi_h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\phi_b} \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

kde  $c_{ij}$  je prvek matice  $\mathbf{C}$  v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci. Použitím transformace (5.4) na systém (5.2) dostanu

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, u) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}u + \tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (5.6)$$

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}, \quad (5.7)$$

kde

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} \quad (5.8)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B} \quad (5.9)$$

$$\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{T}\mathbf{G} \sin\left(\frac{\tilde{x}_5}{t_{55}}\right) \quad (5.10)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}. \quad (5.11)$$

Symbol  $t_{55}$  označuje prvek matice  $\mathbf{T}$  v páté řádce a pátém sloupci. Dosazením (5.5) do (5.11) lze snadno ověřit, že matice  $\tilde{\mathbf{C}}$  má hodnotu

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

a tedy druhý až pátý stav nového stavového vektoru odpovídá výstupu původního systému (5.2). Díky tomu ji nemusím dále uvažovat.

Parametry lineárních systémů v závěrech TS modelu řízeného systému jsem získal lineárizací systému v oblasti, kde dané pravidlo má největší váhu. Vzhledem k tomu, že systém (5.6) je nelineární jen vzhledem k  $\tilde{x}_5$  (tj. poloze kuličky), uvažuji v antecedentu pravidel jen tuto proměnnou. TS model řízené soustavy má pravidla ve tvaru

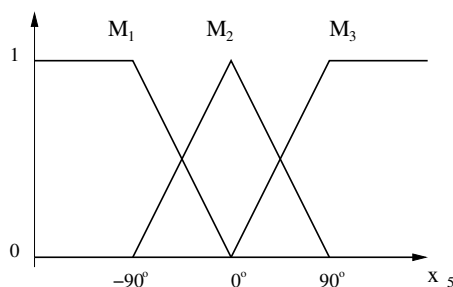
$$\text{IF } \tilde{x}_5 \text{ is } \mathcal{A}_\sigma \text{ THEN } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{b}_\sigma u, \quad (5.13)$$

kde  $\sigma = 1, \dots, N$  a  $N$  je počet pravidel. Výstup se vypočítá podle rovnice

$$\tilde{\mathbf{x}} = \sum_{\sigma=1}^N \mu_\sigma(\tilde{x}_5) (\mathbf{A}_\sigma \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_\sigma u), \quad (5.14)$$

kde  $\mu_\sigma(\tilde{x}_5)$  je hodnota funkce příslušnosti fuzzy množiny  $\mathcal{A}_\sigma$  a v tomto případě přímo i váha pravidla,  $\mathbf{A}_\sigma$  a  $\mathbf{b}_\sigma$  jsou matice lineárního systému, který lokálně popisuje chování modelované soustavy.

Experimentálně jsem zjistil, že pro dobrou aproximaci stačí model o třech pravidlech. Vstupní prostor proměnné  $\tilde{x}_5$  je pokryt třemi fuzzy množinami symetricky okolo nuly, jak ukazuje obrázek 5.2. TS model má tedy jen tři pravidla.



Obrázek 5.2: Fuzzy množiny na vstupu TS modelu řízené soustavy

Parametry jejich závěrů jsem určil podle vztahů

$$\mathbf{A}_\sigma = \left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, u)}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right|_{(\tilde{\mathbf{x}}_\sigma, u_\sigma)}, \quad \mathbf{b}_\sigma = \left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, u)}{\partial u} \right|_{(\tilde{\mathbf{x}}_\sigma, u_\sigma)}, \quad (5.15)$$

kde  $\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, u)$  je přechodová funkce definovaná v rovnici (5.6) a  $(\tilde{\mathbf{x}}_\sigma, u_\sigma)$  je bod, v jehož okolí je lokální model platný. Protože (5.6) je nelineární jen v proměnné  $\tilde{x}_5$ , hodnota matic (5.15) je funkcí pouze této proměnné. Vzhledem k pokrytí

vstupního prostoru (obr. 5.2) jsem vypočítal hodnotu lokálních modelů v bodech  $\tilde{x}_{5\sigma}$ ,  $\sigma = 1, 2, 3$ , které mají hodnotu:

$$\tilde{x}_{51} = -90, \quad \tilde{x}_{52} = 0, \quad \tilde{x}_{53} = 90. \quad (5.16)$$

Dosazením do (5.15) ze vztahů (5.6) až (5.9) a vypočtením derivací jsem získal následující hodnoty parametrů:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -150.00 & -0.5488 & 0 & 0 & 0 \\ 174.06 & -0.0708 & 0 & 0 & -0.0006 \\ 0 & 1070.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.57 & 4.51 \\ 0 & 1302.1 & 0 & -11.77 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -150.00 & -0.5488 & 0 & 0 & 0 \\ 174.06 & -0.0708 & 0 & 0 & -0.0010 \\ 0 & 1070.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.57 & 7.73 \\ 0 & 1302.1 & 0 & -11.77 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} -150.00 & -0.5488 & 0 & 0 & 0 \\ 174.06 & -0.0708 & 0 & 0 & -0.0006 \\ 0 & 1070.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.57 & 4.51 \\ 0 & 1302.1 & 0 & -11.77 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

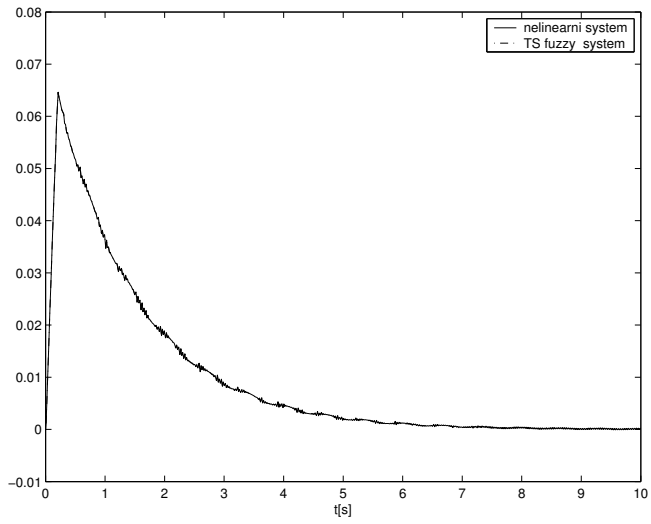
Srovnání výstupů původního systému a TS modelu ukazují grafy na obrázku 5.3 až 5.6. Jedná se o odezvu na obdélníkový impulz o amplitudě 0.3 šířce 0.2s.

## 5.2 Návrh regulátoru

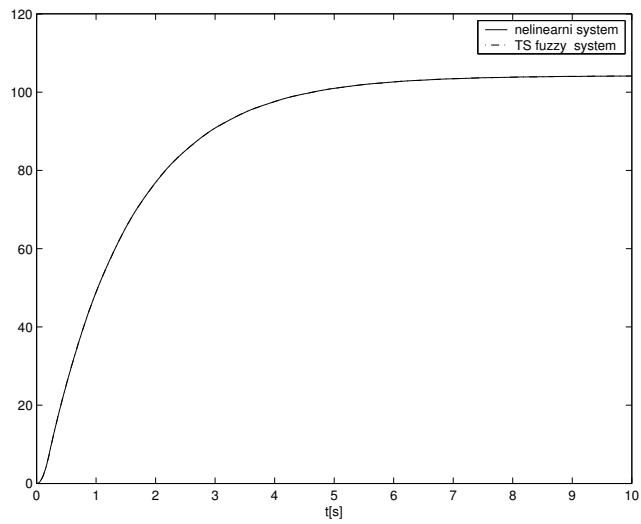
Pro namodelovaný systém jsem navrhl regulátor. Cílem regulace je, aby při změně polohy obruče zůstala kulička v klidové poloze. Regulátor jsem rozdělil na dvě části. První je fuzzy PD regulátor polohy obruče. Jeho vstupem je rozdíl žádané a skutečné hodnoty polohy obruče a derivace tohoto rozdílu. Druhou část tvoří fuzzy PD regulátor udržující kuličku v klidové poloze. Obě části jsou zahrnuty do báze pravidel jednoho regulátoru. Schéma regulační soustavy je na obrázku 5.7.

Dále budu mluvit o regulátoru polohy obruče a polohy kuličky, i když se jedná pouze o jeden regulátor, budu mít na mysli část regulátoru řídící polohu obruče a část řídící kuličku.

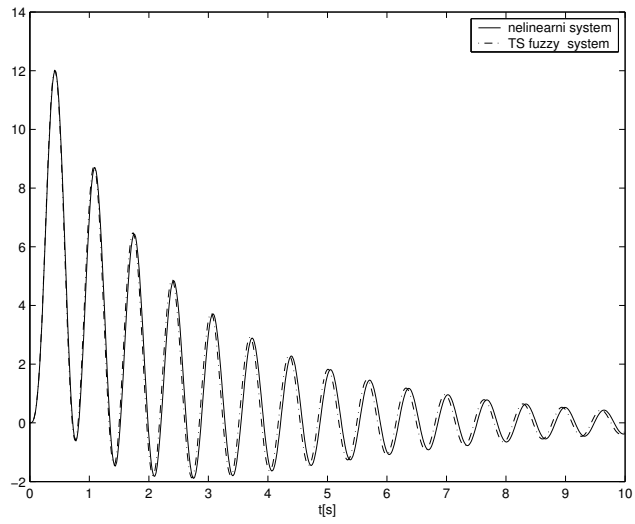
První vstup regulátoru polohy obruče, regulační odchylka žádané a skutečné polohy obruče  $e_h$ , je pokryt pěti fuzzy množinami, jak ukazuje obrázek 5.8. Druhý vstup, derivace odchylky  $e_{dh}$ , je pokryt třemi fuzzy množinami, jejich umístění je



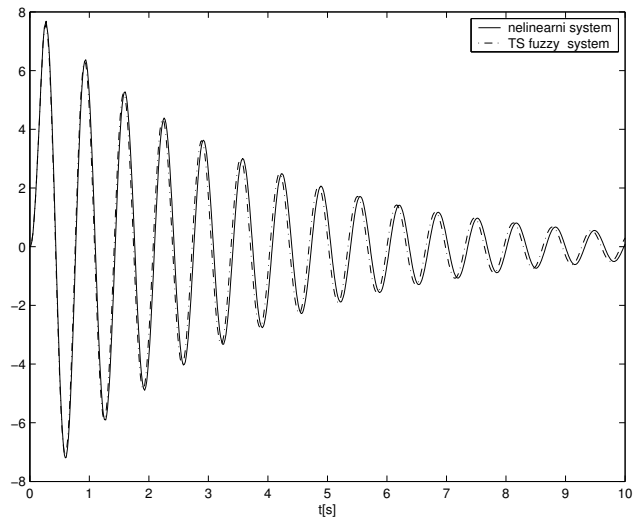
Obrázek 5.3: Srovnání výstupu 1



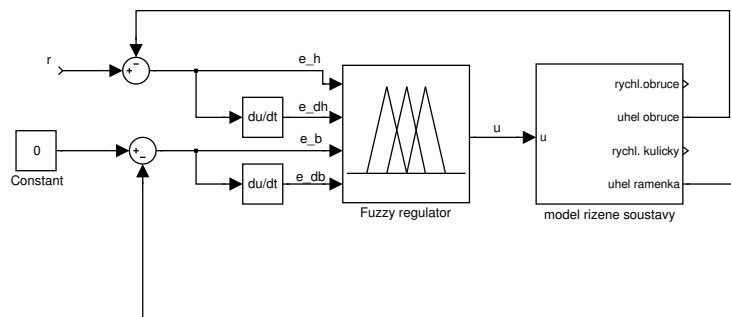
Obrázek 5.4: Srovnání výstupu 2



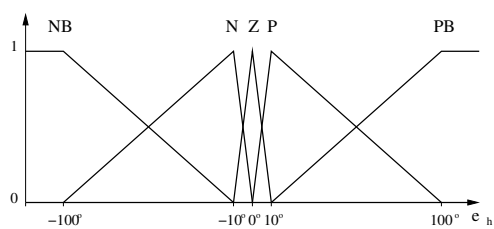
Obrázek 5.5: Srovnání výstupu 3



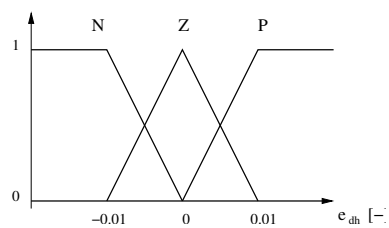
Obrázek 5.6: Srovnání výstupu 4



Obrázek 5.7: Schéma regulační soustavy

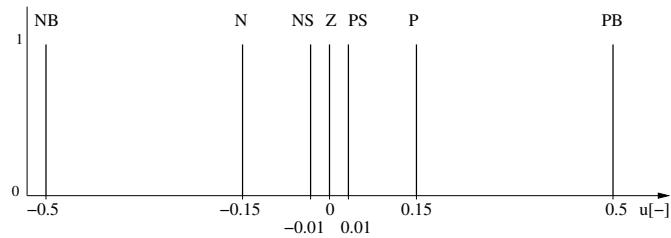


Obrázek 5.8: Funkce příslušnosti na vstupu  $e_h$



Obrázek 5.9: Funkce příslušnosti na vstupu  $e_{dh}$

znázorněno na obrázku 5.9. Při tomto pokrytí vstupu má regulátor celkem patnáct pravidel se singletony v závěrech. Zvolenou polohu a označení singletonů ukazuje obrázek 5.10. Báze pravidel je v tabulce 5.2. Vstupně výstupní mapu ukazuje



Obrázek 5.10: Singletony v závěrech pravidel

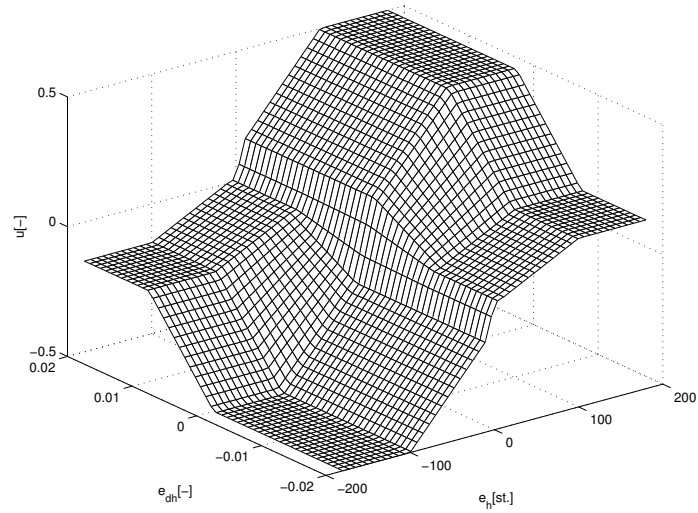
u	$e_h$					
	NB	N	Z	P	PB	
$e_{dh}$	N	NB	N	NS	Z	P
	Z	NB	N	Z	P	PB
	P	N	Z	PS	P	PB

Tabulka 5.2: Báze pravidel regulátoru polohy obruče

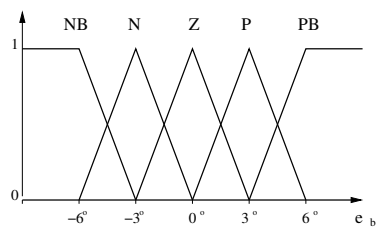
obrázek 5.11.

Druhá část regulátoru, regulátor polohy kuličky, má za vstup odchylku kuličky z nulové polohy  $e_b$  a její derivaci  $e_{db}$ . Pokrytí těchto vstupů fuzzy množinami ukazují obrázky 5.12 a 5.13. Regulátor má opět patnáct pravidel se singletony v závěrech. Báze pravidel je znázorněná v tabulce 5.3. Poloha a označení singletonů v závěru je stejná jako u regulátoru polohy obruče. Vstupně výstupní mapa je na obrázku 5.14. Navržený regulátor jsem implementoval pomocí Fuzzy toolboxu. Báze pravidel je složena z bází obou částí (tabulky 5.2 a 5.3). Jako S-normu jsem použil algebraický součet (funkce `probor`) a jako T-normu součin. K defuzzifikaci je použita metoda váženého průměru (`wtaver` viz [13]). Funkci jsem ověřil v Simulinku. Vstupním signálem je skok žádané hodnoty z nuly na sto dvacet stupňů. Regulátor jsem vyzkoušel jak na nelineární systém podle rovnice (5.1) tak i na jeho TS modelu. Na obrázku 5.15 je průběh hodnoty polohy obruče a na obrázku 5.16 je zaznamenána poloha kuličky.

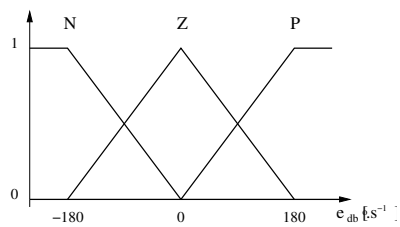




Obrázek 5.11: Vstupně výstupní mapa regulátoru obruče



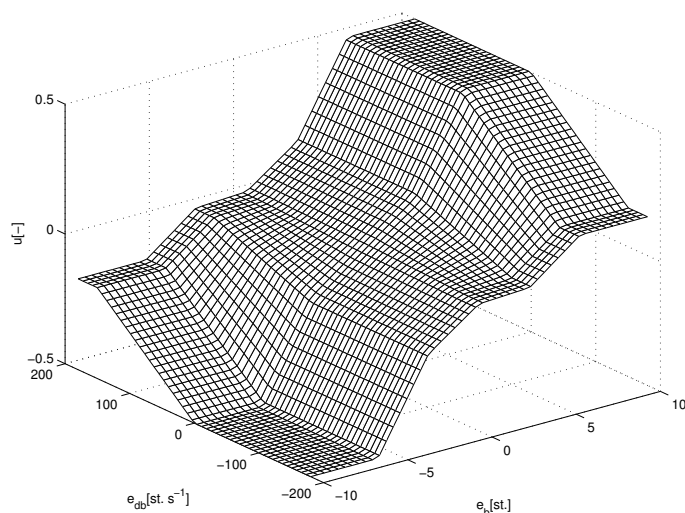
Obrázek 5.12: Funkce příslušnosti na vstupu  $e_b$



Obrázek 5.13: Funkce příslušnosti na vstupu  $e_{db}$

u		$e_b$				
		NB	N	Z	P	PB
$e_{db}$	N	NB	N	NS	Z	P
	Z	NB	N	Z	P	PB
	P	N	Z	PS	P	PB

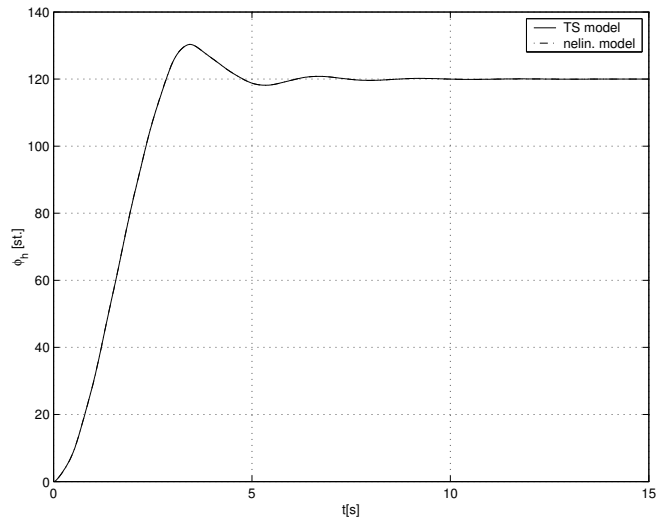
Tabulka 5.3: Báze pravidel regulátoru polohy kuličky



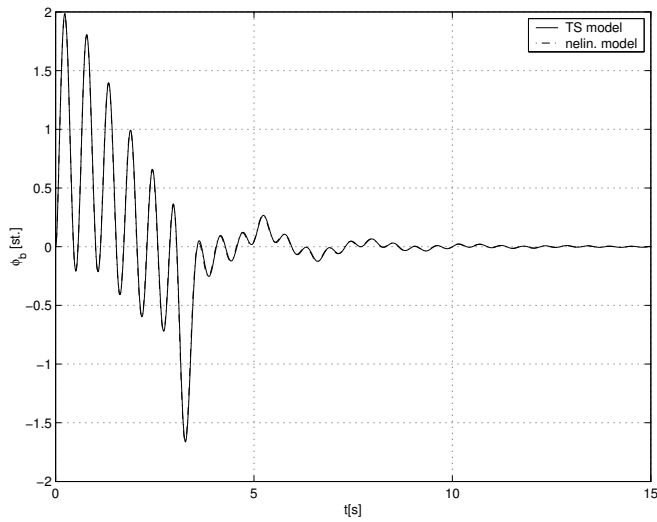
Obrázek 5.14: Vstupně výstupní mapa regulátoru kuličky

### 5.3 Implementace podmínky stability

V této části popíši implementaci podmínky stability fuzzy regulační soustavy, která byla navržena v předešlé části. Implementovaný postup z článku [9] se skládá ze dvou částí. V první je nalezen horní a dolní odhad výstupu fuzzy regulátoru a v druhé části se formuluje soustava lineárních maticových nerovnic, které zaručují existenci Ljapunovovy funkce. Postup nalezení odhadů výstupu fuzzy regulátoru, který je navržen ve výše citovaném článku, funguje pouze pro systémy se dvěma vstupy. Proto jsem navrhl jiný způsob, který lze použít na fuzzy systém, který má více než dva vstupy. Navržený algoritmus ukáži v první části této podkapitoly. V druhé části popíši způsob implementace maticových nerovnic z citovaného článku



Obrázek 5.15: Hodnota polohy obruče při skoku žádané hodnoty



Obrázek 5.16: Hodnota polohy kuličky při skoku žádané hodnoty

pomocí toolboxu SeDuMi Interface v prostředí Matlab a dosažené výsledky.

### 5.3.1 Aproximace výstupu fuzzy regulátoru

Dříve než popíši způsob nalezení odhadů výstupu regulátoru, musím definovat vrcholy oblastí v nichž se odhad hledá. Vrchol oblasti nazvu vektor, jehož složky tvoří středy funkcí příslušnosti fuzzy množin na vstupu. V případě fuzzy množin ležících na kraji univerza místo středu vezmu nejmenší prvek jádra fuzzy množiny, je-li to fuzzy množina ležící v „kladném“ kraji, a největší prvek jádra, leží-li v „záporném“ kraji. Výše řečené uvedu na příkladu. Pro navržený fuzzy regulátor bude pro každý vrchol  $\Phi$  platit

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4), \quad (5.17)$$

kde  $\Phi_i$  je prvek z množiny středů funkcí příslušnosti fuzzy množin na  $i$ -tém vstupu. V tomto případě se jedná o vstupy  $e_h$ ,  $e_{dh}$ ,  $e_b$  a  $e_{db}$  s pokrytím podle obr 5.8, 5.9, 5.12 a 5.13. Množiny středů definovány

$$\Phi_1 \in \mathcal{V}_1 \equiv \{-100, -10, 0, 10, 100\}$$

$$\Phi_2 \in \mathcal{V}_2 \equiv \{-0.01, 0, 0.01\}$$

$$\Phi_3 \in \mathcal{V}_3 \equiv \{-6, -3, 0, 3, 6\}$$

$$\Phi_4 \in \mathcal{V}_4 \equiv \{-180, 0, 180\}$$

Dále budu používat označení vrcholů pomocí čtyř indexů, tak že  $i$ -tý index označuje pořadí bodu v množině  $\mathcal{V}_i$  tj.  $\Phi_{1,1,1,1}$  označuje vrchol o souřadnicích  $(-100, -0.01, -6, -180)$ . Dále definuji oblast  $\Omega_{i_1, i_2, i_3, i_4}$  která je ohraničená v  $j$ -té dimenzi  $i_j$ -tým a  $i_j + 1$  prvkem množiny  $\mathcal{V}_j$ . Například oblast  $\Omega_{1,1,1,1}$  je vymezena šestnácti vrcholy:

$$\Phi_{1,1,1,1} = (-100, -0.01, -6, -180)$$

$$\Phi_{2,1,1,1} = (-10, -0.01, -6, -180)$$

$$\Phi_{1,2,1,1} = (-100, 0, -6, -180)$$

$$\Phi_{2,2,1,1} = (-10, 0, -6, -180)$$

$$\Phi_{1,1,2,1} = (-100, -0.01, -3, -180)$$

$$\Phi_{2,1,2,1} = (-10, -0.01, -3, -180)$$

⋮

$$\Phi_{2,2,2,2} = (-10, 0, -3, 0).$$

Na vrcholy lze pohlížet jako na kombinaci vstupních fuzzy množin. Každé takové kombinaci odpovídá jedno pravidlo. Pak se dá říci, že každému vrcholu oblasti

odpovídá pravidlo a jemu příslušící závěr. Výstup fuzzy systému v oblasti vymezené vrcholy je dán konvexní kombinací singletonů v závěrech těchto pravidel. Toto tvrzení je důsledkem volby tvaru funkce příslušnosti a pokrytí vstupních proměnných fuzzy množinami, jeho důkaz je uveden v [16].

Cílem navrženého algoritmu je nalézt horní a dolní omezení hodnoty výstupu fuzzy regulátoru ve tvaru afinní závislosti. Výstup fuzzy regulátoru označím

$$u = \text{Fuz}(e), \quad (5.18)$$

kde  $e \equiv (e_h, e_{dh}, e_b, e_{db})$  je vstupní vektor fuzzy regulátoru. A v každé oblasti s indexem  $n \equiv (i, j, k, l)$  hledám omezení  $\underline{K}^n, \underline{k}^n, \overline{K}^n$  a  $\overline{k}^n$ , která musí splňovat

$$\underline{K}^{nT} e + \underline{k}^n \leq \text{Fuz}(e) \leq \overline{K}^{nT} e + \overline{k}^n. \quad (5.19)$$

Z důvodu jednoduchosti dalšího popisu označím vrcholy oblasti  $\Omega_n$  v libovolným způsobem čísly od 1 do 16. Vzhledem k tomu, že je výstup regulátoru v oblasti  $\Omega_n$  dán konvexní kombinací hodnoty výstupu v jejích vrcholech, tedy

$$u = \text{Fuz}(e) = \text{Co} \{ \text{Fuz}(\Phi_1), \dots, \text{Fuz}(\Phi_{16}) \}, \quad (5.20)$$

bude nerovnice (5.19) splněna pro všechny hodnoty výstupu v oblasti, když bude platit ve vrcholech oblasti. Problém nalezení mezí jsem vyjádřil kvadratickým programem, jehož minimalizované kritérium je

$$(DK^n - p)^T (DK^n - p), \quad (5.21)$$

kde

$$D = \begin{pmatrix} \Phi_1, & 1 \\ \Phi_2, & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \Phi_{16}, & 1 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

je matice složená z hodnot vrcholů  $\Phi_i$ ,  $K^n$  je vektor hledaných parametrů tj.  $K^n = (\overline{K}^n, \overline{k}^n)^T$  nebo  $K^n = (\underline{K}^n, \underline{k}^n)^T$  a  $p$  je vektor složený ze singletonů v závěrech pravidel, které tvoří vrcholy oblasti tedy

$$p = \begin{pmatrix} \text{Fuz}(\Phi_1) \\ \text{Fuz}(\Phi_2) \\ \vdots \\ \text{Fuz}(\Phi_{16}) \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Výše uvedené kritérium jsem převedl do standardního tvaru

$$\frac{1}{2} x^T J x + f^T x, \quad (5.24)$$

kteře očekává i optimalizační toolbox Matlabu použitý k řešení. K tomu jsem vyjádřil hledaný vektor parametrů v homogenních souřadnicích  $\mathbf{K}_h^n = (\mathbf{K}^n, 1)^T$ . Pak matice  $\mathbf{J}$  je rovna

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^T \mathbf{D} & -\mathbf{D}^T \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^T \mathbf{D} & \mathbf{p}^T \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

a vektor  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ . Použité kritérium říká, že se má minimalizovat kvadrát euklidovské vzdálenosti mezi odhadem a skutečnou hodnotou výstupu. Do omezení optimalizace je třeba zahrnout podmínku, že se má vypočítat spodní odhad, pak má podmínka tvar

$$(\mathbf{D} \ 0) \mathbf{K}_h^n \leq \mathbf{p}, \quad (5.26)$$

nebo horní odhad a pak je podmínka dána

$$-(\mathbf{D} \ 0) \mathbf{K}_h^n \leq -\mathbf{p}. \quad (5.27)$$

Poslední podmínka typu rovnost, která zaručuje, že poslední souřadnice hledaného vektoru  $\mathbf{K}_h^n$  je rovná jedné a kritérium (5.24) má význam kvadrátu vzdálenosti,

$$(0 \ 0 \ 0 \ 1) \mathbf{K}_h^n = 1 \quad (5.28)$$

je společná v obou případech. Takto vyjádřený optimalizační problém jsem vyřešil ve všech oblastech vstupního prostoru regulátoru pomocí funkce `quadprog`.

### 5.3.2 Implementace kritéria ve formě LMI

Před tím, než lze aplikovat implementované kritérium, je třeba ještě upravit model řízené soustavy (5.14), aby jeho výstup odpovídal vstupu regulátoru. Za předpokladu nulového vstupu  $r$  (viz obr. (5.7)) jsou signály na vstupu regulátoru dány lineární kombinací výstupu řízené soustavy. Platí pro ně vztahy:

$$e_h = -x_3 \quad (5.29)$$

$$e_{dh} = -x_2 \quad (5.30)$$

$$e_b = -x_5 \quad (5.31)$$

$$e_{db} = -1(c_1 x_2 + c_2 x_4), \quad (5.32)$$

kde konstanty  $c_1$  a  $c_2$  jsou definované

$$c_1 = \frac{k_{\phi_b} r_h}{(r_h - r_b) k_{\omega_h}} \quad (5.33)$$

$$c_2 = \frac{r_b k_{\phi_b}}{(r_h - r_b)}. \quad (5.34)$$

Tyto lineární transformace formálně zahrnu do modelu řízené soustavy analogicky jako v části 5.1. Vztahy (5.29) až (5.32) vyjádřím transformační maticí

$$\mathbf{T}_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -c_1 & 0 & -c_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

Nové parametry lineárních modelů  $\mathbf{A}_{e\sigma}$  a  $\mathbf{b}_{ei}$  v závěrech TS modelu řízené soustavy budou dány vztahy

$$\mathbf{A}_{e\sigma} = \mathbf{T}_e \mathbf{A}_\sigma \mathbf{T}_e^{-1} \quad (5.36)$$

$$\mathbf{b}_{e\sigma} = \mathbf{T}_e \mathbf{b}_\sigma, \quad (5.37)$$

kde  $\mathbf{A}_\sigma$  a  $\mathbf{b}_\sigma$ ,  $\sigma = 1, 2, 3$  jsou matice původního modelu (5.13). Dosazením do výše uvedených vzorců jsem dostal následující hodnoty parametrů:

$$\mathbf{A}_{e1} = \begin{pmatrix} -150.00 & -0.55 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1070.70 & 0 & 0 & 0 \\ -174.06 & -0.07 & 0 & 0 & 0.0006 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 \\ -226640.00 & 0 & 645.9 & -53.80 & 0.60 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{e1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{e2} = \begin{pmatrix} -150.00 & -0.55 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1070.70 & 0 & 0 & 0 \\ -174.06 & -0.07 & 0 & 0 & 0.0006 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 \\ -226640.00 & 0 & 645.9 & 92.20 & 0.60 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{e2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{e3} = \begin{pmatrix} -150.00 & -0.55 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1070.70 & 0 & 0 & 0 \\ -174.06 & -0.07 & 0 & 0 & 0.0006 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 \\ -226640.00 & 0 & 645.9 & -53.80 & 0.60 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{e3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soustavu LMI uvedenou v části 2.2.2 jsem implementoval v Matlabu pomocí toolboxu SeDuMi ([15]) a nadstavby tohoto toolboxu SeDuMi Interface ([14]). V článku [9] uvedené podmínky (2.81) až (2.85) jsem rozšířil pro systém čtvrtého řádu. Kromě změny dimenze příslušných matic bylo třeba dodefinovat omezení oblasti platnosti lokálního modelu, které je v původních rovnicích zahrnuto do matic (2.91). Podmínky stability navrženého regulátoru s TS modelem vyjádřené

pomocí maticových lineárních nerovnic jsou v oblasti  $\Omega_n$ ,  $n = (i, j, k, l)$

$$P > 0 \quad (5.38)$$

$$\overline{G}_{a\sigma}^{nT} P_a + P_a \overline{G}_{a\sigma}^n - \sum_{\rho=1}^4 \overline{\pi}_\rho^n Q_{a\rho}^n < 0 \quad (5.39)$$

$$\underline{G}_{a\sigma}^{nT} P_a + P_a \underline{G}_{a\sigma}^n - \sum_{\rho=1}^4 \underline{\pi}_\rho^n Q_{a\rho}^n < 0, \quad (5.40)$$

pakliže  $\Omega_n$  neobsahuje počátek. V opačném případě

$$\overline{G}_\sigma^{nT} P + P \overline{G}_\sigma^n < 0 \quad (5.41)$$

$$\underline{G}_\sigma^{nT} P^n + P \underline{G}_\sigma^n < 0, \quad (5.42)$$

kde  $\sigma \in \Sigma^n$ ,  $\Sigma^n$  je množina indexů pravidel modelu řízené soustavy, které mají v oblasti  $\Omega_n$  nenulovou aktivaci,

$$\underline{G}_\sigma^n = (A_{e\sigma} + b_{e\sigma} \underline{K}^n), \quad \overline{G}_\sigma^n = (A_{e\sigma} + b_{e\sigma} \overline{K}^n), \quad (5.43)$$

$$\underline{g}_\sigma^n = b_{e\sigma} \underline{k}^n, \quad \overline{g}_\sigma^n = b_{e\sigma} \overline{k}^n, \quad (5.44)$$

$$P_a \equiv \begin{pmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.45)$$

$$Q_{a\rho}^n = \begin{pmatrix} Q_\rho^n & R_i^n \\ R_i^{nT} & s_i^n \end{pmatrix}, \quad (5.46)$$



$$\overline{\mathbf{G}}_{a\sigma}^n \equiv \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{G}}_{\sigma}^n & \overline{\sigma}_{\sigma}^n \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{G}}_{a\sigma}^n \equiv \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{G}}_{\sigma}^n & \underline{\sigma}_{\sigma}^n \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.47)$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.48)$$

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.49)$$

$$\mathbf{R}_1^n = \left(-\frac{1}{2} (\Phi_1^i + \Phi_1^{i+1}), 0, 0, 0\right)^T, \quad (5.50)$$

$$\mathbf{R}_2^n = \left(0, -\frac{1}{2} (\Phi_2^j + \Phi_2^{j+1}), 0, 0\right)^T, \quad (5.51)$$

$$\mathbf{R}_3^n = \left(0, 0, -\frac{1}{2} (\Phi_3^k + \Phi_3^{k+1}), 0\right)^T, \quad (5.52)$$

$$\mathbf{R}_4^n = \left(0, 0, 0, -\frac{1}{2} (\Phi_4^l + \Phi_4^{l+1})\right)^T, \quad (5.53)$$

$$s_1^n = \Phi_1^i \Phi_1^{i+1}, \quad s_2^n = \Phi_2^j \Phi_2^{j+1}, \quad (5.54)$$

$$s_3^n = \Phi_3^k \Phi_3^{k+1}, \quad s_4^n = \Phi_4^l \Phi_4^{l+1}. \quad (5.55)$$

Takto definovaný problém lze bez dalších úprav vyřešit pomocí nástroje SeDuMi Interface, který zadání přeformuluje a vyřeší pomocí toolboxu SeDuMi. Vše se však děje z uživatelského hlediska transparentně, bez nutnosti upravovat zadání. Průběh hledání řešení ukazuje následující výpis programu

```
SeDuMi 1.05 by Jos F. Sturm, 1998, 2001.
Alg = 2: xz-corrector, Step-Differentiation, theta = 0.250, beta = 0.500
eqs m = 272, order n = 968, dim = 6250, blocks = 163
nnz(A) = 11934 + 1, nnz(ADA) = 9953, nnz(L) = 5113
Handling 1 + 1 dense columns.
it :      b*y      gap      delta      rate      t/tP*      t/tD*      feas cg cg
0 :          1.39E+13 0.000
1 : 0.00E+00 6.13E+12 0.000 0.4404 0.9000 0.0000 1.00 1 0
2 : 0.00E+00 2.65E+12 0.000 0.4327 0.9000 0.0000 1.00 1 1
3 : 0.00E+00 1.88E+12 0.000 0.7096 0.9000 0.0000 1.00 1 1
4 : 0.00E+00 8.41E+11 0.000 0.4469 0.9000 0.0000 1.00 1 1
5 : 0.00E+00 6.39E+11 0.059 0.7603 0.9000 0.0000 1.00 1 1
6 : 0.00E+00 3.89E+11 0.000 0.6094 0.9000 0.9000 1.00 1 1
7 : 0.00E+00 1.12E+11 0.000 0.2870 0.9000 0.0000 1.00 1 1
8 : 0.00E+00 7.21E+09 0.412 0.0645 0.9900 0.9900 1.00 1 1
9 : 0.00E+00 2.97E+09 0.000 0.4120 0.9000 0.9000 1.00 1 1
10 : 0.00E+00 8.74E+08 0.000 0.2942 0.9000 0.0000 1.00 1 1
11 : 0.00E+00 2.95E+08 0.439 0.3379 0.9000 0.0000 1.00 1 1
12 : 0.00E+00 1.39E+08 0.000 0.4710 0.9000 0.9000 1.00 1 1
13 : 0.00E+00 3.12E+07 0.062 0.2246 0.9179 0.9000 1.00 2 3
14 : 0.00E+00 1.75E+07 0.306 0.5604 0.9334 0.9000 1.00 2 2
15 : 0.00E+00 1.15E+07 0.341 0.6548 0.9000 0.0000 1.00 3 3
16 : 0.00E+00 7.84E+06 0.000 0.6840 0.9000 0.9000 1.00 3 3
17 : 0.00E+00 4.53E+06 0.252 0.5782 0.9000 0.0000 1.00 3 3
18 : 0.00E+00 1.86E+06 0.131 0.4107 0.9163 0.9000 1.00 3 3
19 : 0.00E+00 7.75E+05 0.129 0.4165 0.9000 0.0000 1.00 2 2
20 : 0.00E+00 4.60E+05 0.068 0.5935 0.9000 0.9000 1.00 2 2
21 : 0.00E+00 1.66E+05 0.325 0.3608 0.9000 0.0000 1.00 2 2
22 : 0.00E+00 1.04E+05 0.000 0.6251 0.9000 0.9000 1.00 3 2
23 : 0.00E+00 3.52E+04 0.000 0.3393 0.9038 0.9000 1.00 2 3
24 : 0.00E+00 1.43E+04 0.266 0.4075 0.9000 0.0000 1.00 2 3
25 : 0.00E+00 6.05E+03 0.000 0.4220 0.9000 0.9000 1.00 3 4
26 : 0.00E+00 3.20E+03 0.156 0.5279 0.9000 0.0000 1.00 4 4
27 : 0.00E+00 1.38E+03 0.222 0.4320 0.9000 0.0000 1.00 2 3
28 : 0.00E+00 1.13E+03 0.000 0.8212 0.9000 0.9000 1.00 2 2
29 : 0.00E+00 5.29E+02 0.490 0.4663 0.9000 0.0000 1.00 2 2
```

```

30 : 0.00E+00 3.33E+02 0.184 0.6302 0.9000 0.9000 1.00 2 2
31 : 0.00E+00 8.38E+01 0.310 0.2516 0.9463 0.9000 1.00 3 3
32 : 0.00E+00 1.19E+01 0.198 0.1418 0.9324 0.9000 1.00 4 4
33 : 0.00E+00 4.93E+00 0.000 0.4148 0.9045 0.9000 1.00 4 4
34 : 0.00E+00 8.37E-01 0.166 0.1696 0.9472 0.9000 1.00 5 5
35 : 0.00E+00 3.03E-01 0.000 0.3618 0.9444 0.9000 1.00 6 6
36 : 0.00E+00 2.27E-01 0.394 0.7507 0.9000 0.0000 1.00 5 5
37 : 0.00E+00 7.88E-02 0.442 0.3468 0.9406 0.9000 1.00 5 5
38 : 0.00E+00 5.17E-02 0.000 0.6568 0.9171 0.9000 1.00 6 6
39 : 0.00E+00 5.40E-03 0.000 0.1044 0.9514 0.9000 1.00 13 5
40 : 0.00E+00 1.41E-03 0.248 0.2617 0.9216 0.9000 1.00 5 5
41 : 0.00E+00 4.23E-04 0.420 0.2992 0.9000 0.0441 1.00 16 16
42 : 0.00E+00 1.28E-04 0.377 0.3016 0.9000 0.7554 1.00 14 14
43 : 0.00E+00 2.77E-05 0.188 0.2173 0.9000 0.7973 1.00 22 21
44 : 0.00E+00 3.45E-06 0.207 0.1243 0.9450 0.8765 1.00 21 21
45 : 0.00E+00 5.89E-07 0.064 0.1708 0.9000 0.8299 1.00 35 35
46 : 0.00E+00 2.52E-08 0.417 0.0428 0.9900 0.9572 1.00 34 35
47 : 0.00E+00 1.22E-10 0.000 0.0048 0.9990 0.9953 0.95 43 51
iter seconds digits c*x b*y
47 27.5 Inf 0.0000000000e+00 0.0000000000e+00
|Ax-b| = 1.3e-07, [Ay-c]\_+ = 3.1E-13, |x|= 6.3e+01, |y|= 3.7e+04
Max-norms: ||b||=0, ||c|| = 0,
Cholesky |add|=65, |skip| = 1, ||L.L|| = 500000.
feasible

```

Nalezená matice Ljapunovovy funkce má hodnotu

$$P = \begin{pmatrix} 0.0128 & -5.57e-07 & -5.62e-04 & -2.94e-06 & -1.89e-08 \\ -5.57e-07 & 3.51e-09 & 3.52e-07 & 2.10e-10 & -1.19e-10 \\ -5.62e-04 & -1.10e-10 & 3.52e-07 & 2.13e-07 & -1.59e-07 \\ -2.94e-06 & 2.10e-10 & 2.13e-07 & 1.14e-08 & 5.12e-10 \\ -1.89e-08 & -1.10e-10 & -1.59e-07 & 5.12e-10 & 1.38e-10 \end{pmatrix}.$$

Její vlastní čísla

$$\lambda_i = \{7.34e-01, 3.32e-09, 1.07e-08, 6.58e-04, 0.01\} \quad (5.56)$$

jsou kladná a matice  $P$  je tedy pozitivně definitní.

## 5.4 Závěr

V praktické části diplomové práce jsem implementoval kritérium vnitřní stability řídicí soustavy, která se skládá z Takagi-Sugeno fuzzy modelu řízeného systému a singletonového fuzzy regulátoru. Metodu jsem vyzkoušel na modelu systému kulička v obruči, který jsem řídil fuzzy PD regulátorem. Navržený regulátor měl dvě regulační smyčky. První regulační smyčka řídila polohu obruče a druhá stabilizovala kuličku v klidové poloze.

Dynamickou část regulátoru (výpočet derivační složky) jsem formálně zahrnul do modelu řízené soustavy, aby byly splněny podmínky pro typ modelu a regulátoru. Z toho plyne i omezení implementované metody, protože toto nelze vždy provést.

Výsledné kritérium ve formě maticových nerovnic představuje rozsáhlý optimalizační problém. Ačkoliv regulátor má jen 30 pravidel, při výpočtu se musí

uvažovat 225 oblastí a tedy i omezení (5.38) až (5.40) nebo (5.41) až (5.42). Při řešení se často projevila numerická nestabilita, která závisela na nastavení regulátoru, jako je poloha středů vstupních funkcí příslušnosti a hodnoty singletonů v závěrech pravidel. Konkrétní závislost stability výpočtu na nastavení se mi nepodařilo zaznamenat. Pro regulátor se třemi funkcemi příslušnosti na každém vstupu a tedy s 81 pravidly algoritmus fungoval bez problému. Z toho usuzuji, že ač se mi podařilo nalézt řešení a tím dokázat stabilitu, popisovaná regulační soustava svou velikostí tj. počtem proměnných, pravidel a hledaných optimalizačních proměnných představuje maximum implementované metody.



# Kapitola 6

## Závěr

V rámci diplomové práce jsem vypracoval přehled několika algoritmů, které umožňují posoudit stabilitu řídicích systémů s fuzzy modely. Vybrané algoritmy se omezují na singletonové a okrajově i Mamdaniho fuzzy systémy. Výsledný přehled je rozdělen do tří částí podle typu stability, kterou se zabývá.

V první části jsou uvedena kritéria umožňující ověřit stabilitu pomocí Ljapunovy přímé metody. Je diskutován případ autonomního systému i zpětnovazební řídicí soustavy. Řízená soustava je zde ve formě stavového modelu s přechodovou funkcí, která je realizována singletonovým nebo Takagi-Sugeno fuzzy systémem. Nevýhodou této metody je, že vyžaduje analytický popis výstupu regulátoru, proto je její použití omezeno na fuzzy singletonový regulátor.

Na znalosti přesného analytického popisu fuzzy regulátoru nezávisí algoritmy uvedené v druhé části, která je věnována stabilitě vstup-výstup. Zde použité metody vycházejí z podmínky pasivity a konicity. Je uvedena podmínka pasivity Mamdaniho fuzzy regulátoru. Metoda je však omezena na jednorozměrné systémy. V podkapitole věnované podmínce konicity je popsána metoda návrhu robustního fuzzy regulátoru. Ani tato metoda není univerzální a vyžaduje speciální tvar modelu řízené soustavy pouze s jedním vstupem.

Ve třetí části uvedená symbolická analýza ověřuje stabilitu na úrovni báze pravidel fuzzy systémů. Tento postup nemá analogii pro nelineární systémy a jedná se o analýzu stability prostředky fuzzy logiky. Metoda ve stávající formě obsahuje omezení struktury báze pravidel.

V praktické části jsem implementoval kritérium vycházející z Ljapunovy přímé metody, které bylo vyjádřeno ve formě lineárních maticových nerovnic. Kritérium jsem vyzkoušel na navrženém regulátoru systému kulička v obruči.

Metody ověřující stabilitu při fuzzy řízení se i nadále vyvíjí. Většina nalezených kritérií či postupů představuje speciální aplikaci použitelnou pouze v určitém případě. Omezením je, že většina publikovaných algoritmů předpokládá použití singletonových fuzzy systémů.



# Literatura

- [1] G. Calcev. Some remarks on the stability of mamdani fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(3):436–442, August 1998.
- [2] G. Calcev, R. Gorez, and M. De Neyer. Passivity approach to fuzzy control systems. *Automatica*, 34(3):339–344, 1998.
- [3] D. Driankov, H. Hellendoorn, and M. Reinfrank. *An introduction to fuzzy control*. Springer, Berlin, 1993.
- [4] R. Dvořáková and P. Horáček. Stability of fuzzy systems - a survey. Technical report, Rockwell Automation, 1998.
- [5] A. Espada and A. Barreiro. Robust stability of fuzzy control system based on conicity conditions. *Automatica*, 35(4):643–654, April 1999.
- [6] M. French and E. Rogers. Input/output stability theory for direct neuro-fuzzy controllers. *IEEE Transaction on fuzzy systems*, 6(3):331–345, August 1998.
- [7] L. Hartwith. Kulička v kruhu. Semestrální práce z Moderní teorie řízení, ČVUT FEL.
- [8] M. Johansson and A. Rantzer. On the computation of piecewise quadratic lyapunov functions. In *Proceedings of the 36th Conference on Decision & Control*, pages 3515–3520, San Diego, California USA, 1997.
- [9] E. Kim. A new approach to numerical stability analysis of fuzzy control systems. *IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics Part C: Applications and Reviews*, 31(1), February 2001.
- [10] E. Kim, H.J. Kang, and M. Park. Numerical stability analysis of fuzzy control systems via quadratic programming and linear matrix inequalities. *IEEE Transactions on Systems, Man & Cybernetics, Part A (Systems & Humans)*, 29(4):333–346, 1999.

- [11] C. Lee and M. Sugeno. Stability conditions for closed-loop fuzzy systems with singleton consequents. In *Proceedings of 1999 IEEE International Fuzzy Systems Conference*, pages 263–268, Seoul, Korea, 1999.
- [12] Razím M. and Štecha J. *Nelineární systémy*. Vydavatelství ČVUT, 1997.
- [13] The MathWorks. *Fuzzy Logic Toolbox users guide*, September 2000.
- [14] D. Peaucelle, D. Henrion, and Y. Labit. User's guide for SeDuMi Interface 1.01: Solving LMI problems with SeDuMi. Technical report, LAAS-CNRS, Toulouse, France, November 2001.
- [15] J.F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11-12:625–653, 1999. Special issue on interior point methods.
- [16] M. Sugeno. On stability of fuzzy systems expressed by fuzzy rules with singleton consequents. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(2):201–224, 1999.
- [17] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1978.
- [18] P. Vysoký. *Fuzzy řízení*. Vydavatelství ČVUT, 1996.
- [19] P. E. Wellstead. Ball and hoop system. *Automatica*, 19(4):401–406, 1983.
- [20] H. Yamamoto and T. Furuhashi. A new sufficient conditions fo stable fuzzy control system and its design method. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 9(4):554–569, August 2001.