Diplomová práce

České
vysoké
učení technické
v Praze

F3

Fakulta elektrotechnická
KATEDRA ŘÍDICÍ TECHNIKY

Systém tlumení aeroelastických jevů

Filip Svoboda

Vedoucí: doc. Ing. Martin Hromčík, Ph.D.
Obor: Systémy a řízení
Studijní program: Kybernetika a robotika
Květen 2016

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

katedra řídicí techniky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Filip Svoboda**

Studijní program: Kybernetika a robotika
Obor: Systémy a řízení

Název tématu: **Systém tlumení aeroelastických jevů**

Pokyny pro vypracování:

1. Navrhněte zpětnovazební řídicí systémy potlačující dynamickou nestabilitu křídla.
2. Porovnejte různé přístupy regulace z hlediska robustnosti – vlivu nepřesnosti měření, nepřesnosti modelu, vlivu poruch.
3. Použijte model se třemi stupni volnosti k rozšíření na model s konečným počtem profilových řezů – profilové řezy jsou mezi sebou elasticky propojeny.
4. Demonstrujte chování rozšířeného modelu s řídicím systémem a bez něj.
5. Navržený řídicí systém musí zohledňovat dostupnost dat, která k regulaci používá (používat měřitelná data).

Seznam odborné literatury:

[1] S. Skogestad, I. Postlethwaite. Multivariable Feedback Control: Analysis and Design. John Wiley & Sons, 2. vydání, 2005.
[2] P. J. Antsaklis, A. N. Michel: A Linear Systems Primer. Birkhauser, 2007.

Vedoucí: doc. Martin Hromčík Ing., Ph.D.

Platnost zadání: do konce letního semestru 2016/2017

L.S.

prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry

prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.
děkan

V Praze dne 24. 2. 2016

Poděkování

Mé velké díky patří vedoucímu práce panu doc. Ing. Martinu Hromčíkovi, Ph.D., který mi umožnil spolupráci na projektu aktivního potlačení flutteru už před několika lety. Bez jeho pomoci a směrování projektu by nebylo sepsání této práce možné. Veškeré rady a nápady, které jsem dostal posunuly projekt o další krok dále.

Další poděkování patří pánům Ing. Tomáši Čenskému, Ph.D. a Ing. Karlu Barákovi, kteří pomohli s realizací experimentů a užitečnými radami při tvorbě měřícího přípravku. Díky spolupráci s kolegy z fakulty strojní, speciálně Ústavu letadlové techniky se stává projekt zajímavější o možnosti praktické demonstrace.

Mnoho podnětů a rad také poskytl Ing. Aleš Kratochvíl, kterému bych tímto rád poděkoval. Nesmím také zapomenout na jeho pomoc při tvorbě experimentů.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze, 12. května 2016

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá otázkami aktivního tlumení aeroelastických jevů, zejména flutteru. Nejprve je odvozen model aeroelastického křídla se třemi stupni volnosti, který slouží k návrhu i ověření dosažených výsledků. Díky teorii lineárních systémů je dána do souvislosti dynamika modelu a aeroelastické jevy. Text popisuje tlumící systémy založené na měření pouze jedné veličiny i vícevstupé systémy. S využitím H_∞ jsou prezentovány strukturované regulátory, schopné tlumit i na rychlostech překračujících kritickou rychlost o 80%, a to bez nutnosti návrhu pozorovatele. Široké oblasti rychlostí, kde je tlumení aktivní, bylo dosaženo díky parametrizaci regulátorů, která reaguje na proměnnou dynamiku závislou na rychlosti obtékání křídla. Použitá parametrizace spočívá v interpolaci rychlostně závislých koeficientů regulátoru polynomy. Validace a verifikace jsou provedeny simulačně, ale současně práce nabízí výsledky z provedených experimentů a návrh dalších experimentálních měření.

Klíčová slova: flutter, aeroelasticita, model, H_∞, aktivní tlumení

Vedoucí:
doc. Ing. Martin Hromčík, Ph.D.

Abstract

This diploma thesis deals with issues of active damping of the aeroelastic phenomena especially of flutter. First, a model of an aeroelasticity wing with three degrees of freedom is derived used for design and also for verification of the achieved results. Model dynamics and aeroelastic phenomena have been associated by the linear systems theory. Text describes a damping systems based on one value measuring only, as well as a multi-input systems. There are presented structured controllers with the use of H_∞ method, these controllers are able to damp on 80% over critical velocity and without using a state observer. A wide field of speed where the damping is active has been achieved. Thanks to parametrization of the controllers, the parametrization responds to the variable dynamics depending on the speed. The parametrization is based on interpolation of a speed-dependent coefficients of a controller by the polynomials. Validations and verifications are done by simulations, however there are also results from the experiments and other experiments are designed.

Keywords: flutter, aeroelasticity, model, H_∞, active damping

Title translation: Damping system of aeroelasticity phenomena

Obsah

Obrázky

Kapitola 1

Úvod

Tato práce se zabývá tématy spojenými s aeroelasticitou, ta se dá charakterizovat, jako vědní obor, zkoumající interakci mezi tekutou a tuhou fází. Aeroelasticita nalézá své uplatnění nejenom v letectví, ale i v jiných technických oblastech, nicméně zde bude pozornost směřována k letecké aeroelasticitě. Předmětem zkoumání je poddajné těleso, v tomto případě, křídlo, které je obtékáno proudem vzduchu. Dochází zde k interakci aerodynamických, elastických a setrvačných sil, jenž stojí za vznikem aeroelastických jevů. Ty se dále rozlišují na základě působení sil do dvou kategorií. Při působení pouze aerodynamických a elastických sil hovoříme o statických aeroelastických jevech a při působení i setrvačných sil jde o dynamické aeroelastické jevy. U statických jevů dochází k jednosměrné deformaci, naopak dynamické jevy charakterizuje kmitavý pohyb.

Další myšlenky se vztahují právě k dynamickým jevům, zejména flutteru známém též jako třepetání. Nebezpečnost flutteru spočívá v netlumeném samobuzeném kmitání, které je příčinou destrukce nosné, nebo ocasní plochy. Flutter způsobuje zmíněná trojice sil, v soustavě, kde ztráty energie tlumením, nepřevyšují množství dodané energie z proudu vzduchu. Tlumením je zde myšleno zejména konstrukční tlumení, v případě ultralehkých letadel je to výhradně konstrukční tlumení. Tím se text dostává k samotné myšlence práce, navrhující doplnění konstrukčního tlumení o aktivní tlumení, jenž by dokázalo flutteru předejít, respektive posunout na vyšší rychlosti, které by letadlo nedokázalo vyvinout.

Nejprve je odvozen model dynamiky aeroelastického křídla se třemi stupni volnosti, který umožňuje studii a návrh tlumení dvourozměrového třepetání. Dále je model analyzován, a to v závislosti na rychlosti. Analýzy jsou založené na numerických simulacích a linearizovaném modelu, který využívá i popsaný algoritmus pro nalezení rychlosti flutteru, označované taky jako kritická rychlost. Právě kritická rychlost je hranicí, kde začíná být tlumení kmitů nulové a menší než nula. Po rozboru modelu následují vlastní návrhy systémů potlačujících kmitání křídla. Poslední částí je zhodnocení funkce systémů a návrh experimentálního ověření výsledků.

1.1 Model aeroelastického křídla

Odvození modelu aeroelastického křídla využívá Lagrangeových rovnic druhého druhu, pomocí kterých je sestaven model samotného elastického křídla se třemi stupni volnosti. Také je zmíněn postup odvození zjednodušeného modelu, často uváděného v literatuře. Křídlo je doplněno modelem nestacionární aerodynamiky z podkapitoly 2.4, které ve zpětné vazbě dotváří model a zavádí aerodynamické síly a momenty. Aby mohl být model použit k účelům řízení, musí obsahovat akční člen, tím je servem řízené křidélko, sloužící pouze k účelům tlumení. Přidáním dynamiky servem řízeného křidélka je model kompletní. Mimo modelu se třemi stupni volnosti a řízeným křidélkem, text také naráží na princip návrhu modelu křídla s rozprostřenými parametry.

1.2 Analýza Modelu

Vzhledem k mechanické reprezentaci modelu, kterou tvoří určitá konfigurace trojice tuhostí a hmoty, systém disponuje právě trojicí módů, které jsou pro další úvahy velice důležité a text je podrobněji zkoumá. Je zde popsána také závislost těchto módů na rychlosti obtékání křídla a spojitost se vznikající nestabilitou při kritické rychlosti. Přesně tyto souvislosti využívá algoritmus 4.1.3, pro nalezení rychlosti flutteru.

1.3 Systém tlumení

Navrhované systémy tlumení aeroelastických jevů, vychází z jednoduchých myšlenek o zatlumení módu způsobujícím nestabilitu, až po složitější regulátory s více vstupy, navrhované metodou H_∞. Snahou při návrhu je skutečná realizovatelnost systému, tedy zaměření na měřený výstup systému, přesto se text zmiňuje i o systémech, jenž by bylo nutné v reálné aplikaci doplnit o další systém, tím je pozorovatel stavu. Mimo to je řízení hodnoceno i z dalších hledisek, například vlivu tlumiče na řízení letadla a podobně. Jako perspektivní systém se ukazuje strukturovaný regulátor parametrizovaný rychlostí, který pro dané parametry dokáže posunout kritickou rychlost o 80%.

1.4 Validace a Verifikace

Dílčí výsledky každého návrhu byly prezentovány u konkrétních regulátorů. Přesto byl návrh s parametrizovaným řízením MIMO-4 využit k ukázce rozdílů časových odezev, mezi křídlem, které je aktivně tlumeno a křídlem bez tlumení. Křídlo s aktivním tlumením prokázalo lepší odolnost proti poruchám na vyšších frekvencích (modálních frekvencích), a to pro nízké rychlosti, i rychlosti nad hranicí flutteru. Ověření je možné také experimentálně, proto se část textu věnuje i sestavení vhodného experimentu.

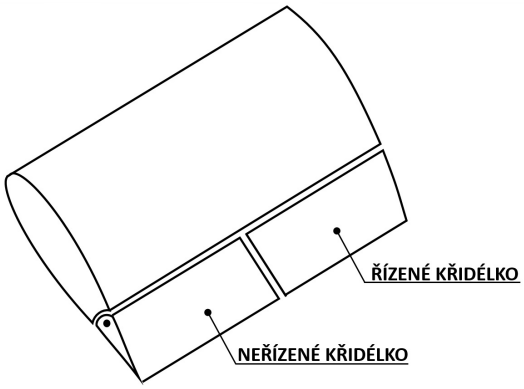
Část I

Model aeroelastického křídla

Kapitola 2

Model aeroelastického křídla se třemi stupni volnosti

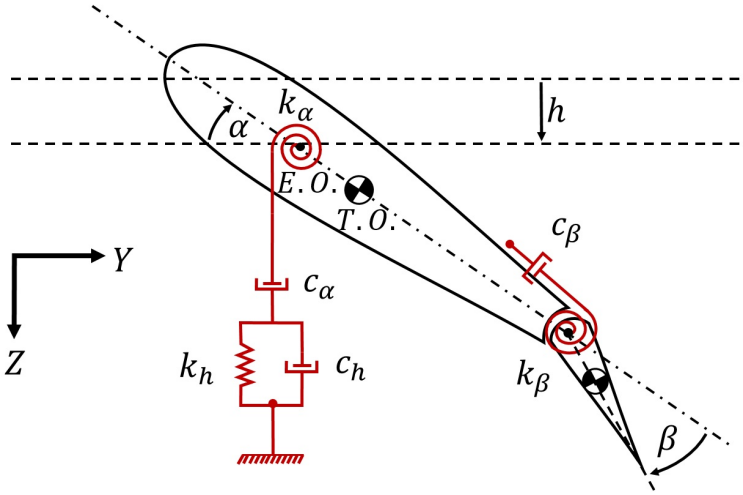
V této kapitole bude popsán postup sestavení matematického modelu elastického křídla se třemi stupni volnosti, které naznačuje obrázek 2.2 a 2.1. Křídlo je osazené dvojicí křidélek, kde první křidélko simuluje řídicí plochu ovládanou pilotem, dále jí budeme označovat jako „neřízené křidélko“, druhou „řízené křidélko“ pilot nemůže ovládat a slouží pouze k tlumení nežádoucích aeroelastických jevů. Popisovaný koncept uvažuje možnost vertikálního pohybu křídla ve směru osy Z, dále rotaci kolem elastické osy označené jako E.O. a rotaci neřízeného křidélka. Křídlo má jednotkové rozpětí. Geometrie profilu je nakreslena na obrázku 2.3, kde jsou zakótovány důležité osy profilu.



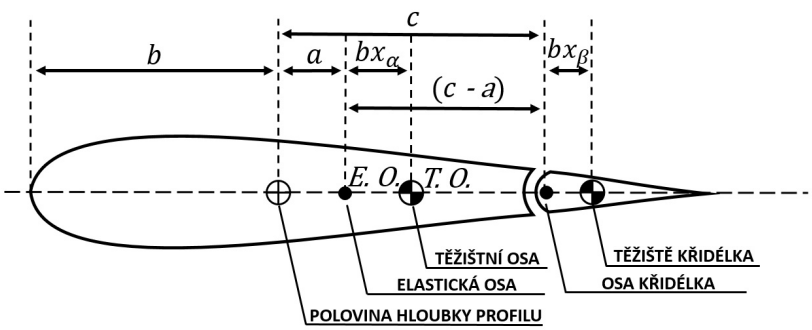
Obrázek 2.1: Uvažovaný koncept křídla

Aerodynamické charakteristiky profilu jsou reprezentovány aerodynamickým vztlakem a klopivým momentem. Vztlak působí v aerodynamickém středu (aerodynamické ose), klopivý moment bude vztažen k elastické ose. Z hlediska aeroelasticity je zcela zanedbán odpor. Jedním důvodem je, že velikost odporu je vzhledem ke vztlaku pro tenký profil a malé výchylky zanedbatelný a také protože tuhost nosné plochy ve směru působícího odporu je podstatně větší než ve směru působícího vztlaku. K modelování, simulacím, analýze i návrhu zákonu řízení je využíván Matlab a Simulink, proto jsou rovnice popisující model aeroelastického křídla implementovány jako schéma v Simulinku nebo jako S-funkce. Podrobnější informace o S-funkcích je možné

nalézt na stránkách firmy MathWorks.



Obrázek 2.2: Model křídla se třemi stupni volnosti



Obrázek 2.3: Geometrie profilu

2.1 Model mechaniky křídla se zanedbáním nelinearit

Tato podkapitola je věnována odvození pohybových rovnic elastického křídla se zanedbáním nelinearit. Zmíněné odvození je běžné v literatuře, která se zabývá problematikou aeroelasticity jako je [WC07], [DIVD86] nebo [Sut11] a bude stručně naznačeno i zde.

K sestavení rovnic se využívá Lagrangeových rovnic druhého druhu 2.12, podrobněji rozepsaných v další podkapitole. Zobecněné souřadnice jsou 2.14. Pro napsání Lagrangianu 2.16 bude nutné nalézt celkovou kinetickou a potenciální energii. Celková kinetická energie bude určena superponováním kinetické energie translačně klopivého pohybu křídla bez kormidla T_1 a kinetické energie samotného kormidla T_2. Kinetická energie elementu úseku křídla o hmotnosti dm_1 nacházejícím se ve vzdálenosti $x_1 = x - x_e$ od elastické osy je

$$dT_1 = \frac{1}{2}v^2 dm_1 = \frac{1}{2}\left[\dot{h} + (x - x_e)\,\dot{\alpha}\right]^2 dm_1. \tag{2.1}$$

Po integraci od náběžné hrany křídla až po náběžnou hranu kormidla získáme 2.2. Podobně získáme z 2.3 kinetickou energii kormidla 2.4. Potenciální energii aeroelastické soustavy popisuje 2.6.

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1\dot{h}^2 + \frac{1}{2}j_1\dot{\alpha}^2 + S_\alpha\dot{h}\dot{\alpha}. \tag{2.2}$$

$$dT_1 = \frac{1}{2}v^2 dm_2 = \frac{1}{2}\{\dot{h} - [(c-a) + x_2]\,\dot{\alpha} + x_2\dot{\beta}\}^2 dm_2. \tag{2.3}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2\dot{h}^2 + \frac{1}{2}j_1\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}j_2\dot{\beta}^2 + S_\alpha\dot{h}\dot{\alpha} + S_\beta\dot{h}\dot{\beta} + [(c-a)\,bS_\beta + j_2]\,\dot{\alpha}\dot{\beta} \tag{2.4}$$

$$T = T_1 + T_2 \tag{2.5}$$

$$U = \frac{1}{2}k_h h^2 + \frac{1}{2}k_\alpha\alpha^2 + \frac{1}{2}k_\beta\beta^2 \tag{2.6}$$

Po dosazení a vypočtení Lagrangeových rovnic jsou získány pohybové rovnice 2.7,

$$\begin{aligned} m\ddot{h} + S_\alpha\ddot{\alpha} + S_\beta\ddot{\beta} + k_h h + c_h h &= -L, \\ S_\alpha\ddot{h} + j_1\ddot{\alpha} + [(c-a)\,bS_\beta + j_2]\,\ddot{\beta} + k_\alpha\alpha c_\alpha\dot{\alpha} + &= M_\alpha, \\ S_\beta\ddot{h} + [(c-a)\,bS_\beta + j_2]\,\ddot{\alpha} + j_2\ddot{\beta} + k_\beta\beta + c_\beta\dot{\beta} &= M_\beta, \end{aligned} \tag{2.7}$$

kde $S_\alpha = mbx_\alpha$, $S_\beta = mbx_\beta$ označují statické momenty.

Rovnice 2.7 se také často zapisují v maticové podobě 2.8, kde M je matice konstrukčních hmotností, D matice tlumení a K matice tuhostí. Matice F na pravé straně obsahuje aerodynamické síly a Bu označuje vstup do systému.

$$M\ddot{X} + D\dot{X} + KX = F + Bu \tag{2.8}$$

$$M = \begin{bmatrix} m & S_\alpha & S_\beta \\ S_\alpha & j_1 & (c-a)bS_\beta + j_2 \\ S_\beta & (c-a)bS_\beta + j_2 & j_2 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

$$D = \begin{bmatrix} c_h & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_h & 0 & 0 \\ 0 & k_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & k_\beta \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

2.2 Model mechaniky křídla uvažující nelinearity

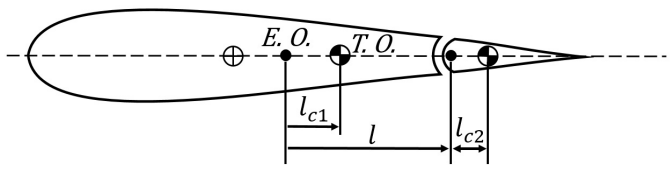
Z důvodů získání realističtějších informací o chování elastického křídla a validace navržených zákonů řízení zde bude odvozen i model, uvažující nelinearity, které se v něm vyskytují. Křídlo, jehož dynamiku se snažíme modelem popsat, lze rozdělit na dvě tuhá tělesa se spojitě rozloženou hmotou. Pro popis poloh a rychlostí těchto těles je třeba zvolit body na zmíněných tělesech, kterými budou těžiště c_1 a c_2. Abychom mohli popsat polohu a spojitý pohyb součástí, které tvoří model, musíme označit jednotlivé body v prostoru. K popisu těchto bodů využijeme souřadnicové soustavy S_0, S_1, S_2, kde S_0 je referenční souřadnicovou soustavou, vůči které bude vyjádřena poloha a rychlost těžiště křídla a těžiště kormidla. Soustavy S_1 a S_2 jsou pevně spojené s náběžnými hranami křídla a kormidla. K odvození modelu budou využity Lagrangeovy rovnice druhého druhu, jejichž obecný tvar je 2.12.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i, \qquad i = 1, 2, ...N, \tag{2.12}$$

s počátečními podmínkami

$$q_i(t_0) = q_{i0}, \dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_{i0}. \tag{2.13}$$

Konfigurační prostor vymezují zobecněné souřadnice q_i, kterými jsou v tomto případě vertikální výchylka křídla h vzhledem k S_0, úhel natočení křídla α vzhledem k ose Y_0 a výchylka křidélka β vzhledem k ose Y_1. Zobecněné souřadnice a zobecněné rychlosti můžeme popsat vektorem 2.14. Konfiguraci naznačuje obrázek 2.5.

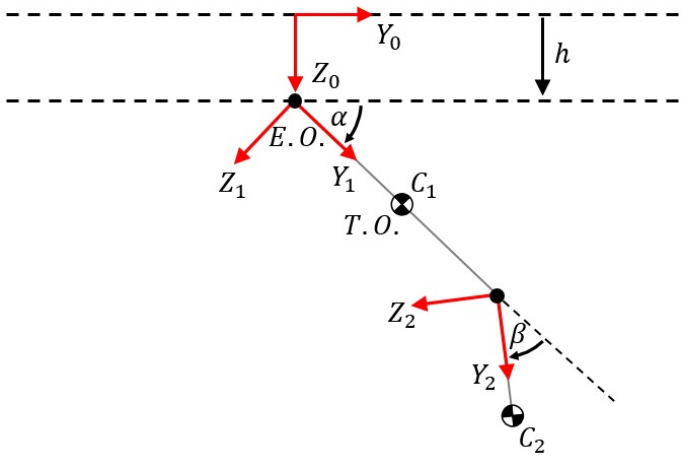


Obrázek 2.4: Kóty profilu

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}; \qquad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Pravá strana rovnice 2.12 je rovna nekonzervativním zobecněným silám Q_i, konkrétní síle působící na křídlo F_h, momentu M_α, působící na křídlo a M_β, což je moment působící na kormidlo. Dále je uvažováno tlumení úměrné zobecněným rychlostem charakterizované konstantou c_h, c_α, c_β, Zobecněné síly lze psát jako vektor 2.15

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_h - c_h\dot{h} \\ M\alpha - c_\alpha\dot{\alpha} \\ M\beta - c_\beta\dot{\beta} \end{bmatrix}; \tag{2.15}$$



Obrázek 2.5: Konfigurace systému

Lagrangian $\mathcal{L}$ je roven rozdílu sumy kinetických a sumy potenciálních energií v systému. V tomto případě se jedná o kinetickou translační energii T_{tr1} těžiště c_1, kinetickou rotační energii T_{rot1} těžiště c_1 a kinetické energie těžiště c_2, těmi jsou T_{tr2} a T_{rot2}. Z hlediska studie aeroelastických jevů není třeba uvažovat působení gravitační síly, z tohoto důvodu budou potenciální energie tvořit pouze členy odpovídající tuhostem. Potenciální energie křídla bude značena U_1 a potenciální energie křidélka U_2. Lagrangian se rozepíše jako 2.16.

$$\mathcal{L} = T - U = (T_{tr1} + T_{tr2} + T_{rot1} + T_{rot2}) - (U_1 + U_2) \tag{2.16}$$

Energie v systému popisují vztahy 2.17 až 2.22,

$$T_{tr1} = \frac{1}{2} m_1 (v^0_{0c_1})^T v^0_{0c_1} \tag{2.17}$$

$$T_{tr2} = \frac{1}{2} m_2 (v^0_{0c_2})^T v^0_{0c_2} \tag{2.18}$$

$$T_{rot1} = \frac{1}{2} (\omega^1_{01})^T I^1_1 \omega^1_{01} \tag{2.19}$$

$$T_{rot2} = \frac{1}{2} (\omega^2_{02})^T I^2_2 \omega^2_{02} \tag{2.20}$$

$$U_1 = \frac{1}{2} k_h h^2 + \frac{1}{2} k_\alpha \alpha^2 \tag{2.21}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} k_\beta \beta^2 \tag{2.22}$$

kde m_1 je hmotnost křídla bez kormidla, m_2 je hmotnost samotného kormidla, I^1_1, I^2_2 jsou tenzory setrvačnosti vzhledem k daným souřadnicovým systémům, k_h je vertikální tuhost křídla, k_α je torzní tuhost křídla a k_β je tuhost řízení (tuhost neřízeného křidélka). Vzhledem k uvažování rotace vždy

jen kolem jedné osy, z tenzorů setrvačnosti se uplatní pouze prvek na diagonále odpovídající dané ose, ty označíme jako j_1, což je moment setrvačnosti samotného křídla a j_2 představující moment setrvačnosti kormidla.

Vektory translačních v_{nl}^m a vektory úhlových ω_{nl}^m rychlostí budou odvozeny následně. Index m označuje v jaké souřadné soustavě je vektor vyjádřen, spodní index l specifikuje bod, kterého se vektor týká a spodní index n určuje soustavu, vůči které je vektor vyjádřen. Toto značení bude dodrženo i dále. Pro stanovení translačních rychlostí nalezneme potřebné polohové vektory a rotační matice, kterými vektory transformujeme do potřebných souřadných soustav, podrobnější informace o souřadných soustavách a transformacích mezi nimi je možné nalézt v [BM07].

$$r_{12}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ l \\ 0 \end{bmatrix}, r_{1c_1}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c_1} \\ 0 \end{bmatrix}, r_{1c_2}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \omega_{01}^1 = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \omega_{12}^2 = \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Úhlovou rychlost ω_{02}^2 můžeme složit jako součet úhlových rychlostí $\omega_{02}^2 = \omega_{12}^2 + \omega_{01}^1$. Potřebné rotační matice jsou 2.24.

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \qquad R_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Odvození polohových vektorů těžiště c_1 a c_2 vůči referenčnímu souřadnicovému systému S_0 popisují vztahy 2.25, 2.26.

$$r_{0c_1}^0 = R_1^0 r_{1c_1}^1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

$$r_{0c_2}^0 = R_1^0 r_{12}^1 + R_1^0 R_2^1 r_{2c_2}^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

Translační rychlosti, potřebné pro výpočet kinetických energií je možné získat derivací 2.25, 2.26,

$$v_{0c_1}^0 = \dot{r}_{0c_1}^0, v_{0c_2}^0 = \dot{r}_{0c_2}^0. \tag{2.27}$$

Dosazením všech energií do vztahu 2.16 a 2.12, získáme trojici diferenciálních rovnic ve tvaru

$$eq_1(h, \dot{h}, \ddot{h}, \alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}) = F_h, \tag{2.28}$$

$$eq_2(h, \dot{h}, \ddot{h}, \alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}) = M_\alpha, \tag{2.29}$$

$$eq_3(h, \dot{h}, \ddot{h}, \alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}) = M_\beta, \tag{2.30}$$

které obecně obsahují stavové veličiny h, α, β ve druhých derivacích podle času. Rovnice je třeba vyřešit pro vyčíslení těchto druhých derivací, tím získáme 2.31, 2.32 a 2.33.

$$\ddot{h} = eq_h(h, \dot{h}, \alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, F_h, M_\alpha, M_\beta) \tag{2.31}$$

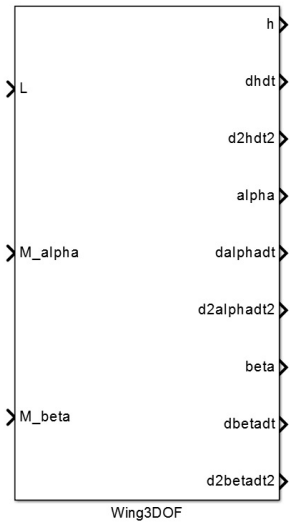
$$\ddot{\alpha} = eq_\alpha(h, \dot{h}, \alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, F_h, M_\alpha, M_\beta) \tag{2.32}$$

$$\ddot{\beta} = eq_\beta(h, \dot{h}, \alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, F_h, M_\alpha, M_\beta) \tag{2.33}$$

Diferenciální rovnice druhého řádu nejsou vhodné pro další práci, jelikož bude použit solver, který pracuje se soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu. Zavedení substitucí $x_1 = \dot{h}$, $x_2 = h$, $x_3 = \dot{\alpha}$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \dot{\beta}$ a $x_6 = \beta$ umožní přepsání rovnic do tvaru,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= eq_h(h, \dot{h}, \alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, F_h, M_\alpha, M_\beta), \\
\dot{x}_2 &= x_1, \\
\dot{x}_3 &= eq_\alpha(h, \dot{h}, \alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, F_h, M_\alpha, M_\beta), \\
\dot{x}_4 &= x_3, \\
\dot{x}_5 &= eq_\beta(h, \dot{h}, \alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, F_h, M_\alpha, M_\beta), \\
\dot{x}_6 &= x_5.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Soustava diferenciálních rovnic prvního řadu 2.34 byla implementována jako S-funkce v Matlabu, obrázek 2.6. Do tohoto subsystému vstupují F_h, M_α, M_β a výstupem jsou signály $h, \dot{h}, \ddot{h}, \alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}$.



Obrázek 2.6: S-funkce dynamiky křídla

2.3 Model servomotoru

Akčním členem na křídle je řízené křidélko ovládaná servomotorem. Uvažovaný servomotor obsahuje vlastní regulátor, který zajišťuje nastavení požadované výchylky servomotoru podle referenční hodnoty γ_{ref}. Pro jednoduchost bude dynamika serva aproximována systémem druhého řádu bez nul 2.35. Později bude vhodné mít k dispozici nejenom výstup γ, ale i úhlovou rychlost $\dot{\gamma}$ a úhlové zrychlení $\ddot{\gamma}$, z tohoto důvodu bude přenosová funkce H_γ převedena do tvaru diferenciální rovnice.

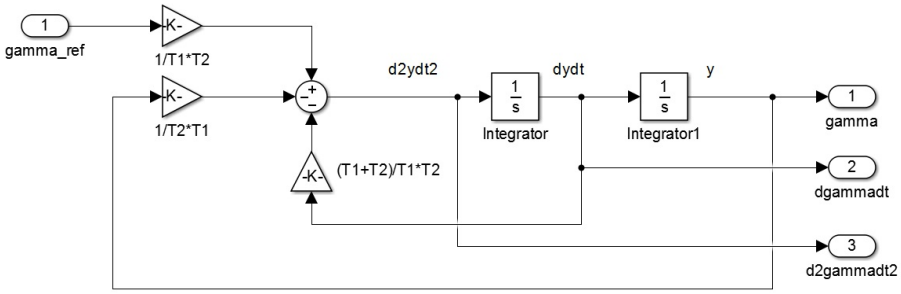
$$H_{servo} = \frac{k}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} = \frac{k}{T_1 T_2 s^2 + (T_1+T_2)s + 1} = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{2.35}$$

$$Y(s)\left(T_1 T_2 s^2 + (T_1+T_2)s + 1\right) = kU(s) \tag{2.36}$$

Zpětnou Laplaceovou transformací rovnice 2.36 získáme diferenciální rovnici druhého řádu 2.37. Systém je natolik jednoduchý, že se ho vyplatí implementovat například jako schéma v Simulinku obrázek 2.7, namísto S-funkce.

$$\ddot{y}(t)(T_1 T_2) + \dot{y}(t)(T_1+T_2) + y(t) = ku(t) \tag{2.37}$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{T_1 T_2}u(t) - \frac{T_1+T_2}{T_1 T_2}\dot{y}(t) - \frac{1}{T_1 T_2}y \tag{2.38}$$



Obrázek 2.7: Schéma dynamiky servomotoru

2.4 Nestacionární aerodynamika

Tato část je věnována modelování nestacionární aerodynamiky, která hraje významnou roli v působení aeroelastických jevů. Pojmem nestacionární je zde myšlen fakt, že síly a momenty, které na těleso, v tomto případě křídlo nebo kormidlo působí, nejsou funkcí pouze úhlu náběhu a rychlosti proudu, který těleso obtéká, ale také rychlostí a zrychlení. Velký podíl na rozvoji nestacionární aerodynamiky má Theodorsen, který mimo jiné, odvodil působení sil a momentů na kmitající profil s křidélkem [The35]. Proud, který

profil obtéká, je modelován pomocí Kutta Joukowského transformace, ta transformuje potenciální proud obtékající kruh na proud obtékající profil. Dále je předpokládán harmonický pohyb profilu. Theodorsen ukázal, že vztlak v důsledku cirkulace je funkcí redukované frekvence k,

$$k = \frac{\omega b}{V}, \tag{2.39}$$

kde ω značí úhlovou frekvenci, b je polovina hloubky profilu a V je rychlost proudu. Vliv úplavu popisuje Theodorsenova funkce $C(k)$ 2.40, závislá právě na redukované frekvenci. Rozšíření Theodorsenových výsledků zajistil Garrick [Gar36] nalezením vztahu pro axiální silu generovanou profilem s křidélkem v nestacionárním proudu. Garric také ukázal vzah mezi Theodorsenovou, Wagnerovou a Kussnerovou funkcí [Gar38]. Funkce 2.40 může být také rozepsaná do tvaru s Hankelovou funkcí.

$$C(k) = F(k) + jG(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + jH_0^{(2)}(k)} \tag{2.40}$$

Vztahy pro vztlakovou sílu a momenty (2.41, 2.42, 2.43) zde nebudou podrobněji odvozeny, důkladnější popis této problematiky je možné nalézt v [The35] nebo [Wal09].Konstanty T_x označují Theodorsenovy konstanty, které lze vypočítat podle vztahů 2.44.

$$\begin{aligned} L(t) = &- \rho b^2 \left(V\pi\dot{\alpha} + \pi\ddot{h} - \pi b a\ddot{\alpha} - VT_4\dot{\beta} - T_1 b\ddot{\beta} \right) \\ &- 2\pi\rho V b C(k)[V\alpha + \dot{h} + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} + \frac{1}{\pi}T_{10}V\beta \\ &+ b\frac{1}{2\pi}T_{11}\dot{\beta}] \end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned} M_\alpha(t) = &- \rho b^2[-\pi a b\ddot{h} + \pi b^2\left(\frac{1}{8} + a^2\right)\ddot{\alpha} - b^2\left(T_7 + (c-a)T_1\right)\ddot{\beta} \\ &+ \pi b V\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} + bV\left(T_1 - T_8 - (c-a)T_4 + \frac{1}{2}T_{11}\right)\dot{\beta} \\ &+ \left(T_4 + T_{10}\right)V^2\beta] + 2\pi\rho b^2 V\left(\frac{1}{2} + a\right)C(k)[V\alpha + \dot{h} \\ &+ b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} + \frac{1}{\pi}T_{10}V\beta + b\frac{1}{2\pi}T_{11}\dot{\beta}] \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned} M_\beta(t) = &- \rho b^2[-bT_1\ddot{h} + 2b^2T_{13}\ddot{\alpha} - \frac{1}{\pi}b^2T_3\ddot{\beta} - Vb\left(2T_9 + T_1 - T_4\left(\frac{1}{2} - a\right)\right)\dot{\alpha} \\ &- \frac{1}{2\pi}VbT_4T_{11}\dot{\beta} + \frac{1}{\pi}V^2\left(T_5 - T_4T_{10}\right)\beta] - \rho b^2 V T_{12}C(k)[V\alpha + \dot{h} \\ &+ b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} + \frac{1}{\pi}T_{10}V\beta + b\frac{1}{2\pi}T_{11}\dot{\beta}] \end{aligned} \tag{2.43}$$

$$
\begin{aligned}
T_1 =& -\frac{1}{3}\sqrt{1-c^2}(2+c^2) + c\arccos(c)\\
T_2 =& c(1-c^2) - \sqrt{1-c^2}(1+c^2)\arccos(c) + c(\arccos(c))^2\\
T_3 =& -\left(\frac{1}{8}+c^2\right)(\arccos(c))^2 + \frac{1}{4}c\sqrt{1-c^2}\arccos(c)(7+2c^2) - \frac{1}{8}(1-c^2)(5c^2+4)\\
T_4 =& -\arccos(c) + c\sqrt{1-c^2}\\
T_5 =& -(1-c^2) - (\arccos(c))^2 + 2c\sqrt{1-c^2}\arccos(c)\\
T_6 =& T_2\\
T_7 =& -\left(\frac{1}{8}+c^2\right)\arccos(c) + \frac{1}{8}c\sqrt{1-c^2}(7+2c^2)\\
T_8 =& -\frac{1}{3}\sqrt{1-c^2}(2c^2+1) + c\arccos(c)\\
T_9 =& \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(\sqrt{1-c^2}\right)^3 + aT_4\right]\\
T_{10} =& \sqrt{1-c^2} + \arccos(c)\\
T_{11} =& \arccos(c)(1-2c) + \sqrt{1-c^2}(2-c)\\
T_{12} =& \sqrt{1-c^2}(2+c) - \arccos(c)(2c+1)\\
T_{13} =& \frac{1}{2}\left[-T_7 - (c-a)T_1\right]
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

Z teorie tenkého profilu a vzhledem k linearitě potenciálního proudění lze rovnice 2.41 až 2.43 superponovat ze dvou částí. První část popisuje obtékání bez cirkulace a druhá část obtékání s cirkulací. Obtékání bez cirkulace je modelováno rozmístěním aerodynamických zdrojů a propadů. Aby byla zajištěna Kuttova podmínka na odtokové hraně, která říká, že pro daný úhel náběhu se hodnota cirkulace vektoru rychlosti nastaví tak, aby proud tekutiny opouštěl odtokovou hranu hladce ve směru střední čáry profilu, je nutné zavést i obtékání s cirkulací, modelované rozmístěním vírů. Nutnost zavedení Kuttovy podmínky vyplývá z použití Joukowského transformace, která je čistě matematickou metodou, nerespektující fyzikální jevy spojené se změnou tvaru. Vztahy 2.41 až 2.43 je možné zapsat jako 2.45 až 2.47

$$L(t) = L_c(t) + L_{nc}(t), \tag{2.45}$$

$$M_\alpha(t) = M_{\alpha c}(t) + M_{\alpha nc}(t), \tag{2.46}$$

$$M_\beta(t) = M_{\beta c}(t) + M_{\beta nc}(t), \tag{2.47}$$

kde index c označuje část s cirkulací a nc část bez cirkulace. Zavedení substituce $Q(t)$ 2.48 dovolí zapsání rovnic 2.49, 2.50 a 2.51.

$$Q(t) = \dot{h} + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} + \frac{1}{2\pi}bT_{11}\ddot{\beta} + V\alpha + \frac{1}{2}T_{10}V\beta \tag{2.48}$$

$$L_c(t) = -2\pi\rho b C(k) Q(t) \tag{2.49}$$

$$M_{\alpha c}(t) = 2\pi\rho b^2 C(k) Q(t) \tag{2.50}$$

$$M_{\beta c}(t) = -\rho b^2 V T_{12} C(k) Q(t) \tag{2.51}$$

$$L_{nc}(t) = -\rho b^2 \left(\pi\ddot{h} - \pi b a\ddot{\alpha} - bT_1\ddot{\beta} + V\pi\dot{\alpha} - VT_4\dot{\beta}\right) \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned} M_{\alpha nc}(t) = &- \rho b^2[-\pi a b\ddot{h} + \pi b^2\left(\frac{1}{8} + a^2\right)\ddot{\alpha} - b^2\left(T_7 + (c-a)T_1\right)\ddot{\beta} + \\ &\pi b V\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} + bV\left(T_1 - T_8 - (c-a)T_4 + \frac{1}{2}T_{11}\right)\dot{\beta} + \\ &\left(T_4 + T_{10}\right)V^2\beta] \end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned} M_{\beta nc}(t) = &- \rho b^2[-bT_1\ddot{h} + 2b^2T_{13}\ddot{\alpha} - \frac{1}{\pi}b^2T_3\ddot{\beta} - Vb\left(2T_9 + T_1 - T_4\left(\frac{1}{2} - a\right)\right) \\ &\dot{\alpha} - \frac{1}{2\pi}VbT_4T_{11}\dot{\beta} + \frac{1}{\pi}V^2\left(T_5 - T_4T_{10}\right)\beta] \end{aligned} \tag{2.54}$$

V rovnicích pro obtékání s cirkulací se vyskytuje Theodorsenova funkce 2.40, podle [WC07] je možné $C(k)$ aproximovat komplexní funkcí 2.55

$$C(k) = 1 - \frac{0.165}{1 - \frac{0.045}{k}j} - \frac{0.335}{1 - \frac{0.30}{k}j}, \tag{2.55}$$

pro $k \leq 0.5$ a funkcí 2.57

$$C(k) = 1 - \frac{0.165}{1 - \frac{0.041}{k}j} - \frac{0.335}{1 - \frac{0.32}{k}j}, \tag{2.56}$$

pro $k > 0.5$.

Tato komplexní funkce zajišťuje změnu amplitudy a fáze v závislosti na redukované frekvenci. Dosazením 2.39 do 2.55 je možné $C(k)$ zapsat jako

$$C(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + 0.2804Vbj\omega + 0.0135V^2}{b^2(j\omega)^2 + 0.345Vbj\omega + 0.0135V^2}. \tag{2.57}$$

Zavedením komplexní proměnné „s“ je odvozena přenosová funkce 2.58.

$$C(s) = \frac{s^2 + 0.2804Vbs + 0.0135V^2}{b^2s^2 + 0.345Vbs + 0.0135V^2} \tag{2.58}$$

Výsledek 2.58 je možné využít pro sestavení modelu aeroelastického křídla, například jako přenosovou funkce v Simulinku, nicméně bude upraven do tvaru stavového popisu a sestaven jako schéma v Simulinku. Popis dynamiky schématem umožní snadné získání obou stavů systému. Do získaného

subsystému vstupuje signál vypočtený podle rovnic $\frac{L_c(t)}{C(k)}$, $\frac{M_{\alpha c}(t)}{C(k)}$ a $\frac{M_{\beta c}(t)}{C(k)}$ a výstupem je 2.49, 2.50 nebo 2.51 podle vstupujícího signálu a také oba stavy filtru 2.58. Systém je parametrizovaný rychlostí V. Následující postup naznačí, jak lze filtr převést do tvaru kanonické formy řiditelnosti 2.60. Podrobnější informace na toto téma je možné nalézt v [AM07].

$$\begin{aligned} C(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{n_2 s^2 + n_1 s + n_0}{d_2 s^2 + d_1 s + d_0} = \frac{n_2}{d_2} + \frac{(n_1 - l_1)s + (n_0 - d_0)}{d_2 s^2 + l_1 s + d_0} \\ &= \frac{n_2}{d_2} + \frac{\frac{n_1 - l_1}{d_2} s + \frac{n_0 - l_0}{d_2}}{s^2 + \frac{d_1}{d_2} s + \frac{d_0}{d_2}}, \qquad l_0 = \frac{n_0 - d_2}{d_2}, l_1 = \frac{n_1 - d_2}{d_2} \end{aligned} \tag{2.59}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{d_1}{d_2} & -\frac{d_0}{d_2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} \frac{n_1 - l_1}{d_2} & \frac{n_0 - l_0}{d_2} \end{bmatrix} x + \frac{n_2}{d_2} u \tag{2.60}$$

Porovnáním 2.58 a 2.59 jsou získány potřebné koeficienty, ty dává do rovnosti následující tabulka.

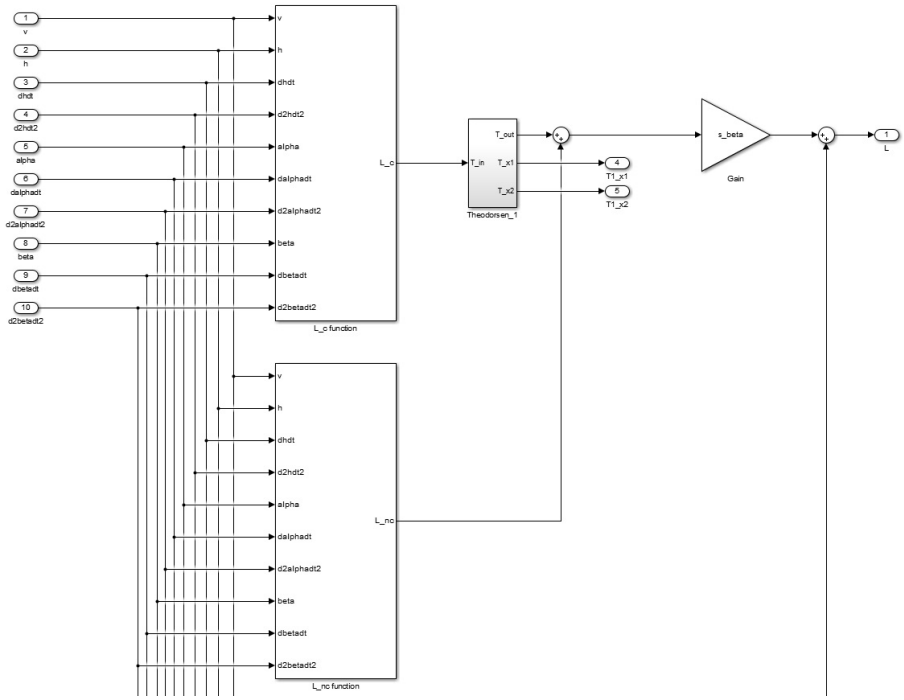
Koeficient	Hodnota	Koeficient	Hodnota
n_0	$0.0135V^2$	d_0	$0.0135V^2$
n_1	$0.2804Vb$	d_1	$0.0345Vb$
n_2	$0.5b^2$	d_2	b^2

Tabulka 2.1: Koeficienty přenosu

Na základě získaných vztahů je sestaven blok aerodynamiky, obrázek 2.8. Princip sestavení bloku bude vysvětlen na vztlakové síle, která je jedním z výstupů tohoto subsystému, ostatní výstupy se získají stejným způsobem. Na rovnici 2.52 je možné nahlížet jako na blok, v tomto případě jako na S-funkci v Simulinku, do které vstupují veličiny $\ddot{h}$, $\ddot{\beta}$ a podobně. Výstupem bloku je samotné $L_{nc}(t)$, pro získání síly $L(t)$ je nutné postupovat podle 2.45, tedy sečíst výstupní signál bloku popisující obtékání bez cirkulace se signálem $L_c(t)$. Signál $L_c(t)$ se získá sériovým spojením bloku s rovnicí $\frac{L_c(t)}{C(k)}$ a bloku Theodorsenovy funkce.

2.5 Propojení subsystémů

V předchozím textu této kapitoly bylo vysvětleno sestavení jednotlivých bloků, z kterých bude model aeroelastického křídla sestaven. Tato část popisuje propojení těchto subsystémů, výsledkem je modele aeroelastického křídla z obrázku 2.1. Jedno křidélko představuje řídicí plochu ovládanou pilotem s určitou tuhostí řízení, druhé je součástí systému pro tlumení aeroelastických jevů, zejména flutteru a je řízeno servomotorem. Křídlo uvažuje možnost

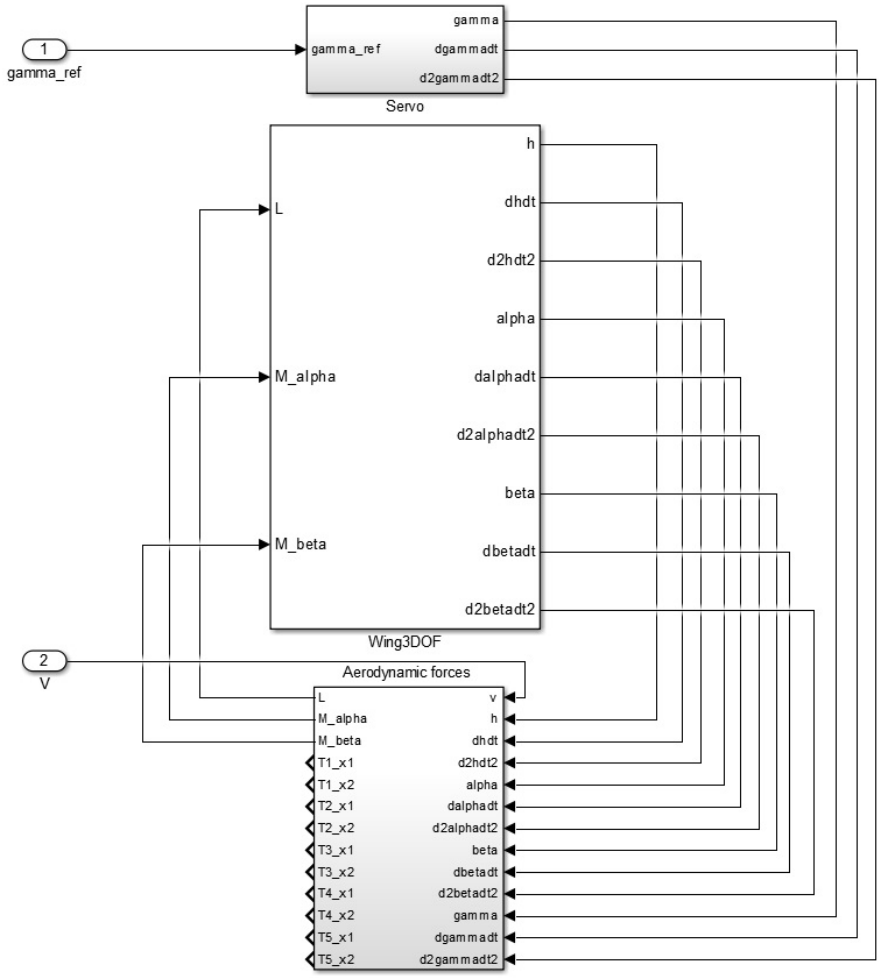


Obrázek 2.8: Část bloku aerodynamiky

vertikálního pohybu a rotace kolem elastické osy. Důležitou poznámkou je, že každé z křidélek má polovinu délky křídla a neuvažuje se aerodynamická interakce mezi křidélky. Tudíž je možné využít princip superpozice a výsledné síly a momenty brát jako poměrný součet příspěvků od obou křidélek. Křídlo je jednotkové délky a neuvažuje vyrovnávání tlaků na konci křídla. Křidélko, které je akčním členem tlumícího systému, je uvažováno absolutně tuhé a řízené servomotorem s převodovým poměrem jedna ku jedné. S ohledem na tyto předpoklady je možné výstupy bloku servomotoru prohlásit přímo za stavy a derivaci stavu řízeného křidélka. Obě křidélka generují sílu a moment působící na křídlo skrze stejné rovnice ze sekce 2.4, proto bude využito totožných bloků L a M_α jenom s tím rozdílem, že vstupující vektory do zmíněných bloků budou v jednom případě obsahovat signály $\beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}$ a v druhém $\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}$. Výsledná síla a moment se získá sečtením signálů v daném poměru. Přidáním subsystému pro výpočet M_β je blok aerodynamiky hotov. Konečný model tvoří vzájemně propojené bloky servomotoru, aerodynamiky a mechaniky křídla. Schéma ilustruje obrázek 2.9.

2.6 Parametry systému

Předchozí část byla věnována modelovaní aeroelastického křídla, konkrétní hodnoty parametrů ovšem zmíněny nebyly. Zde budou specifikovány parametry, s kterými je model využíván v celé této práci. Hodnoty včetně popisů a fyzikálních jednotek uvádí tabulka 2.2.



Obrázek 2.9: Blokové schéma systému

Parametr	Hodnota	Jednotky	Popis
a_c	0.253	m	Vzdálenost elastické osy od osy rotace kormidla
a_α	0.147	m	Vzdálenost těžiště od elastické osy
a_β	0.086	m	Vzdálenost těžiště kormidla od osy rotace
j_1	0.3987	$\mathrm{kg\,m^2}$	Moment setrvačnosti křídla bez kormidla
j_2	0.046	$\mathrm{kg\,m^2}$	Moment setrvačnosti kormidla
m_1	5.814	kg	hmotnost křídla bez kormidla
m_2	1	kg	hmotnost kormidla
k_h	176300	N/m	Vertikální tuhost křídla
k_α	35066	N/m	Torzní tuhost křídla
k_β	340.846	N/m	Tuhost řízení
c_h	0	N	Vertikální tlumení křídla
c_α	0	N	Torzní tlumení křídla
c_β	0	N	Tlumení v řízení
b	0.475	m	Polovina hloubky profilu
a	-0.2189	m	Vzdálenost elastické osy od b
c	0.5242	m	Vzdálenost uchycení kormidla od b
ρ	1.29	$\mathrm{kg/m^3}$	Hustota vzduchu
s_β	0.5	$\frac{1}{100}\%$	Poměr délky neřízeného kormidla k řízené
T_1	0.01	–	Parametr serva
T_2	0.01	–	Parametr serva

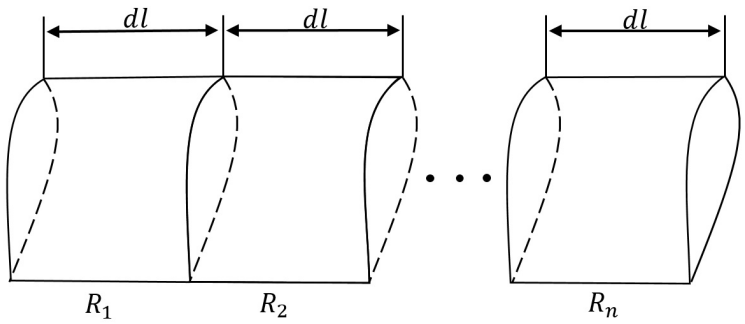
Tabulka 2.2: Parametry systému

Kapitola 3

Model aeroelastického křídla jako systému s rozprostřenými parametry

Model s rozprostřenými parametry, dále DPM (Distributed-Parameter Models), je model uvažující jako nezávislou proměnnou kromě času i jiné veličiny, typicky Kartézské souřadnice x, y, a z. To se projeví v rovnicích, které takový systém popisují, nejedná se už o ODE (Ordinary Differential Equations), ale o parciální diferenciální rovnice. Veškeré fyzikální systémy jsou distribuované v prostoru, proto je přirozené je tak i modelovat, často ale model s distribuovanými parametry nemusí znamenat přesnější model daného systému nebo může být takový model zbytečně komplikovaný. Komplexitě modelu odpovídá i náročnost práce s modelem, časová náročnost simulací a podobně. Oproti modelům s „centralizovanými parametry“, dále pouze LM (Lumped Model) je u DPM možné pozorovat jevy, které LM nevykazují, jako je například vlnění, více v [Bro06] a [DCK12].

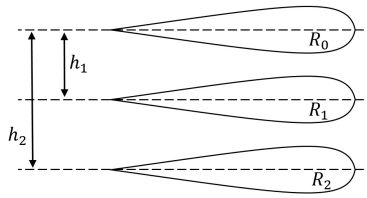
Složitý DPM je často popisován jako síť jednodimenzionálních modelů spojených jednoduchou vazbou. Každý jednotlivý model tak popisuje určitý element systému. Stejný princip bude použit i zde a jako stavební blok poslouží již odvozené modely. Obrázek 3.1 naznačuje křídlo složené z profilových řezů $R_1, R_2, \cdots, R_n$ o šířce profilu dl, limitně jdoucí k nule. K sestavení křídla z obrázku 2.1 je zapotřebí dvou typů profilových řezů, jedním je profil s volným křidélkem a druhý je profil s řízeným křidélkem.



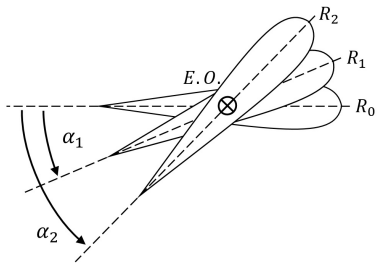
Obrázek 3.1: Profilové řezy křídla

Profily popisují veličiny $dm_1, dm_2, dj_1, dj_2, dk_h, dk_\alpha, dk_\beta dc_h, dc_\alpha, dc_\beta$, jedná se o elementy veličin, stejných jako v kapitole 2, ostatní veličiny (hloubka

profilu, atd.) jsou totožné. Každý element křídla popisuje soubor stavových veličin indexovaných podle umístění řezu v křídle. Index u kořene křídla je roven jedné a směrem od trupu roste. Stavové veličiny jsou kótovány vůči jedné referenční soustavě umístěné na začátku křídla, jde tedy o absolutní hodnoty. Situaci znázorňují obrázky sousedních řezů 3.2, 3.3. Obrázky také naznačují, že úhel křidélka je kótován vzhledem k tětivě profilu, to znamená, že zkroucení křidélka bude respektovat zkroucení daného profilového řezu a navíc bude ovlivněno polohou sousedních křidélek. Tím se text dostává k otázce vazeb mezi jednotlivými elementy. Elementární tuhosti dk_h, dk_α a tlumení dc_h, dc_α, působí vždy mezi dvěma řezy. Pro vertikální souřadnici (h_i) je jednoduchou analogií soustava hmot, tuhostí a tlumení, kde paralelní kombinace tuhostí a tlumení propojuje hmoty mezi sebou.



Obrázek 3.2: Translace profilových řezů



Obrázek 3.3: Rotace profilových řezů

Vazba mezi sousedními řezy křidélka nemá v LM analogii, jelikož se k_β i c_β týkají vlastností řízení, nikoli křídla. Vazba mezi řezy kormidla bude doplněna dodatečně a bude se skládat z tuhosti k_a a tlumení c_a. Odvození DMP pro část s neřízeným křidélkem a s řízeným jsou velice podobné, proto bude popsána pouze jedna část.

3.1 Interakce mezi řezy křídla

Koncept modelu i princip vazeb mezi řezy byl již vysvětlen, nyní bude pozornost zaměřena na interakci profilových řezů, z kterých je model křídla sestaven. Jako ukázka bude využit systém hmot, pružin a tlumení, kde z rovnosti sil je možné systém popsat soustavou rovnic 3.1.

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 + [k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)] + F_1 \\
m_2\ddot{x}_2 &= -k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\
&\quad + [k_3(x_3 - x_2) + c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)] + F_2 \\
&\vdots \\
m_{n-1}\ddot{x}_{n-1} &= -k_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) - c_{n-1}(\dot{x}_{n-1} - \dot{x}_{n-2}) \\
&\quad + [k_n(x_n - x_{n-1}) + c_n(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1})] + F_{n-1} \\
m_n\ddot{x}_n &= -k_n(x_n - x_{n-1}) - c_n(\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}) + F_n
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Každý řádek soustavy si je možné představit jako model jedné hmoty, tuhosti a tlumení, které jsou „někde“ umístěny a působí na ně „nějaké“ síly. K objasnění slov v uvozovkách poslouží rovnice přepsané do tvaru 3.5, obecně s funkcemi $\mathcal{M}_i$ a $\mathcal{F}_i$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_1\ddot{x}_1 &= \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 + F_1 \\
\mathcal{M}_2\ddot{x}_2 &= \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_3 + F_2 \\
&\vdots \\
\mathcal{M}_{n-1}\ddot{x}_{n-1} &= \mathcal{F}_{n-1} - \mathcal{F}_n + F_{n-1} \\
\mathcal{M}_n\ddot{x}_n &= \mathcal{F}_n + F_n
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Síly F_i představují externí síly, které mohou do systému vstupovat a působit na každou hmotu s indexem i. Síly $\mathcal{F}_i$ zase představují síly, zapříčiněné přítomností tuhostí a tlumením. Propojení systémů, respektive vazby mezi dílčími systémy ukrývají právě funkce $\mathcal{F}_i$. Vazbu mezi i-tým prvkem a prvkem s indexem $i+1$ představuje funkce $\mathcal{F}_{i+1}$, naproti tomu funkce $\mathcal{F}_i$ ukrývá relativní souřadnice a relativní rychlosti mezi prvkem i a $i+1$, a tím vytváří vazbu mezi těmito prvky. Stejný princip využije i model křídla.

3.2 Úprava modelu se třemi stupni volnosti

K modelování křídla je možné využít vhodně propojené modely profilových řezů, proč tedy nevyužít již vytvořený model křídla z předchozí kapitoly, který by s upravenými parametry tvořil právě jeden element DPM. Propojením dostatečného množství bloků obsahující zmíněný model, by vznikl model nový, tentokrát závislý na čase i poloze řezu. Aby bylo propojení možné, musí se do bloku s modelem přidat příslušné vstupy a výstupy.

Potřebná rozhraní vychází z uspořádání elementů a názorně vystupují v popisu 3.1 a 3.5. Pro i-ty člen jsou novými vstupy stavy prvku $i-1$. Po substituci, kde jsou nové stavy i-tého členu označená stříškou vzniknou stavy $\hat{s}_i = s_i - s_{i-1}$. Dosazením stavů $\hat{s}$ do rovnic 2.31 a 2.32 bude zajištěna vazba v torzi a translaci elementů i a $i-1$. Inspiraci pro získání vazby členů i a $i+1$ pro i-tý profilový řez přináší příklad s rovnicí 3.5, kde vazbu realizuje síla $\mathcal{F}_{i+1}$, kterou lze vyjádřit z rovnice prvku $i+1$. Model z kapitoly 2, ale není

tak triviální jako v příkladu a z jeho rovnic není jasné, co je právě touto sílou/momentem. Navíc jsou rovnice ve tvaru

$$\ddot{x}_i = eq_{xi}, \tag{3.3}$$

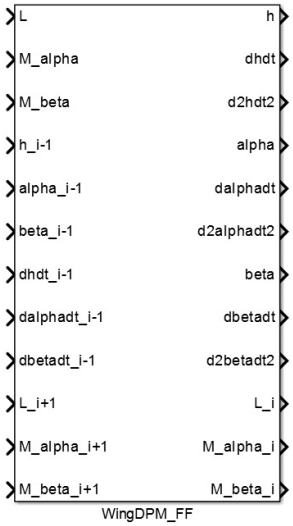
který situaci ještě komplikuje. Řešením je upravit rovni do tvaru

$$\ddot{x}_i = \mathcal{S}_i - \mathcal{S}_{i+1} + \mathcal{H}_i F_i, \tag{3.4}$$

a následně jí vydělit $\mathcal{H}_i$. Pak už je možné pro i-tý blok psát,

$$\mathcal{F}_i = \frac{\ddot{x}_i}{\mathcal{H}_i} - F_i + \mathcal{F}_{i+1}. \tag{3.5}$$

Síla $\mathcal{F}_{i+1}$ byla získána zpětnou vazbou z následujícího bloku. Upravený blok je na obrázku 3.4.



Obrázek 3.4: Upravený blok dynamiky křídla

3.3 Propojení dílčích elementů

Moment M_{β_i} bude počítán mimo bloky a to podle vztahu

$$M_{\beta_i} = dk_a(\beta_{i+1} - \beta_i) - dk_a(\beta_i - \beta_{i-1}) + dc_a(\dot{\beta}_{i+1} - \dot{\beta}_i) - dc_a(\dot{\beta}_i - \dot{\beta}_{i-1}). \tag{3.6}$$

Model elastického křídla je nutné ještě doplnit o aerodynamiku, princip je opět totožný jako v kapitole 2 s rozdílem ve velikosti síly a momentů, které jsou blokem generovány. Aerodynamické síly a momenty totiž odpovídají jednotkovému rozpětí křídla. Aby byly hodnoty korektní, musí se vydělit konstantou $r = \frac{n}{l}$, kde n je počet uvažovaných elementů a l je délka křídla s těmito elementy.

Část II

Analýza Modelu

Kapitola 4

Analýza aeroelastického křídla se třemi stupni volnosti

V kapitola 2 byl odvozen model aeroelastického křídla se třemi stupni volnosti a řídicím křidélkem, zde bude tento systém analyzován. Jelikož se jedná o složitý nelineární systém, u kterého by analýza byla velice komplikovaná, bude provedena jeho linearizace a analyzován tento linearizovaný model. Nelineární systém můžeme popsat soustavou rovnic 4.1

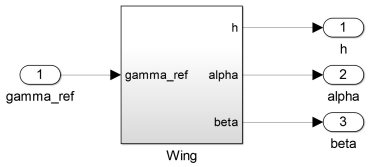
$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u) \\ y &= g(t, x, u) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Linearizaci a získání stavového popisu ve tvaru 4.2, se nalezne derivací funkcí podle příslušných proměnných 4.3, Podrobnější informace o linearizaci je možné vyhledat v [AM07].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \end{bmatrix}; \\ C &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \end{bmatrix}; \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Díky implementaci modelu v Simulinku je linearizace možná pouze zadefinováním příslušných vstupů a výstupů a použitím funkce „linmode“. Nebude-li uvedeno jinak, jedná se o linearizaci v nulovém pracovním bodě. Systém je parametrizovaný rychlostí V a s ohledem na tento parametr budou prováděny i linearizace pro konkrétní hodnoty parametru V. Systém, který byl získán linearizací je osmnáctého řádu, má jeden vstup (γ_{ref}) a tři výstupy (h, α, β), blok systému je na obrázku 4.1.



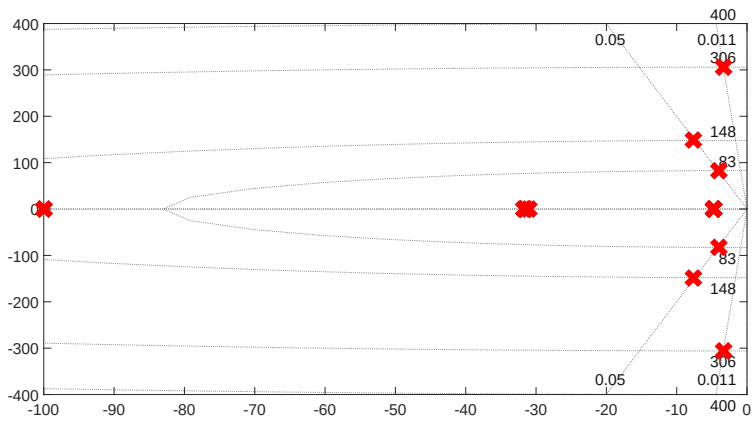
Obrázek 4.1: Model křídla se třemi výstupy

4.1 Analýza pólů systému

Z teorie lineárních systémů je možné využít analýzu v komplexní rovině. Jde o zkoumání polohy kořenů charakteristického polynomu $det(sI - A)$, respektive vlastních čísel matice systému (matice A), dále jen „pólů“ systému. Póly jsou nezávislé na maticích B a C, to znamená, že nezávisí na umístění aktuátorů nebo senzorů. Zkoumáním pólů je analyzována vnitřní dynamika systému, jsou to komplexní frekvence, které je systém schopen sám generovat (módy systému). Stručně lze říci, že pokud se pól nachází v levé komplexní polorovině, jedná se o stabilní systém, pokud v pravé, pak jde o nestabilní systém. Komplexně sdružené póly značí kmitavou odezvu. Podrobnější popis charakteru odezvy v závislosti na poloze pólů poskytuje [Nis11]. Komplexně sdružené kořeny mají hodnoty uvedené v tabulce.

4.1.1 Identifikace komplexně sdružených pólů

V systému aeroelastického křídla se třemi stupni volnosti se dají očekávat tři komplexně sdružené dvojice pólů (dále módy) a to z důvodu přítomnosti tuhosti a hmoty v každém stupni volnosti. S-rovina zkoumaného systému je na obrázku 4.2. Linearizace byla provedena pro rychlost 50m/s.



Obrázek 4.2: Komplexní rovina s póly systému pro linearizaci v 50m/s

Komplexně sdružený pól	Hodnota
p_1	$-3.36 \pm 306.21j$
p_2	$-7.62 \pm 148.32j$
p_3	$-4.02 \pm 82.93j$

Kořeny p_i se obecně zapíší jako $p_i = \sigma_i \pm j\omega_{d_i} = -\zeta_i\omega_{d_i} \pm j\omega_{n_i}\sqrt{1-\zeta_i^2}$, kde σ je frekvence exponenciálního tlumení, ω_d frekvence tlumených oscilací, ω_n přirozená frekvence a ζ je poměrné tlumení. Každá komplexní frekvence přísluší jednomu z módů aeroelastického křídla, určení těchto módů lze stanovit například pomocí vzorců 4.4 pro vlastní frekvence izolovaných kmitů soustavy.

$$\omega_h = \sqrt{\frac{k_h}{m_1+m_2}}; \qquad \omega_\alpha = \sqrt{\frac{k_\alpha}{j_1}}; \qquad \omega_\beta = \sqrt{\frac{k_\beta}{j_2}} \tag{4.4}$$

Po dosazení a vypočtení jsou získány přibližné frekvence uvedené v tabulce.

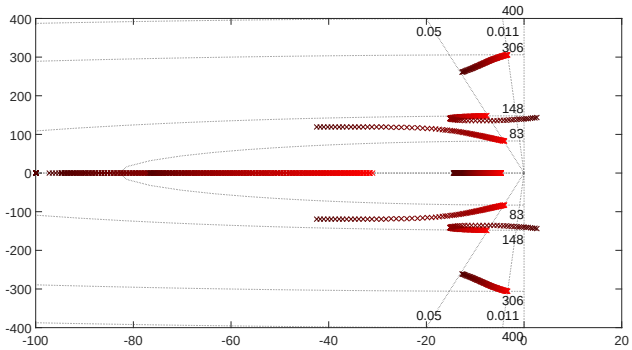
ω_h(rad/s)	ω_α(rad/s)	ω_β(rad/s)
160.84	296.56	86.08

Porovnáním hodnot z tabulky a imaginárních částí pólů je možné stanovit, že p_1 náležící frekvenci okolo 300 rad/s odpovídá ω_α, tedy krutu křídla. Další mód p_2 přísluší frekvenci ω_h, jde tedy o vertikální pohyb křídla. Poslední kořen p_3 s nejnižší frekvencí odpovídá ω_β, to znamená rotaci kormidla. Modální frekvence jsou mimo jiné závislé i na rychlosti V, proto bylo tvrzení ověřeno variací parametrů, zejména tuhostí, hmot a momentů setrvačností a kontrolou změny polohy pólů. Jednoduché pravidlo je, že snižováním tuhosti frekvence klesá, naopak snižováním momentu setrvačnosti respektive hmoty, frekvence roste.

4.1.2 Analýza změny dynamiky modelu v komplexní rovině v závislosti na rychlosti

Nyní se text zaměří na pozorování změny dynamiky v závislosti na rychlosti. To znamená, že budou provedeny linearizace systému na jednotlivých rychlostech a pro ně bude vykreslena poloha pólů v S-rovině. Rostoucí rychlost je v obrázku 4.3 naznačena postupně tmavnoucí červenou barvou. Systém byl linearizován od 50m/s do 150m/s.

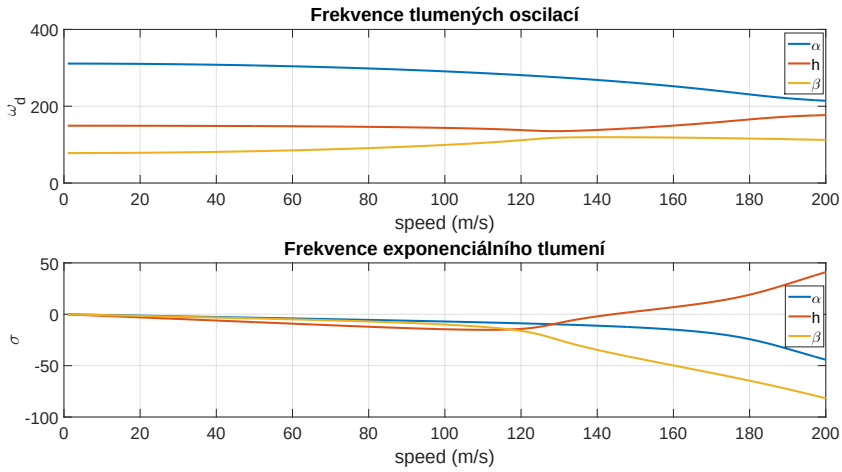
Graf 4.3 ukazuje, že systém se na určité rychlostí stává nestabilním. Za nestabilitou stojí mód vertikální výchylky křídla, která s rostoucí rychlostí přestává být čím dál tím více tlumená až se pól dostane do pravé komplexní poloroviny a obálka oscilací začne divergovat. Naopak zbylé dva módy se s rostoucí rychlostí zatlumují. Ostatní póly, které mají nulovou imaginární složku (dynamika serva a dynamika Theodorsenových funkcí), mají i pro velké rychlosti zápornou reálnou část, a tudíž nezpůsobují nestabilitu.



Obrázek 4.3: Komplexní rovina s póly systému pro linearizaci od 50m/s do 150m/s

Charakteristiky tlumení a frekvence v závislosti na rychlosti

Z hlediska chování křídla při různých rychlostech je vhodné vykreslit průběhy frekvence exponenciálního tlumení a frekvence tlumených oscilací všech tří módů jako funkce rychlosti, graf je zobrazený v obrázku 4.4.

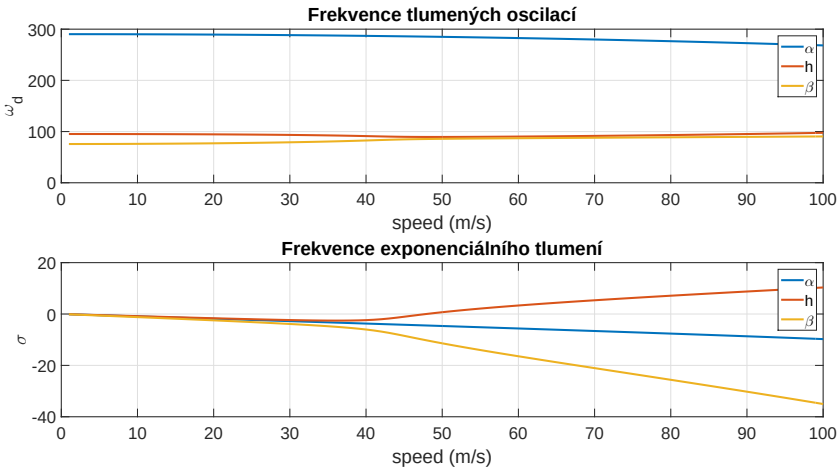


Obrázek 4.4: Průběhy módů od 0m/s do 200m/s

Důležitým bodem v grafu je bod, protínající osu rychlosti tam, kde je tlumení nulové. Tento bod odpovídá kritické rychlosti V_{krit},(nebo také rychlosti flutteru V_f) při jejíž překročení dojde k flutteru. Pokud se křivka tlumení přibližuje k nulové ose pomalu a po protnutí se například ještě vrátí do záporných hodnot, tedy do oblasti stability, pak se jedná o takzvaný „Soft flutter“. V praxi, je ale samozřejmě nemožné, dostat se do druhé stabilní oblasti, bez toho aniž by k flutteru došlo. „Hard flutter“ je označován případ kdy, tlumení podobně jako na obrázku 4.4 protne nulovou osu a má stále klesající tendenci (σ stále roste). Graf 4.4 tedy umožňuje odhad rychlosti, na které dojde k flutteru.

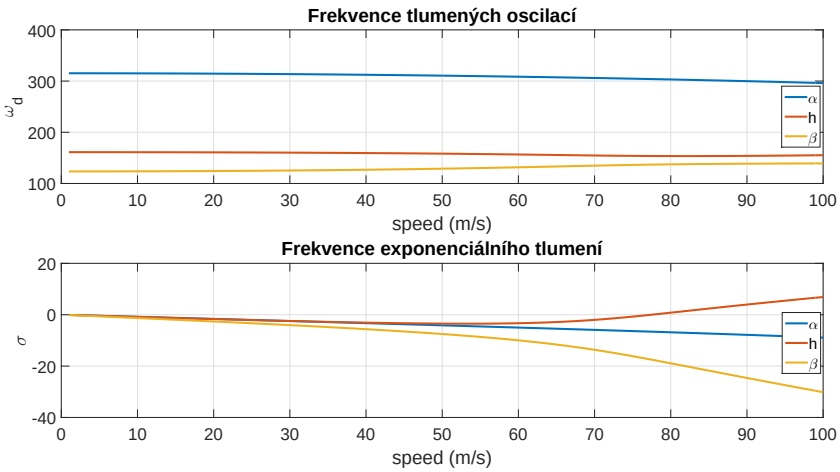
Zpět k otázce vlivu mechanických parametrů (tuhost, hmotnost, poloha

těžiště atd.) na tuto rychlost. Provedením experimentu, kdy je změněna tuhost křídla ve vertikálním směru k_h například na třetinu původní hodnoty, je získán nový graf 4.5. Z původní V_f, která činila zhruba 144m/s, nová kritická rychlost klesla na 48m/s. Snížením tuhosti křídla bylo dosaženo nežádoucího jevu a to, že k flutteru dojde na mnohem nižší rychlosti.



Obrázek 4.5: Průběhy módů od 0m/s do 100m/s při změně k_h

Změna tuhosti na nižší tuhost je intuitivně protikladem toho, co se dá očekávat při snaze oddálit flutter. Takto zřejmý nemusí být výsledek druhého experimentu, při kterém se naopak vynásobila tuhost řízení konstantou rovnou třem, průběhy vykresluje obrázek 4.6. I v takovém případě došlo ke snížení V_f ze 144m/s na 78m/s. Oba experimenty demonstrují fakt, kde modální frekvence, které se k sobě stále přibližují, mají negativní vliv na kritickou rychlost. V prvním případě byla ω_h změnou tuhosti přiblížena k ω_β, v druhém případě vedlo navýšení tuhosti na navýšení ω_β a přiblížení k ω_h.



Obrázek 4.6: Průběhy módů od 0m/s do 100m/s při změně k_β

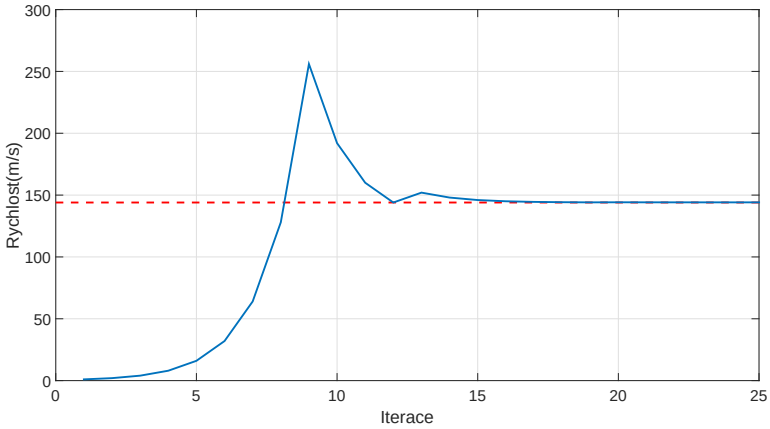
4.1.3 Algoritmus nalezení rychlosti flutteru

Rychlost flutteru je klíčovou hodnotou při práci s aeroelastickým křídlem a je možné jí nalézt více způsoby, podrobněji se této otázce věnuje [DIVD86]. Předchozí podkapitola naznačila nalezení V_f z principu analýzy stability systému v závislosti na parametru (na rychlosti).

Algoritmus, který je v této práci využíván k nalezení kritické rychlosti samotného křídla i křídla s implementovaným zákonem řízení, je založený na principu půlení intervalů (Binární vyhledávání) a hledání rychlosti, při které je systém na mezi stability (nebo v její těsné blízkosti s definovanou tolerancí v rychlosti).

Binární vyhledávání [Pro09] zde funguje tak, že se provede linearizace pro určitou rychlost a kontroluje se stabilita vzniklého lineárního systému. V případě, že je systém stabilní, zvedne se rychlost na dvojnásobek a opět se kontroluje stabilita pro linearizaci na nové rychlosti. Když algoritmus odhalí nestabilitu, sníží rychlost o polovinu předchozího kroku a postup se opakuje dokud se algoritmus nedostane do úseku v tolerovaných mezích.

Přesnost, s kterou je rychlost nalezena, se dá specifikovat pomocí velikosti přírůstku rychlosti a oscilace na hranici stability. Obrázek 4.7 ukazuje, jak algoritmus konverguje k hodnotě $V_f = 144.13\text{m/s}$.



Obrázek 4.7: Průběh hledání kritické rychlosti

4.2 Frekvenční charakteristiky systému

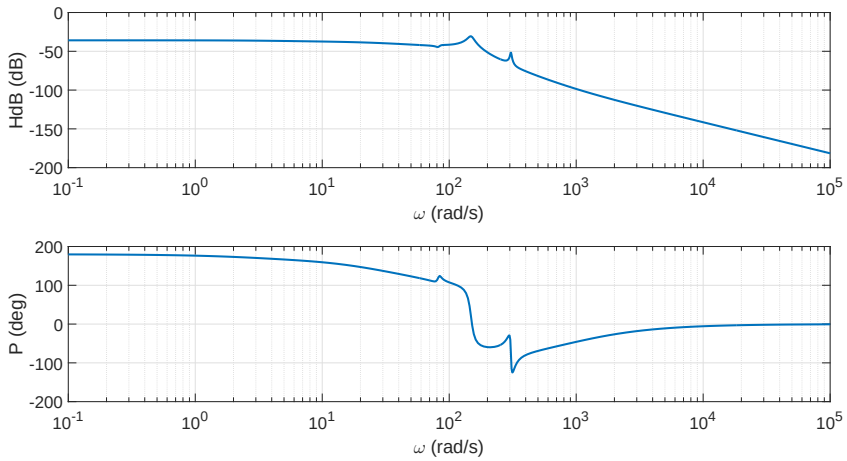
Linearizovaný model, s kterým v této kapitole pracujeme, dovoluje využití frekvenčních metod, které dokáží naznačit chování systému v časové oblasti. Navíc neposkytují informaci pouze o stabilitě uzavřené smyčky, ale také o její „velikosti“ (robustnosti). Další výhodou frekvenčních metod, která zde není využita, je možnost analýzy systému pouze z naměřených dat s absencí modelu systému.

Frekvenční charakteristiky budou důležité i pro návrh řídicího systému,

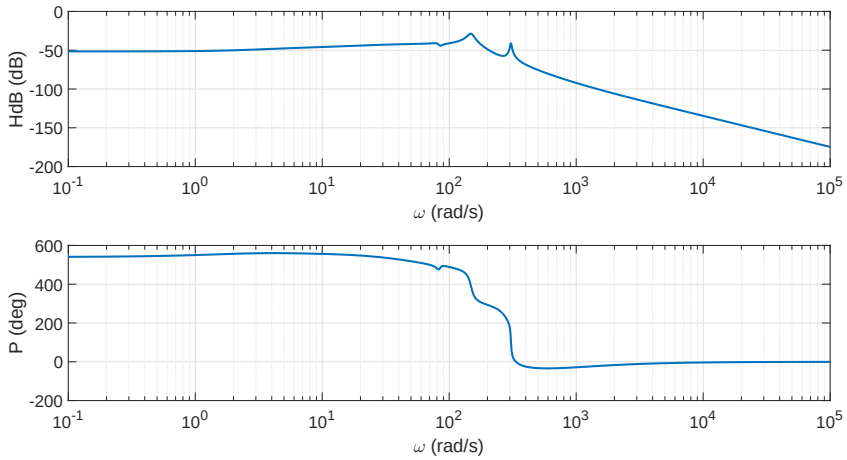
z tohoto důvodu bude jejich princip stručně vysvětlen. Nejprve bude definován pojem frekvenční odezvy, kterou je myšlená odezva systému buzeného sinusovým signálem. Výstupem systému (lineárního a stabilního) je tentýž signál ovšem s rozdílnou fází a amplitudou, tyto informace napříč frekvencemi tvoří frekvenční charakteristiky.

Jedena z možností vykreslení frekvenční charakteristiky je Bodeho diagram. Bodeho diagram tvoří dva grafy vykreslené v závislosti na frekvenci (v logaritmickém měřítku). První obsahuje informaci o magnitudě a druhý informaci o fázi. Podrobnější informace je možné získat například v [Oga10].

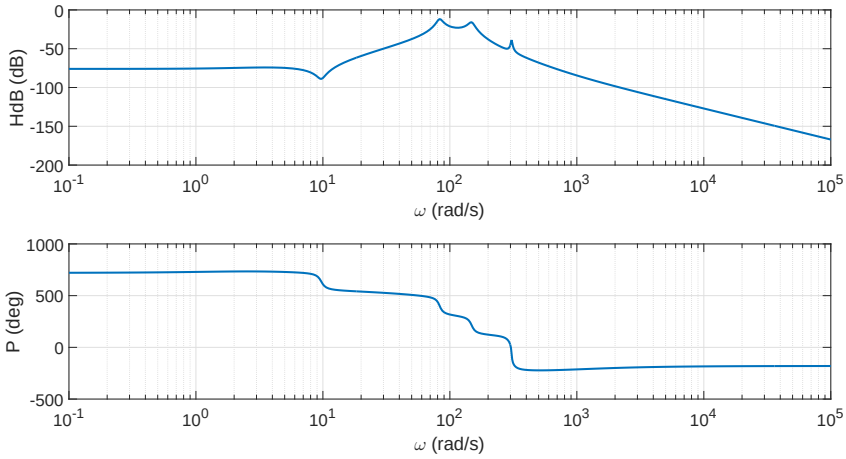
Grafy 4.8 až 4.10 jsou Bodeho diagramy linearizovaného systému pro rychlost $V = 50\text{m/s}$. Vstupem do systému je γ_{ref} a výstupem jsou veličiny h, α, β. Ve frekvenčních amplitudových charakteristikách jsou dobře patrné módy systému, které se projevují jako špičky grafu na uvedených kmitočtech.



Obrázek 4.8: Bodeho diagram přenosu z γ_{ref} na h



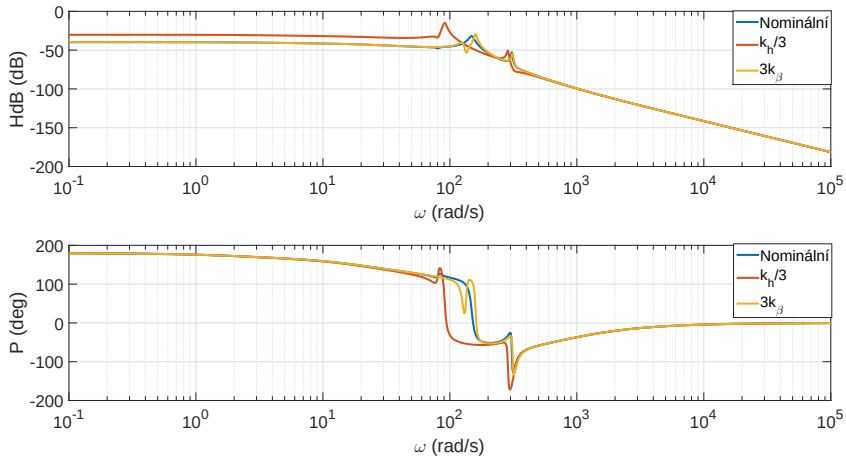
Obrázek 4.9: Bodeho diagram přenosu z γ_{ref} na α



Obrázek 4.10: Bodeho diagram přenosu z γ_{ref} na β

Nejlépe viditelný je mód vertikální výchylky (h), který při překročení V_f zapříčiňuje flutter. Dalším dobře viditelným módem je torze křídla (α) a nejhůře znatelným je mód kormidla. V kapitole zabývající se systémem tlumení, bude snahou právě tyto špičky ve frekvenčních charakteristikách utlumit.

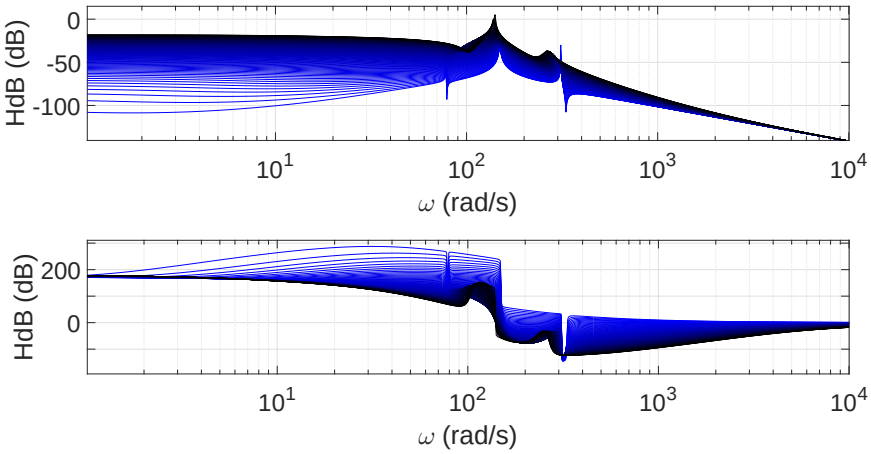
Provedením stejných experimentů jako v podkapitole 4.1.2 je možné získat další úhel pohledu na problematiku kritické rychlosti v závislosti na konstrukčních parametrech. Situaci demonstruje graf 4.11, obsahující frekvenční charakteristiku nominálního systému a systémů s upravenými tuhostmi k_h a k_β. Charakteristiky odpovídají linearizaci při $V = 40$m/s. Není tolik překvapivé zvýraznění rezonanční špičky u systému s třetinovou tuhostí křídla, ale je možné pozorovat i zvýraznění stejné rezonanční špičky při změně tuhosti řízení na trojnásobek. K tomuto jevu přispívá přiblížení (z hlediska frekvence) komplexní dvojice pólu odpovídající módu kormidla.



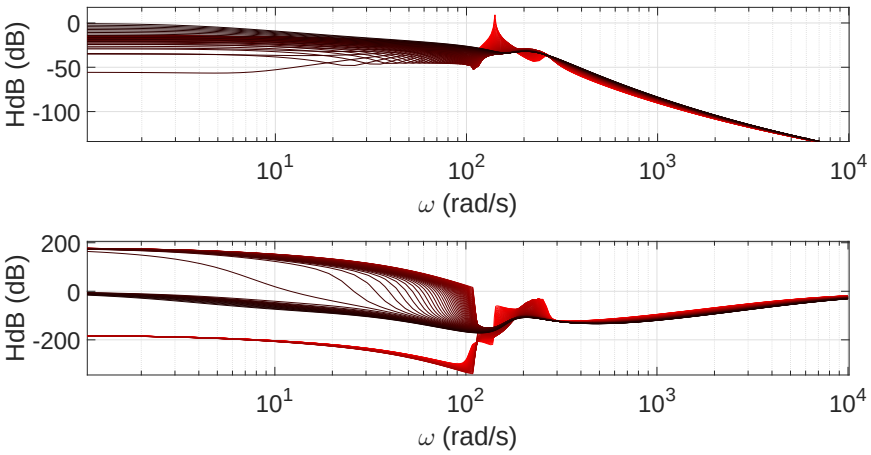
Obrázek 4.11: Bodeho diagram přenosu z γ_{ref} na h pro modifikované parametry

4.2.1 Analýza frekvenčních charakteristik v závislosti na rychlosti

Podobně jako u vykreslení pólů systému v závislosti na rychlosti, i zde budou vykresleny frekvenční charakteristiky pro různé rychlosti. Navíc budou grafy rozděleny na dva rychlostní intervaly. První bude od 1m/s do V_f a druhý bude od V_f do 250m/s. Rostoucí rychlost bude symbolizovat tmavnutí vykreslovaných charakteristik. Technicky vzato není možné měřit frekvenční charakteristiky pro nestabilní systém ($V > V_f$), nicméně matematicky tyto charakteristiky definovat lze, tudíž i vykreslit. Na obrázku 4.12 z prvního intervalu rychlostí je dobře patrné výrazné prosazování módu vertikální výchylky křídla. Obrázek pro nestabilní oblast je zase zajímavý výraznými změnami v grafu vykreslujícího fázi. Těmito změnami se bude text ještě zabývat v kapitole o návrhu řízení.



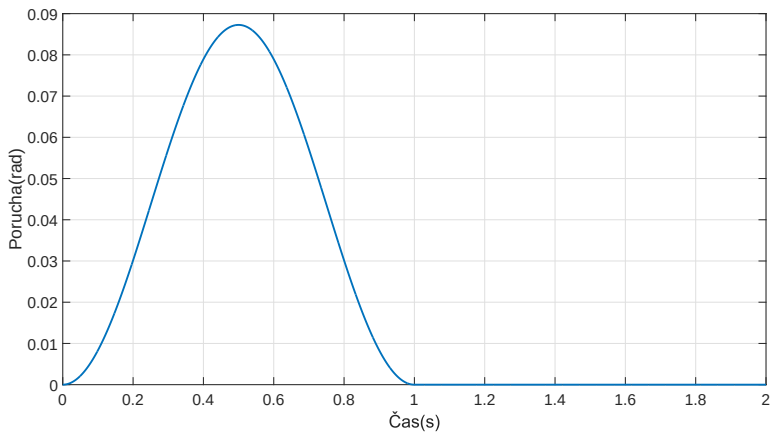
Obrázek 4.12: Bodeho diagram přenosu z γ_{ref} na h od 1m/s do 144m/s



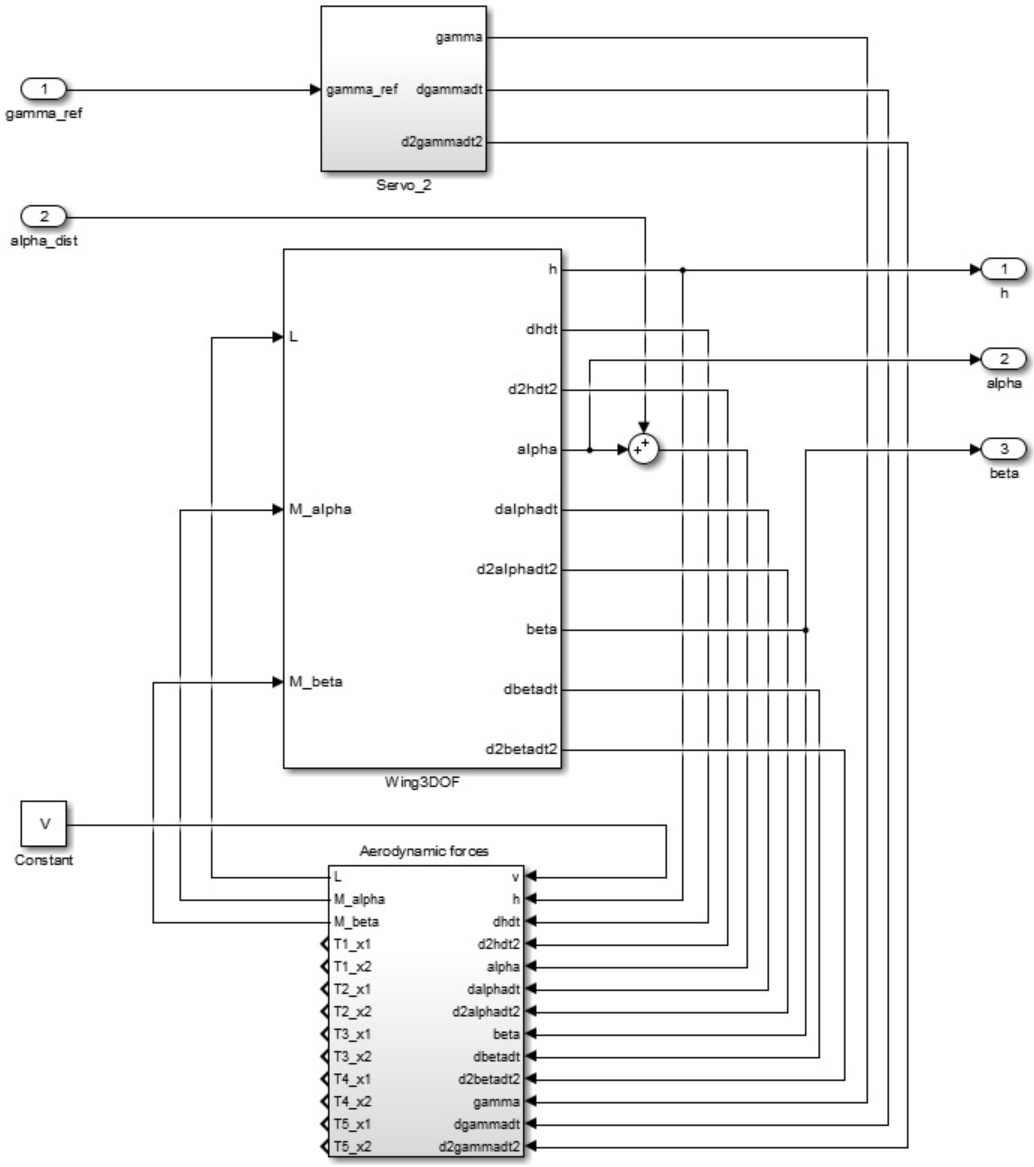
Obrázek 4.13: Bodeho diagram přenosu z γ_{ref} na h od 145m/s do 250m/s

4.3 Chování systému v časové oblasti

Systém byl také analyzován z hlediska odezvy na poruchu v časové oblasti. Pod poruchou je zde myšlen například poryv větru nebo výchylka kormidla. Poryv byl modelován funkcí $e_\alpha(t) = 1 - \cos(t)$, která byla přičtena ke stavu α před blokem nestacionární aerodynamiky. Za předpokladu kdy $V \neq 0$ vzniknou v bloku aerodynamiky nenulové síly a momenty působící na mechaniku křídla. Přičtení $e_\alpha(t)$ ještě před blokem mechaniky křídla by vedlo na vytvoření sil a momentů i bez přítomnosti aerodynamiky, což není žádoucí. Jednalo by se o simulaci zkroucení křídla „nějakou“ externí silou. Zavedení poruchy do systému naznačuje obrázek 4.15. Reakce systému na poruchu bude vykreslena v kapitole 9, která nabízí porovnání reakcí křídla s tlumením a bez něj, mimo to budou uvedeny další odezvy v kapitolách 6, 7 a 8.



Obrázek 4.14: Průběh poruchy



Obrázek 4.15: Zavedení poruchy do systému

Část III

Systém tlumení

Kapitola 5

Specifikace problému

Část III je věnována návrhu systému, který by potlačil, respektive oddálil dynamickou, aeroelastickou nestabilitu známou jako flutter. Než budou popsány jednotlivé metody, kterými se tato práce zabývá, bude věnováno několik řádků bližší specifikaci tohoto problému.

Flutter je jev, který je složité predikovat a ve chvíli, kdy k němu dojde, je vysoká pravděpodobnost, že během několika sekund dojde k destrukci letadla. Snahou řídicích zákonů, které budou dále popsány, je oddálit kritickou rychlost co možná nejdále. Pro praktický návrh je třeba dostat hodnotu V_{krit} do oblasti rychlostí, v kterých se dané letadlo nemůže pohybovat.

Koncept, který byl zvolen, počítá s křídlem, jehož řídicí plochy ovládá přímo pilot, nikoli počítač. Systém tlumení proto disponuje vlastním křidélkem, to by ovšem nemělo zasahovat do řízení letadla. Model křídla včetně analýzy byl již představen. Obrázek 2.1 ilustruje popsaný koncept. Pro veškeré návrhy řízení a jejich následné validace bude použit Matlab, Simulink a nástroje, jenž poskytují.

5.1 Informace dostupné pro systém tlumení

Data, která mohou být k řízení využita, specifikuje měřitelná množina veličin, s kterými úzce souvisí senzory, schopné tyto veličiny měřit. Jedním z dostupných senzorů je akcelerometr, jenž poskytuje informaci o zrychlení. Umístíme-li jeden z akcelerometrů kamkoli na profil křídla, bez další informace bude obtížné rozlišit mezi translačním a rotačním pohybem (kolem elastické osy křídla). Řešením může být instalace dvou (tříosých) akcelerometrů do oblasti náběžné i odtokové hrany profilu. Navíc je třeba umístit další tříosý akcelerometr ke kořeni křídla, aby bylo možné odečíst zrychlení samotného letadla. Soustava akcelerometrů tedy dovoluje získat veličiny $\ddot{h}$ a $\ddot{\alpha}$. Dalšími snadno měřitelnými veličinami jsou úhel a úhlová rychlost obou křidélek. Získání těchto veličin zajistí například enkodéry (případně v kombinaci s tachometrem).

V porovnání se stavy systému jsou k dispozici veličiny $\gamma, \dot{\gamma}, \beta, \dot{\beta}, \ddot{h}$ a $\ddot{\alpha}$. Stavy Theodorsenových funkcí měřit nelze, složité by bylo i získání hodnot $h, \dot{h}, \alpha, \dot{\alpha}$, budou tedy označeny za neměřitelné. Jako další měřitelnou veličinu,

kterou bude možné využít, avšak není stavem ani derivací stavu systému, je rychlost obtékání V, respektive vzdušná rychlost.

Kapitola 6

Řízení SISO systému

První kapitola, věnující se návrhu zákona řízení, nahlíží na problém zjednodušeně a uvažuje pouze jediný vstup a výstup z bloku řízení. Proto také „Řízení SISO systému“, SISO (Single Input Single Output) označuje systém s jedním vstupem a jedním výstupem. Z podkapitoly 4.1.2 je zřejmý fakt, že za nestabilitu vzniklou při určité rychlosti (V_f) může mód vertikální výchylky křídla. Tato informace bude použita k volbě signálu, použitého pro uzavření zpětné vazby. Jelikož se dynamika křídla mění s ohledem na rychlost, ale regulátor bude invariantní vůči rychlosti, je nutné vybrat konkrétní rychlost, pro kterou se bude systém linearizovat a pro kterou se bude navrhovat řízení. Řízení se zavádí z důvodu nestability, tudíž i zvolená rychlost by měla být větší než V_f. Nebude-li řečeno jinak, zvolenou rychlostí, pro návrh regulátoru bude $1.1V_f = 158\text{m/s}$. Po stabilizaci na 110% kritické rychlosti, bude ověřena oblast rychlostí, kde je systém ještě stabilní.

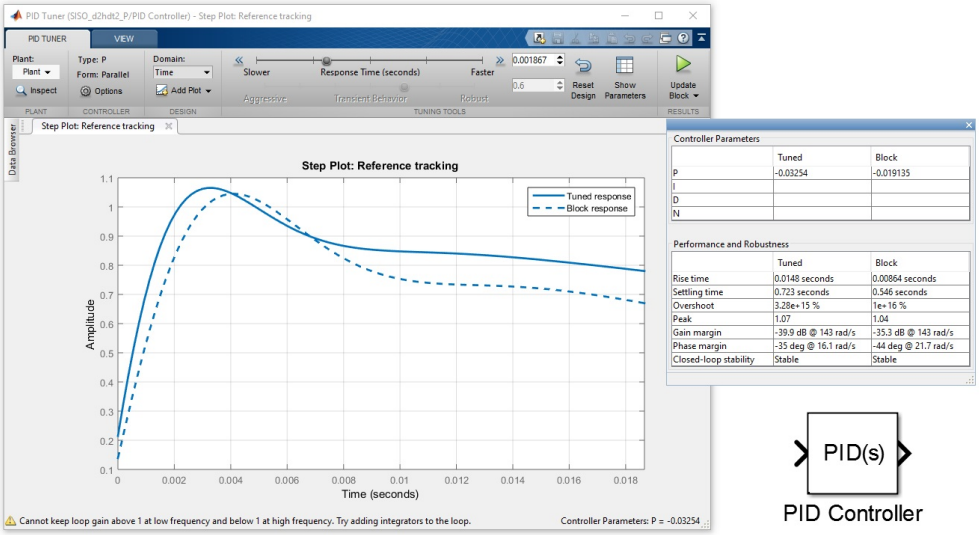
Při návrhu regulátorů bude respektována konvence fázové a amplitudové bezpečnosti, které říkají, že amplitudová bezpečnost, dále jen GM (Gain Margin) by měla být větší než 2(6dB) a fázová bezpečnost PM (Phase Margin) větší než 30°. Díky zjednodušení na SISO systém je GM a PM možným ukazatelem robustnosti navrženého zpětnovazebního systému. Zjednodušeně se dá představit GM jako informace, o kolik lze zvětšit zesílení otevřené smyčky, než uzavřená smyčka přestane být stabilní. Podobně PM udává, jak moc velké zpoždění je možné uvažovat v otevřené smyčce, než uzavřená smyčka ztratí stabilitu. Oba pojmy mají ovšem smysl za předpokladu, že se mění neurčitost pouze v zesílení, nebo pouze ve fázi, proto bude navíc provedena kontrola z frekvenčních charakteristik. Důležitým ukazatelem je vzdálenost grafu od kritického bodu. Podrobnější informace o Marginech je například v [Oga10].

6.1 Zavedení zpětné vazby od $\ddot{h}$

Jediným signálem, který byl označen za měřitelný a současně přímo souvisí s módem způsobujícím nestabilitu (což je vertikální výchylka křídla), je druhá derivace výchylky křídla $\ddot{h}$. Následující text popisuje snahu využití znalosti $\ddot{h}$ k řízení. Viditelnou výhodou je možnost přímého měření veličiny bez nutnosti složitějšího zpracování/filtrace.

6.1.1 PID-tune

Prvním způsobem pro návrh zpětnovazebního řízení bude využití bloku PID v Simulinku. Tento blok umožňuje spojité i diskrétní řízení ve variantách P,I,PI,PD, či PID regulace. Hlavním přínosem je ovšem nástroj pro ladění regulátoru, jenž je součástí bloku. Ladění pak probíhá změnou parametrů a kontrolou informací, které nástroj pro ladění poskytuje.



Obrázek 6.1: PID Tuner

Mimo zobrazení odezvy uzavřené smyčky je k dispozici například informace o překmitu, době náběhu, GM, PM, atd. Současně je možné vykreslení frekvenčních charakteristik, odezvy na poruchy a podobně. Při hodnocení odezvy uzavřené smyčky na referenci je nutné vzít v úvahu, že cílem regulátoru není udržet nulovou chybu řízení (rozdíl mezi referencí a výstupem systému), což by zde znamenalo, nastavení libovolného zrychlení $\ddot{h}$ pomocí křidélka, ale odstranění nestabilní kmitavé odezvy.

P regulátor

Nejjednodušší možnou variantou řízení je proporcionální (P) regulátor, zde budou vyzkoušeny vlastnosti systému právě s tímto regulátorem ve zpětné vazbě od $\ddot{h}$. Po nastavení bloku PID na P regulátor proběhlo ladění zesílení, jeho výsledkem se stalo zesílení viz. obrázek 6.2. Tabulka také obsahuje hodnoty PM a GM, které splňují zmíněné požadavky. Podrobnější informace o robustnosti poskytnou frekvenční charakteristiky.

Frekvenční Analýza. Důležitou informací je chování systému při poruše, to je důvodem volby frekvenční charakteristiky 6.3, zobrazující Bodeho diagram systému se vstupem α a výstupem h. Obrázek 6.3 vykresluje frekvenční charakteristiku netlumeného systému (modrý graf) při rychlosti, pro kterou byl navrhován regulátor a systému v uzavřené smyčce s regulátorem (červený

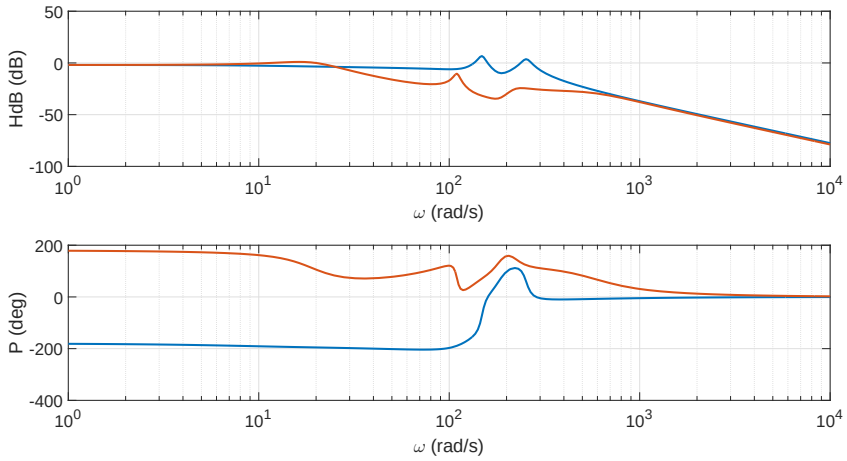
Controller Parameters

	Tuned	Block
P	-0.019253	-0.019135
I		
D		
N		

Performance and Robustness

	Tuned	Block
Rise time	0.00868 seconds	0.00864 seconds
Settling time	0.548 seconds	0.546 seconds
Overshoot	1.21e+16 %	1e+16 %
Peak	1.05	1.04
Gain margin	-35.3 dB @ 143 rad/s	-35.3 dB @ 143 rad/s
Phase margin	-43.9 deg @ 21.7 rad/s	-44 deg @ 21.7 rad/s
Closed-loop stability	Stable	Stable

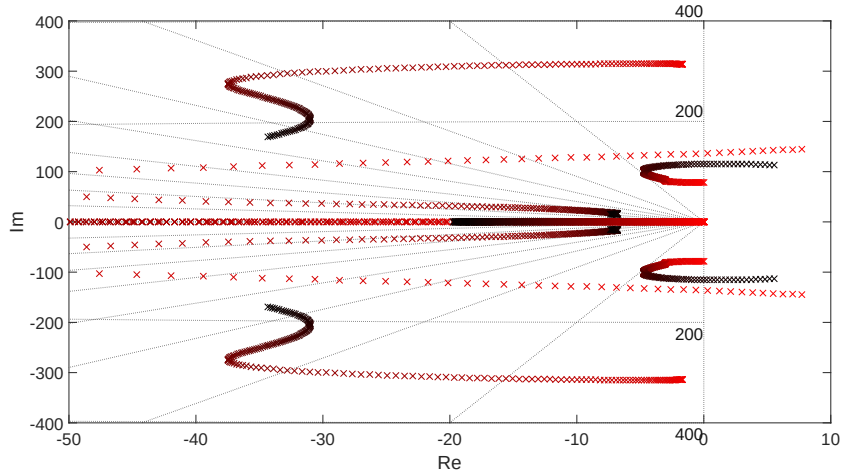
Obrázek 6.2: Informace o P regulátoru na $\ddot{h}$



Obrázek 6.3: Bodeho diagram pro systém s P regulátorem na $\ddot{h}$ a bez regulátoru

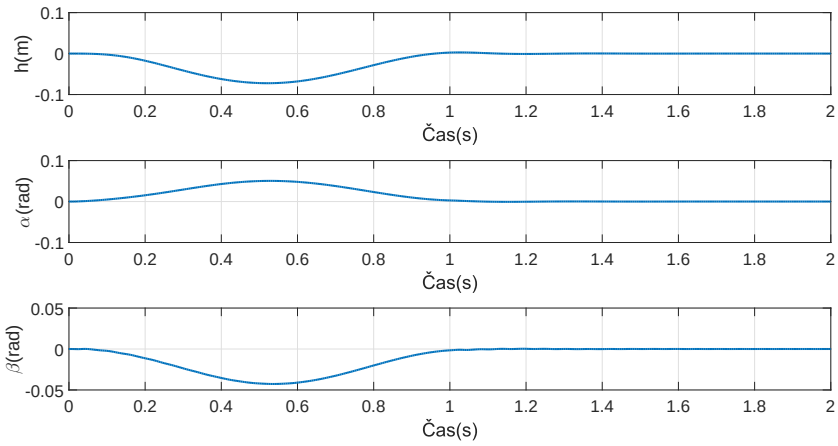
graf), při stejné rychlosti. Nežádoucí špičky v amplitudě se sice podařilo výrazně utlumit, nicméně za cenu posunutí vlastních frekvencí. Posouvání frekvencí systému není vhodné, jedná se vlastně o nucené kmitání způsobené aktuátorem. Další nevhodnou vlastností, vzniklou uzavřením zpětné vazby je zvýšené zesílení na nízkých kmitočtech.

Analýza v komplexní rovině. Informaci o oblasti, pro které je systém s uvedeným regulátorem stabilizován, poskytne komplexní rovina stejným principem jako byl uveden v podkapitole 4.1.2. Regulátor navržený na rychlosti $V = 158.54$m/s, dokáže stabilizovat systém až do rychlosti 183m/s. Rychlost flutteru byla tedy posunuta na 127% z V_f, regulátor však způsobí nestabilitu na nízkých rychlostech, což dokazují póly, označené světle červenou barvou, v pravé polorovině komplexní roviny.



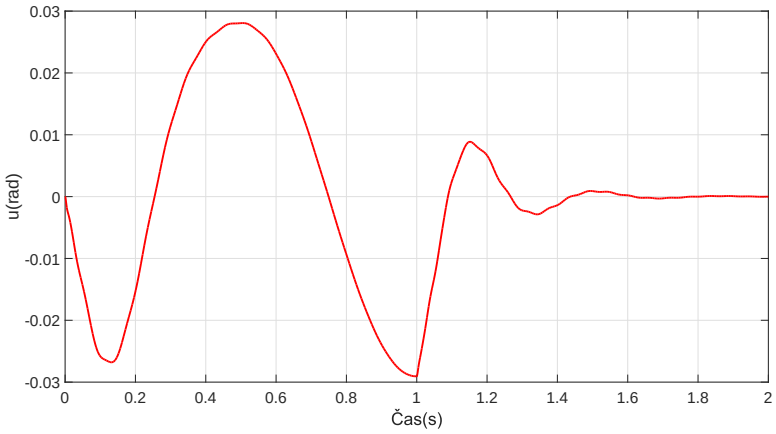
Obrázek 6.4: Komplexní rovina s póly uzavřené smyčky od 0m/s do 200m/s - P regulátor na $\ddot{h}$

Kontrola v časové oblasti. Další vhodnou kontrolou je ověření velikosti akčního zásahu a samotné odezvy na poruchu (obrázek 4.14). V tomto případě byla porucha simulována stejným způsobem jako v podkapitole 4.3. Výsledky simulace ukazují obrázky 6.5 a 6.6. Po poruše se systém ustálil na nulových hodnotách a nedošlo ke kmitavé odezvě. Akční zásah nepřekročil 0.03 rad.



Obrázek 6.5: Průběhy stavových veličin v uzavřené smyčce při poruše

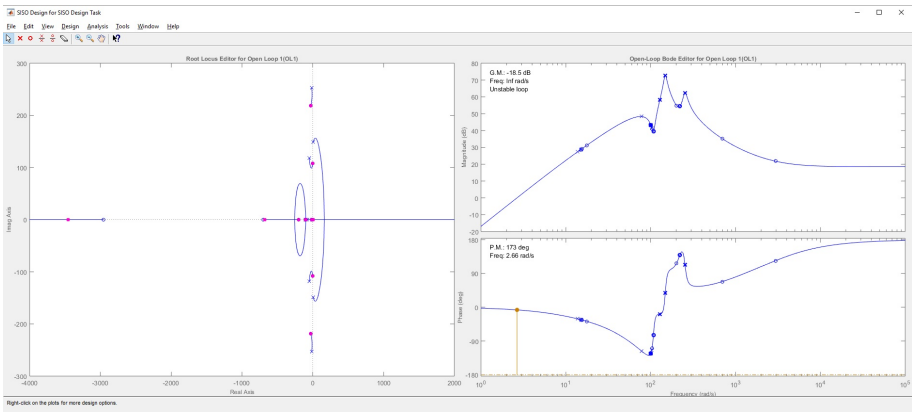
Zhodnocení. Vzniklou nestabilitu uzavřené smyčky by bylo možné řešit používáním regulátoru od určitých rychlostí. Přesto, že se podařilo posunout kritickou rychlost o 27% není tento regulátor vhodný z důvodů uvedených ve frekvenční analýze.



Obrázek 6.6: Průběh akčního zásahu P regulátoru na $\ddot{h}$

6.1.2 SISO tool

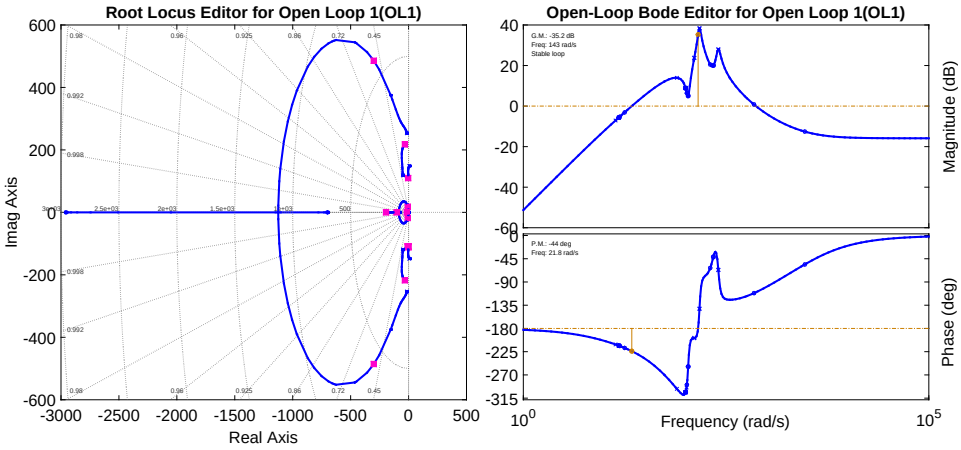
Užitečným nástrojem pro návrh zpětné vazby SISO systému je „sisotool“, obrázek 6.1.2. Mimo Bodeho diagram otevřené smyčky zobrazuje také root locus, neboli geometrické umístění kořenů. Póly systému se pohybují po vyznačených trajektoriích v závislosti na velikosti zesílení regulátoru. Tvar trajektorií je možné měnit změnou dynamiky regulátoru. Pokud tedy nelze dosáhnout požadovaného umístění pólu pouze změnou zesílení, je nutné přidat do zpětné vazby kompenzátor, který upraví dynamiku a tak i trajektorie po kterých se kořeny pohybují. Metoda byla poprvé popsána W. R. Evansem.



Obrázek 6.7: SISO Tool

P regulátor

S využitím sisotoolu je možné nalézt podobný P regulátor jako v části zabývající se blokem PID a jeho laděním. Obrázek 6.8 zachycuje polohu pólů a Bodeho diagram pro již nalezený regulátor. Novou informaci oproti nástroji v PID bloku poskytuje právě root locus.

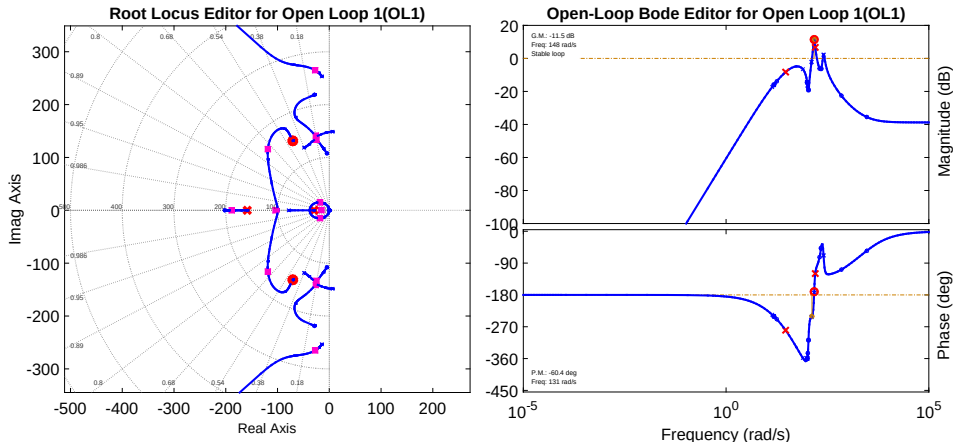


Obrázek 6.8: Ladění P regulátoru od $\ddot{h}$ v SISO Tool

Zaměřením na trajektorie u imaginární osy na obrázku 6.8 je dobře patrná informace o maximálním možném zatlumení komplexního kořene, jenž v otevřené smyčce způsobuje nestabilitu. Hodnotou proporcionálního regulátoru, lze pohybovat z kořenem uzavřené smyčky na trajektorii ohraničené pólem a nulou systému. Trajektorie je ve stabilní částí (v levé komplexní polorovině) téměř rovnoběžná s imaginární osou, tlumení je možné tak zesílením upravit pouze minimálně. Pravá část obrázku 6.8 informuje o tvaru frekvenční charakteristiky včetně pólů a nul, které frekvenční charakteristiku tvarují. Mimo stabilitu je také důležité sledovat i GM a PM vykreslených ve zmíněném grafu.

Přidání kompenzátoru

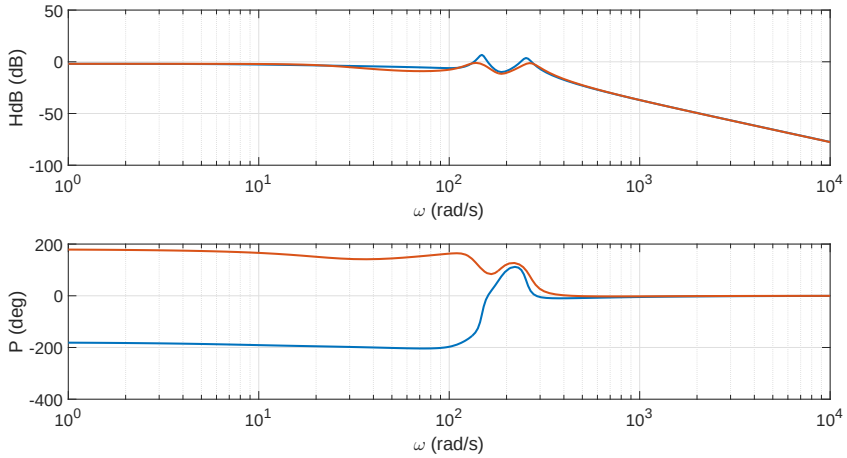
Přirozenou otázkou je, jakou dynamiku do zpětné vazby přidat, aby bylo dosaženo lepšího výsledku řízení uzavřené smyčky. Odpovědí je kompenzátor, navržený s ohledem na umístění pólů a tvar frekvenční charakteristiky.



Obrázek 6.9: Ladění P regulátoru s kompenzátorem od $\ddot{h}$ v SISO Tool

Zvolený kompenzátor tvoří komplexní nula a dvojice reálných pólů, které dorovnávají stupeň jmenovatele přenosu kompenzátoru na stupeň čitatele. Získané trajektorie a volba zesílení umísťují kořeny do polohy viz. obrázek 6.9. Volbou většího zesílení je možné více zatlumit mód h, je to ale za cenu snížení tlumení módu β.

Frekvenční analýza. Totožným postupem jako u samotného P regulátoru je získán Bodeho diagram systému bez řízení (modrý graf) a systému s regulátorem (červený graf). Zesílením se opět podařilo zatlumit frekvenční špičky charakteristiky, nicméně díky kompenzátoru nedošlo k vytvoření nové nežádoucí rezonanční frekvence systému. Také rozdíl ve frekvencích tlumeného a netlumeného systému je minimální.

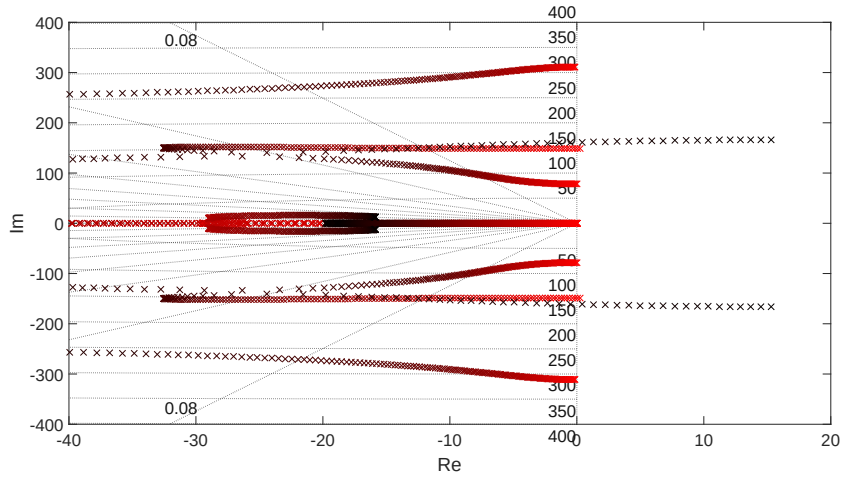


Obrázek 6.10: Bodeho diagram pro systém s P regulátorem a kompenzátorem na $\ddot{h}$ a bez regulátoru

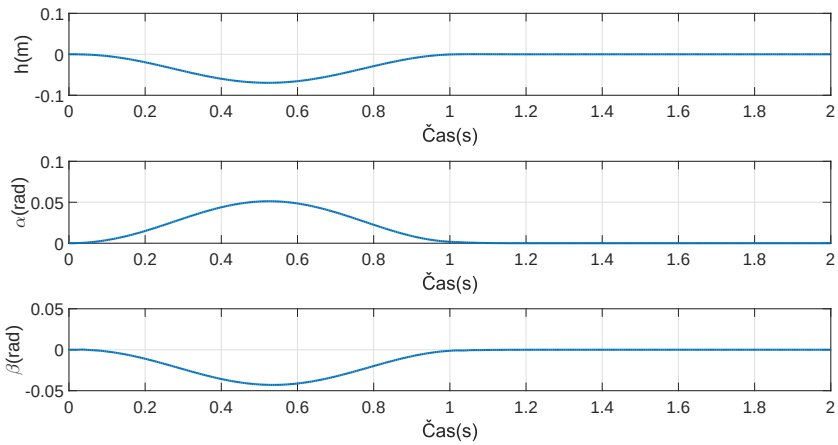
Analýza v komplexní rovině. Zkoumáním polohy pólů v závislosti na rychlosti je získána nová kritická rychlost rovna 182.6m/s, posunutí rychlosti je téměř shodné jako s proporcionální regulací. Navíc se zmenšila oblast nestability na nízkých rychlostech.

Kontrola v časové oblasti. Po simulaci uzavřené smyčky a získání grafů (obrázky 6.12, 6.13), je dobře viditelná změna oproti grafům ze simulace systému s P regulátorem. Simulace byla samozřejmě provedena za stejné rychlosti a stejné poruchy jako v předchozím případě. Zatlumení po poruše je výraznější (neobsahuje překmit), navíc akční zásah je v tomto případě menší co do amplitudy.

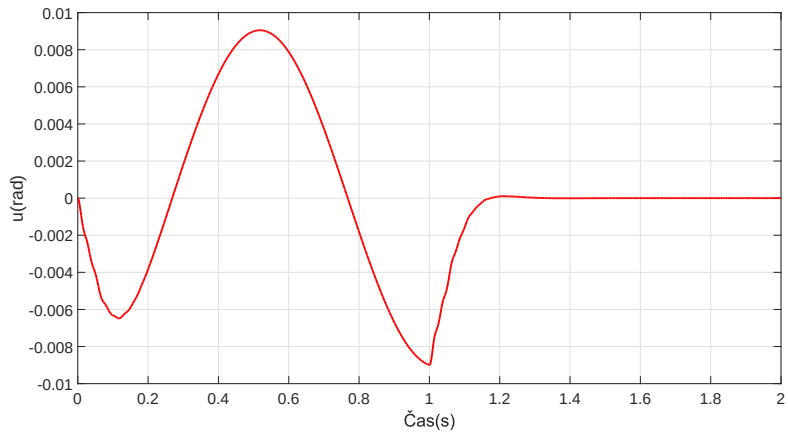
Zhodnocení. Navržený systém prokazuje lepší chování než obyčejný P regulátor a současně posunuje kritickou rychlost o téměř 27%. Tento princip by mohl být využit jako systém tlumení na vyšších rychlostech.



Obrázek 6.11: Komplexní rovina uzavřené smyčky s P regulátorem a kompenzátorem na $\ddot{h}$ od 0m/s do 200m/s



Obrázek 6.12: Průběhy stavových veličin v uzavřené smyčce při poruše



Obrázek 6.13: Průběh akčního zásahu P regulátoru na $\ddot{h}$

6.2 Zavedení zpětné vazby od $\dot{h}$

Přestože byl signál $\dot{h}$ ve studovaném systému označen za neměřitelný, bude tato podkapitola věnována zpětné vazbě od rychlosti vertikálního pohybu křídla. Důvodem je fyzikální interpretace, této zpětné vazby. Je totiž možné sledovat analogii mezí třecí silou $F_{třecí} = c_{třecí}v$, která je úměrná rychlosti v, přes konstantu $c_{třecí}$ a zpětnou vazbou $FB_v = Kv$, jenž je také úměrná rychlosti, přes zesílení K. Použití takové zpětné vazby, si je možné představit, jako zavedení tlumící síly, proporcionální k hodnotě zesílení. Předchozí podkapitola studující možnosti zpětné vazby od zrychlení, zase představuje analogii změny hmotnosti zpětnovazebního systému. Zde je podobnost s druhým Newtonovým zákonem, „Zákonem síly“ kde $F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = ma$.

Model disponuje možností použití/měření všech stavů včetně $\dot{h}$ a tak i možností zpětné vazby od $\dot{h}$. Navzdory tomu, že v praxi byl signál rychlosti označen za neměřitelný, nejedná se pouze o nerealistické úvahy, měřitelné $\ddot{h}$ může být využito k „odhadu“ rychlosti a umožnit tak diskutovaný přístup.

6.2.1 PID-tune

Práce s PID blokem byla naznačena v sekci 6.1.1, nebude proto popisována znovu. Linearizace je opět na rychlosti $1.1V_f$, rozdíl je pouze v použitém signálu ($\dot{h}$).

P regulátor

Ladění proporcionálního regulátoru ukázalo dvě možné oblasti, které stabilizují systém. První hodnota se pohybuje okolo $P_1 = 0.175$, vlastnosti regulátoru zachycuje tabulka 6.14.

Controller Parameters

	Tuned
P	-0.17501
I	
D	
N	

Performance and Robustness

	Tuned
Rise time	0 seconds
Settling time	0.781 seconds
Overshoot	Inf %
Peak	0.574
Gain margin	1.89 dB @ 262 rad/s
Phase margin	12.8 deg @ 178 rad/s
Closed-loop stability	Stable

Obrázek 6.14: Informace o P_1 na $\dot{h}$

Bohužel hodnoty PM a GM nejsou v žádném „malém“ okolí dostačující (při linearizaci na $1.1V_f$). Přes nerobustnost byly ověřeny další vlastnosti regulátoru. Algoritmus pro hledání kritické rychlosti, stanovil novou kritickou rychlost na $V_{f_{new_{P_1}}} = 174\text{m/s}$, přírůstek rychlosti je necelých 21%.

Druhá nalezená oblast pro zesílení, které dokáže systém stabilizovat je převážně nad hodnotou $P_2 = 1694$. Velikost P_2 je oproti P_1 výrazně větší, nicméně tabulka 6.15 s vlastnostmi tohoto regulátoru naznačuje lepší robustnost. Ověření nové flutterové rychlosti ukazuje, že i kritická rychlost je posunuta dále a to na $V_{f_{new_{P_2}}} = 185\text{m/s}$, procentuální přírůstek je přes 28%.

Controller Parameters

	Tuned
P	-1694.5607
I	
D	
N	

Performance and Robustness

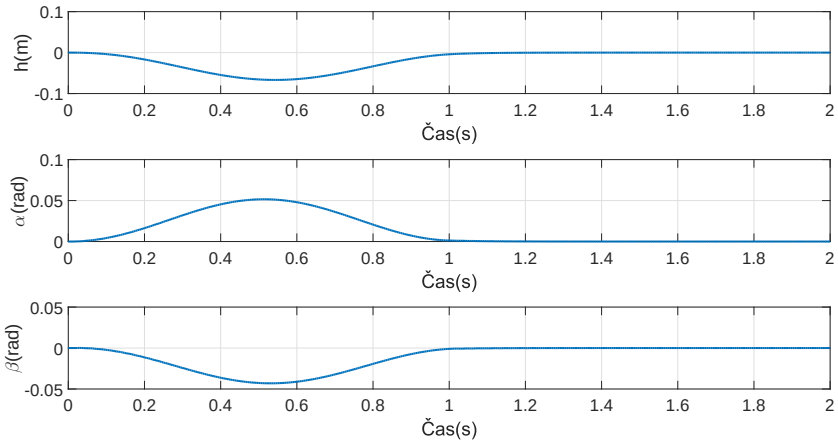
	Tuned
Rise time	0 seconds
Settling time	947 seconds
Overshoot	Inf %
Peak	1
Gain margin	-30.4 dB @ 1.28e+03 rad/s
Phase margin	76.2 deg @ 1.46e+04 rad/s
Closed-loop stability	Stable

Obrázek 6.15: Informace o P_2 na $\dot{h}$

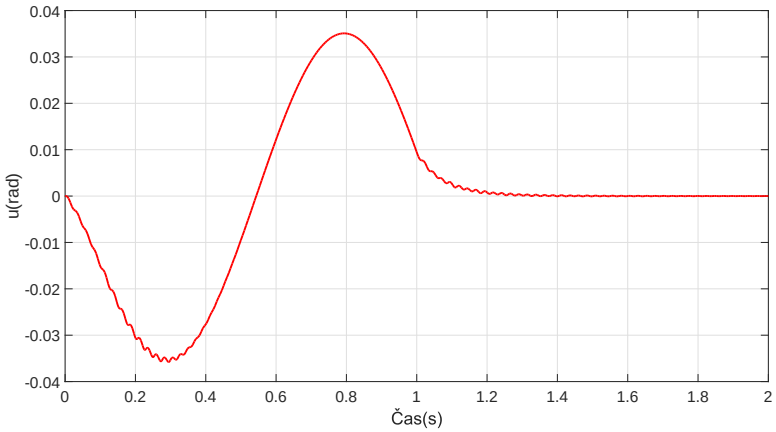
Kontrola v časové oblasti. Kontrola odezvy systému na poruchu prvního zesílení P_1 (obrázky 6.16, 6.17) ukazuje, že se stavové veličiny po poruše ustálí na nulových hodnotách. Oproti regulátoru na $\ddot{h}$ systém odezní do nuly pomaleji, ale rozdíl je nepatrný. Výraznější rozdíl zaznamenává průběh akčního zásahu. Maximální výchylka řízeného kormidla se pohybuje kolem 2° a doprovází jí drobné oscilace, v zásadě jsou, ale průběhy v pořádku.

Zesílení P_2 se mohlo zdát z předchozích výsledků lepší, ověřením odezvy na poruchu jako v prvním případě, se ale ukazují nedostatky. Přiblížením odezvy (obrázek 6.18) je viditelná nenulová hodnota po odeznění poruchy a přechodového děje (obrázek 6.19). To znamená, že návrh nedodržel zachování zesílení na nízkých kmitočtech.

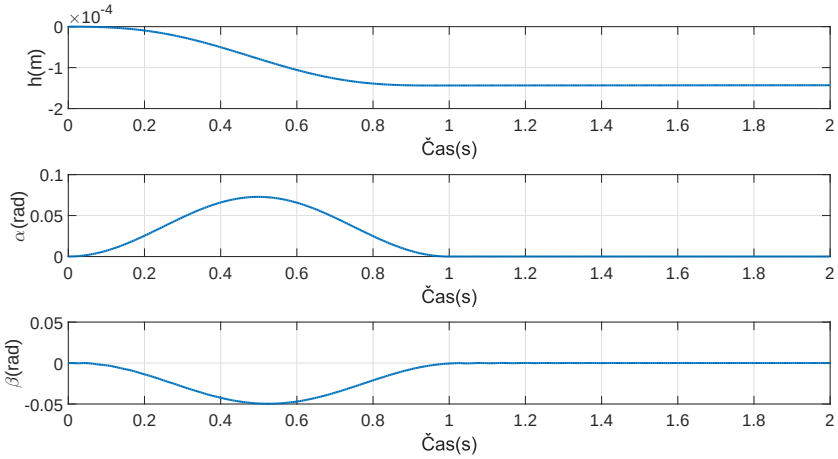
Za nenulovou hodnotou ve výchylce h je zodpovědný akční zásah z obrázku 6.20, který je i po odeznění poruchy delší dobu téměř konstantní a nenulový. Ještě podstatnější vadou regulátoru je samotná velikost akčního zásahu, ta v maximu dosahuje téměř 28°. Tento úhel je pro kormidlo příliš velký a při zavedení saturace na realistické hodnoty maxima výchylky přestane řízení fungovat.



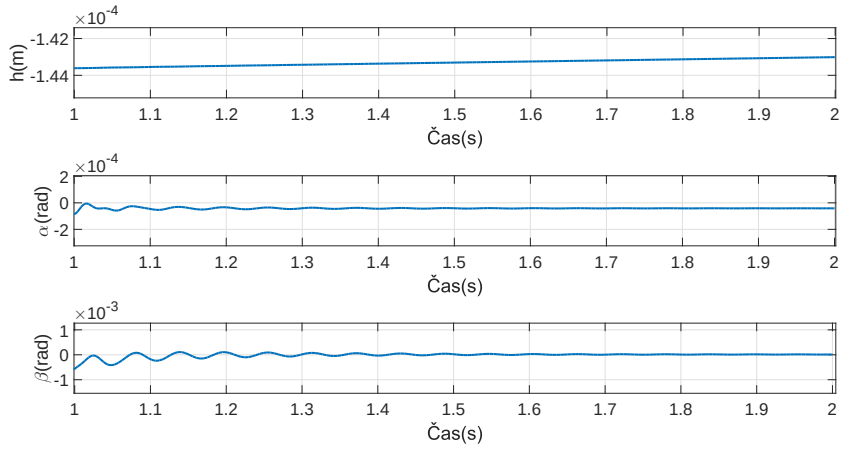
Obrázek 6.16: Průběhy stavových veličin v uzavřené smyčce (P_1) při poruše



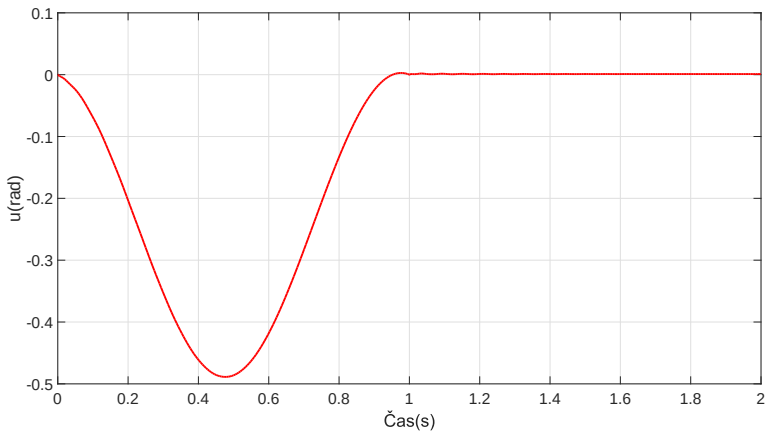
Obrázek 6.17: Průběh akčního zásahu P_1 regulátoru na $\dot{h}$



Obrázek 6.18: Průběhy stavových veličin v uzavřené smyčce (P_2) při poruše



Obrázek 6.19: Průběhy stavových veličin (P_2) v uzavřené smyčce při poruše, přiblížení



Obrázek 6.20: Průběh akčního zásahu P_2 regulátoru na $\dot{h}$

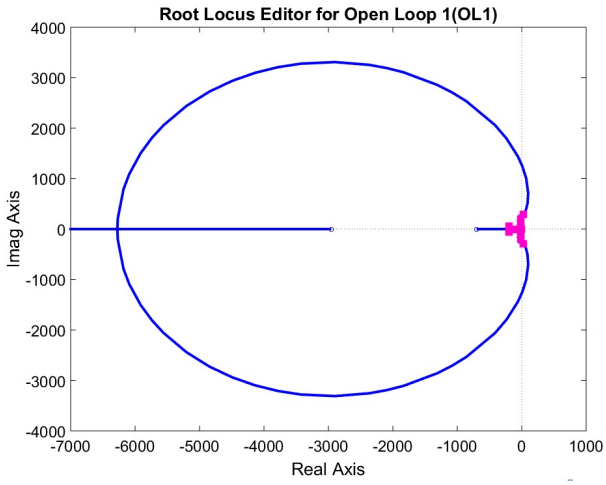
Zhodnocení. Analýza návrhu proporcionálního regulátoru od rychlosti $\dot{h}$ ukázala nedostatky uvažovaného přístupu. Výsledky je možné zlepšit za cenu zrychlení dynamiky serva a návrhu pro linearizaci na nižších rychlostech, který vede na nižší kritické rychlosti zpětnovazebního systému.

6.2.2 SISO tool

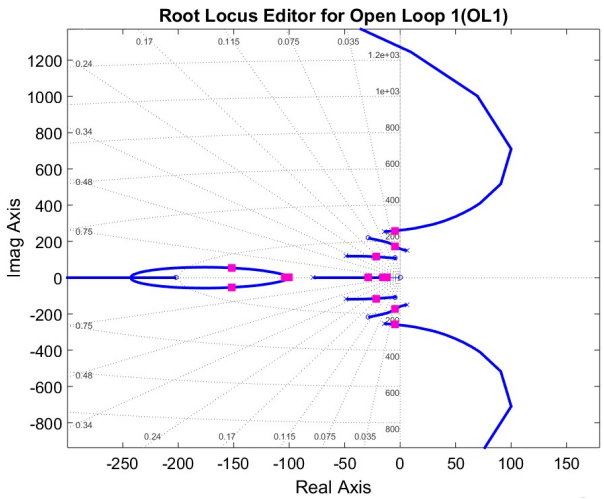
Navzdory neúspěšnému návrhu proporcionálního řízení z předchozí části bude rozebrán stejný přístup i prostřednictvím návrhu nástrojem Sisotool. Důvodem je názornost a ověření výsledků. Samotný Sisotool byl stručně popsán v podkapitole 6.1.2, nebude již tedy popisován.

P regulátor

Prvním obrázkem 6.21 je graf části komplexní roviny s trajektoriemi, na kterých se mohou pohybovat kořeny charakteristické rovnice, tedy Root Locus. Z tohoto pohledu jsou důležité postranní trajektorie, jenž tvoří jakousi kardioidu. Přiblížením k počátku, obrázek 6.22 lze stanovit, že se jedná o trajektorie kořenů příslušícím k módu torze křídla.



Obrázek 6.21: Root Locus pro systém s výstupem $\dot{h}$



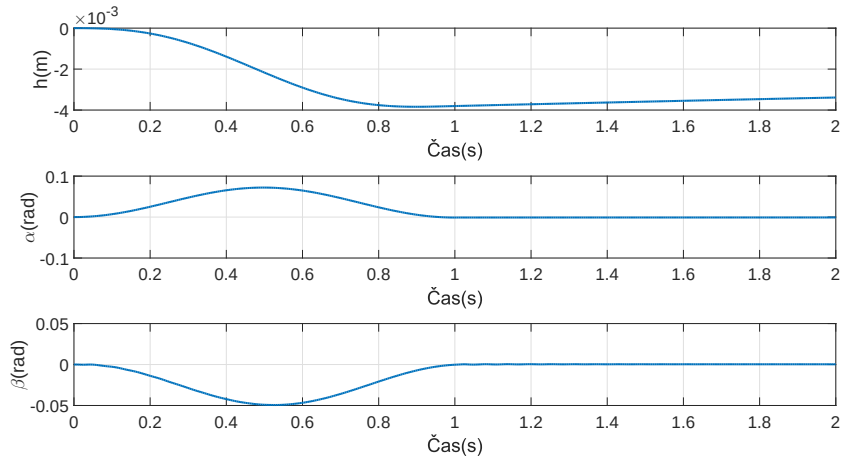
Obrázek 6.22: Root Locus pro systém s výstupem $\dot{h}$ zaměřený na imaginární osu

Tyto trajektorie také napovídají, že tlumením nestabilních kořenů (módů vertikální výchylky křídla), neboli zvyšováním zesílení a posouváním těchto kořenů do levé komplexní poloroviny se dostávají „kořeny torze křídla“ stále blíže imaginární ose, až se stanou nestabilními. Důležitým poznatkem je zmenšování tlumení jednoho módu na úkor toho druhého. Toto nechtěné chování naznačují také znaménka u síly a momentů působících v systému. Při kladné poruše na α dochází také k záporné výchylce h, která je třeba kompenzovat

zápornou výchylkou kormidla (β). Výchylka kormidla sice způsobuje sílu s opačným smyslem k výchylce h, ale vzniklý moment má stejné znaménko jako bez uvažování vychýlení kormidla. Výsledný moment je tím pádem větší než bez řízení. Problematické tlumení módů naznačují i frekvenční charakteristiky, konkrétně velký rozdíl ve fázi na modálních frekvencích. Volbou vhodných signálů pro řízení se zabývá například [Hem15].

Boční trajektorie komplexní dvojice kořenů, viditelné z obrázku 6.21 procházejí z levé komplexní poloroviny do pravé, ale opět se vrací do stabilní oblasti. Pokud je zesílení větší než 60, pak se komplexní dvojice, způsobující nestabilitu při tlumení opět dostane do levé komplexní poloroviny, ale k nule se zleva přibližuje reálný pól. Zvětšením zesílení nad 1560 se z komplexní dvojice kořenů stane reálná a reálný pól se k nule přiblíží ještě znatelněji. Takové zesílení bylo nalezeno i nástrojem pro ladění PID regulátoru. Pohyb zbylých dvou komplexních pólu je „zastaven“ komplexními nulami a pro zesílení nad 60 se jejich poloha nemění. Přítomnost reálného kořenu blízko nuly indikuje pomalou dynamiku, objevuje se zde souvislost s výsledky předchozích simulací při zesílení P_2. Zpětnovazební systém vykazoval nenulový akční zásah i po odeznění poruchy, ten velice pomalu konvergoval k nule.

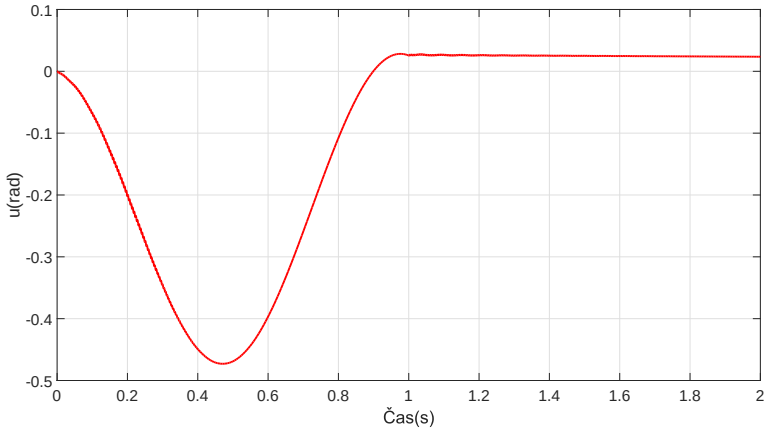
Kontrola v časové oblasti. Zesílení P_1 i P_2 již rozebráno bylo, simulace se zaměří na zesílení $P_3 = 60$, které zatím zkoumáno příliš nebylo. Z obrázku odezvy 6.23 je vidět zrychlení konvergence k nule po odeznění poruchy, přesto je návrat k nule stále příliš pomalý. Ani velikost akčního zásahu se výrazně nezměnila, v maximu činí téměř 27° (obrázek 6.24).



Obrázek 6.23: Průběhy stavových veličin v uzavřené smyčce při poruše

Zhodnocení. Práce v Sisotoolu respektive práce s grafem root locus objasnila určitá chování systému a intervaly kterých může proporcionální regulátor nabývat tak, aby stabilizoval systém. Stabilizovat systém však nestačí, je nutné brát ohled na nelinearity v systému, jednou je například zmiňovaná saturace. Akční zásah by byl i při menší poruše příliš velký. Možnou cestu

naznačil regulátor P_1. Aby bylo možné podobný regulátor s dostatečnými PM, GM uvažovat, musel by se návrh omezit na nižší rychlosti. Návrh těsně za hranicí rychlosti flutteru (145m/s) ukázal, že P_1 a zesílení v jeho blízkosti splňují PM>30° a GM>6dB, požadavek je ale pro malý přírůstek rychlosti porušen.



Obrázek 6.24: Průběh akčního zásahu P_3 regulátoru na $\dot{h}$

Kapitola 7
Řízení MIMO systému

Po kapitole 6, uvažující zjednodušenou situaci řízení se znalostí jednoho výstupu, respektive jedné stavové veličiny či její derivace, je přirozenou otázkou, jak využít znalostí více výstupů k řízení a jakých výsledků lze dosáhnout. Právě tato otázka zde bude rozebrána.

V této chvíli začne být na model, s kterým text pracuje, nahlíženo jako na MIMO systém (Multiple Input Multiple Output), tedy systém s více vstupy a více výstupy. Linearizace systému umožní převést model do tvaru s přenosovou funkcí $G(s)$, a zápis $y(s) = G(s)u(s)$, kde y je $l \times 1$ vektor výstupů, u je $m \times 1$ vektor vstupů a $G(s)$ je matice $l \times m$ přenosů. Výrazným rozdílem oproti SISO systémům, je interakce mezi vstupy a výstupy, kde každý vstup může určitým způsobem ovlivňovat každá výstup. To jak moc daný vstup ovlivňuje daný výstup zavádí pojem jakési „směrovosti“ vstupu, kterou lze studovat na základě takzvaných „singular values“ [SP05]. Konkrétně u studovaného modelu aeroelastického křídla se situace zjednodušuje o počet vstupů, který je pro řízení pouze jeden (γ_{ref}). Také robustnost je v MIMO systémech složitější otázkou, GM nebo PM o robustnosti MIMO systémů příliš neříká.

7.1 Regulátor LQR

První část kapitoly o řízení MIMO systému bude poněkud nerealisticky uvažovat dostupnost (možnost měření) všech stavových veličin. Motivací je zhodnocení možností této idealizované situace. Navíc i v tomto případě, je možné na získané výsledky navázat navržením pozorovatele a omezit se na „měřitelné veličiny“.

LQR regulátor, tedy „Linear Quadratic Regulator“ je označován řídicí zákon lineární stavové zpětné vazby, která je v určitém smyslu optimální. Pro systém popsaný rovnicí,

$$\dot{x} = Ax + Bu, z = Mx, \tag{7.1}$$

kde vektor z reprezentuje regulovanou veličinu, definujeme ztrátovou funkci $J(u)$.

$$J(u) = \int_0^\infty \left[z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t) \right] dt \tag{7.2}$$

Optimalita je ve smyslu minimalizace ztrátové funkce 7.2, kde váhové matice Q a R jsou symetrické, pozitivně definitní matice. Úkolem výrazu $z^T(t)Qz(t) = x^T(M^TQM)x$ je minimalizovat $z(t)$ a členem $u^T(t)Ru(t)$, minimalizovat $u(t)$. Matice Q vlastně určuje velikost penalizace jednotlivých stavů a matice R zase velikost penalizace vstupů. Obecně je možné uvažovat M^TQM pouze pozitivně semidefinitní, to znamená například některé stavy nepenalizovat (daný prvek na diagonále je nulový). Příkladem může být stav γ, jenž je přímo závislý na vstupu γ_{ref}, není důvod penalizaci provádět dvakrát, jednou prostřednictvím prvku v matici R a vstupu γ_{ref} a podruhé prvkem v matici Q a stavem přímo závislým na tomto vstupu γ.

Ladění regulátoru je možné prvky matic Q a R na diagonále.

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & q_n \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & r_m \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

Počet parametrů pro ladění regulátoru je velký, ale jejich interpretace je velice intuitivní. Jednoduchou poučkou pro nastavení parametrů je takzvané Brysonovo pravidlo, které říká, že hodnoty $q_i = \frac{1}{\hat{x}_i^2}$ a $r_i = \frac{1}{\hat{u}_i^2}$. Veličiny $\hat{x}_i$ reprezentují maximální přijatelné hodnoty stavu x_i a $\hat{u}_i$ zase maximální přijatelné hodnoty vstupu u_i.

Při sestavování matic Q a R, musí být dodržen požadavek kde $(A, B, \sqrt{Q}M)$ je kontrolovatelný a pozorovatelný. Pokud jsou některá vlastní čísla neřiditelná a nepozorovatelná, ale stabilní, pak pro stabilizaci stačí požadavek zmírnit na stabilizovatelnost a detekovatelnost. Podrobnější popis problematiky LQ řízení poskytuje například [SP05] nebo [AM07].

Model aeroelastického křídla, využitý k návrhu má vektor stavů x, vektor výstupů y a vektor vstupů u. Prvky vektorů jsou uvedeny v 7.4.

$$\begin{aligned} x &= (h, \dot{h}, \alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, \gamma, \dot{\gamma}, T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}, T_{31}, T_{32}, T_{41}, T_{42}, T_{51}, T_{52})^T \\ y &= (h, \dot{h}, \alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, \gamma, \dot{\gamma}, T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}, T_{31}, T_{32}, T_{41}, T_{42}, T_{51}, T_{52})^T \\ u &= (\gamma_{ref}) \end{aligned} \tag{7.4}$$

První osmice stavů je: h - vertikální výchylka křídla, α - torze křídla, γ - úhel kormidla, a jejich derivace (rychlosti). Stavy označené T_{ij} představují stavy pěti Theodorsenových funkcí (filtrů) umístěných v bloku aerodynamiky. Vstup je pouze jeden a tím je požadovaný úhel kormidla γ_{ref}. Počet stavů $n = 18$ a počet vstupů $m = 1$.

Nastavení hodnot na diagonále matic Q a R probíhalo v závislosti na dosažené rychlosti flutteru a frekvenčních charakteristikách přenosů z poruchy na veličiny h, α a β. Na nízkých kmitočtech bylo cílem, zachovat velikost zesílení a nepotlačovat na vyšších kmitočtech naopak byla snaha tlumit a potlačit frekvenční špičky. Obvyklý postup bývá opačný, tedy potlačovat poruchu na nízkých kmitočtech, nicméně zde je porucha uvažována jako přírůstek v úhlu

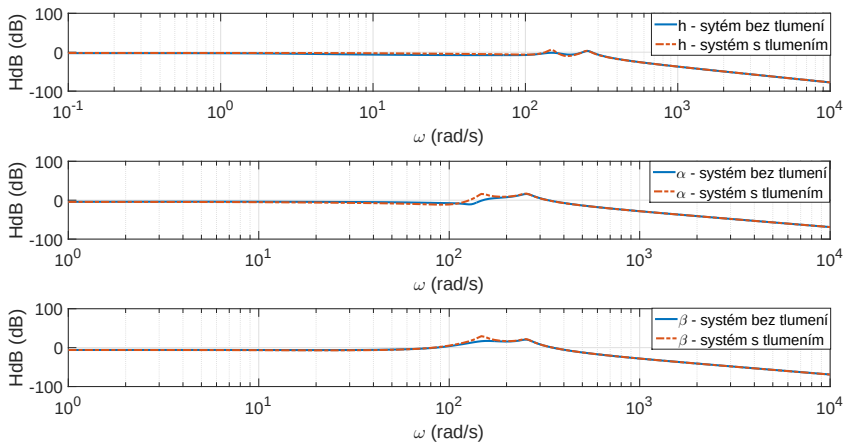
náběhu. Potlačení přenosů na nízkých kmitočtech by znamenalo zhoršení ovládání letadla, křidélko určené pouze k tlumení nežádoucích oscilací by působilo proti křidélku, ovládaném pilotem. Laděním bylo také možné posunout kritickou rychlost například o 44%, ale za cenu nestability na nižších rychlostech. Nalezené hodnoty q_i a r_i se snaží o kompromis mezi všemi požadavky. Vektory q a r, 7.5 obsahují prvky na diagonále matic Q a R.

$$\begin{aligned} q &= 10^{-3}(1,\ 1,\ 10,\ 10,\ 0.1,\ 0.1,\ 10^{-9},\ 10^{-9},\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1) \\ r &= (12) \end{aligned} \tag{7.5}$$

7.1.1 Analýza vlastností zpětnovazebního systému

S takto nastavenými hodnotami (7.5) matic, je nová rychlost flutteru $V_f = 183\text{m/s}$. Kritická rychlost byla LQ regulátorem s danými parametry posunuta o 27%.

Frekvenční analýza. Frekvenční charakteristiky sestavené stejným způsobem jako u předchozích návrhů naznačují chování zpětnovazebního systému při poruše. Prní dva módy byly značně zatlumeny (minimálně o 10dB u všech tří charakteristik). Mód kormidla byl zatlumen minimálně, nicméně právě tento mód je frekvenčně vzdálen, oproti prvním dvou módům, které způsobují nestability.

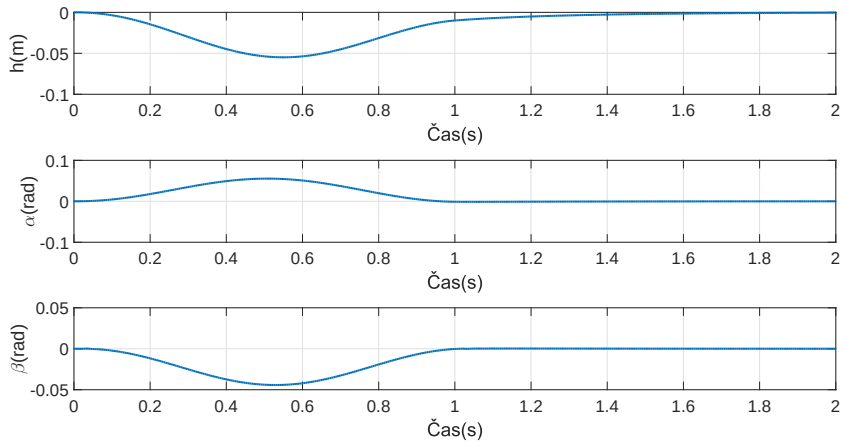


Obrázek 7.1: Bodeho amplitudové charakteristiky přenosů z poruchy na stavové veličiny

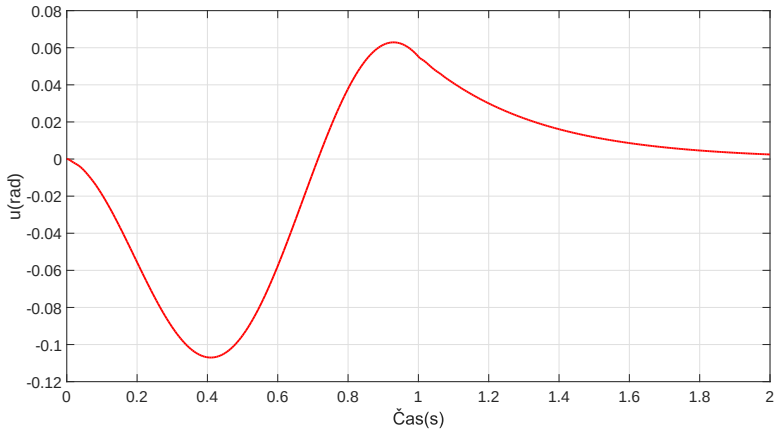
Obrázek 7.1, také potvrzuje, že regulátor nemění hodnotu zesílení u přenosů z poruchy na nízkých rychlostech, důvod požadavku byl již zmíněn. Regulátor nemění ani rezonanční frekvence systému, ty je nutné také zachovat.

Kontrola v časové oblasti. Simulace modelu aeroelastického křídla s LQ regulátorem (obrázky 7.2, 7.3) ukazují, že se systém po odeznění poruchy

dostane do nuly. Akční zásah není příliš velký, maximum se pohybuje okolo 6°, a po odeznění poruchy také konverguje k nule.



Obrázek 7.2: Průběhy stavových veličin v uzavřené smyčce při poruše



Obrázek 7.3: Průběh akčního zásahu LQ regulátoru

Zhodnocení. Oproti například zkoumaným variacím na PID regulátor, má LQ řízení výhodu v zaručení stability zpětnovazební smyčky, ať jsou parametry regulátoru jakékoli. Navzdory této vynikající vlastnosti, není samotný návrh tak triviální, z důvodu určitých nároků na řízený systém. Návrh usnadňuje fyzikální interpretace diagonálních prvků matice Q a R, kterými lze určitým způsobem tvarovat frekvenční charakteristiky systému a penalizovat velikost akčního zásahu.

Regulátor bude vždy optimální vůči zadanému kritériu, ale návrh má mnoho stupňů volnosti a stanovit „nejlepší“ kritérium (Q, R), je velice obtížné. Hodnoty 7.5 definují kritérium, které vede k možnému řídicímu zákonu.

7.2 Návrh pomocí H_∞

Další metodou, která je v práci využita, je H_∞ řízení. Návrh zpětnovazebního řízení H_∞, stejně jako H_2, se definuje v různých variantách. Myšlenkou metod je, minimalizovat normu systému (ve smyslu H_∞, nebo H_2) přes regulátory K. Konfiguraci znázorňuje obrázek 7.5, kde P je zobecněná soustava (řízený systém) a C0 je regulátor. Soustava obsahuje dvojici vstupních veličin w, u a dvojici výstupních veličin z, v. Vstupní veličinou do systému (řízení) je u a vektor w označuje takzvané „exogenní“ vstupy, což jsou často uměle definované vstupní signály, například vstup poruch, nebo reference. Signály vektoru z je snahou minimalizovat, definují „chybu“ (error), výstup v je měřený výstup systému.

$$\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P12(s) \\ P_{21}(s) & P22(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \qquad (7.6)$$
$$u = K(s)v$$

Přenos zpětnovazebního systému z w na z je dán LFT (linear fractional transformation).

$$z = F_l(P, K)w, \qquad (7.7)$$

kde

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}. \qquad (7.8)$$

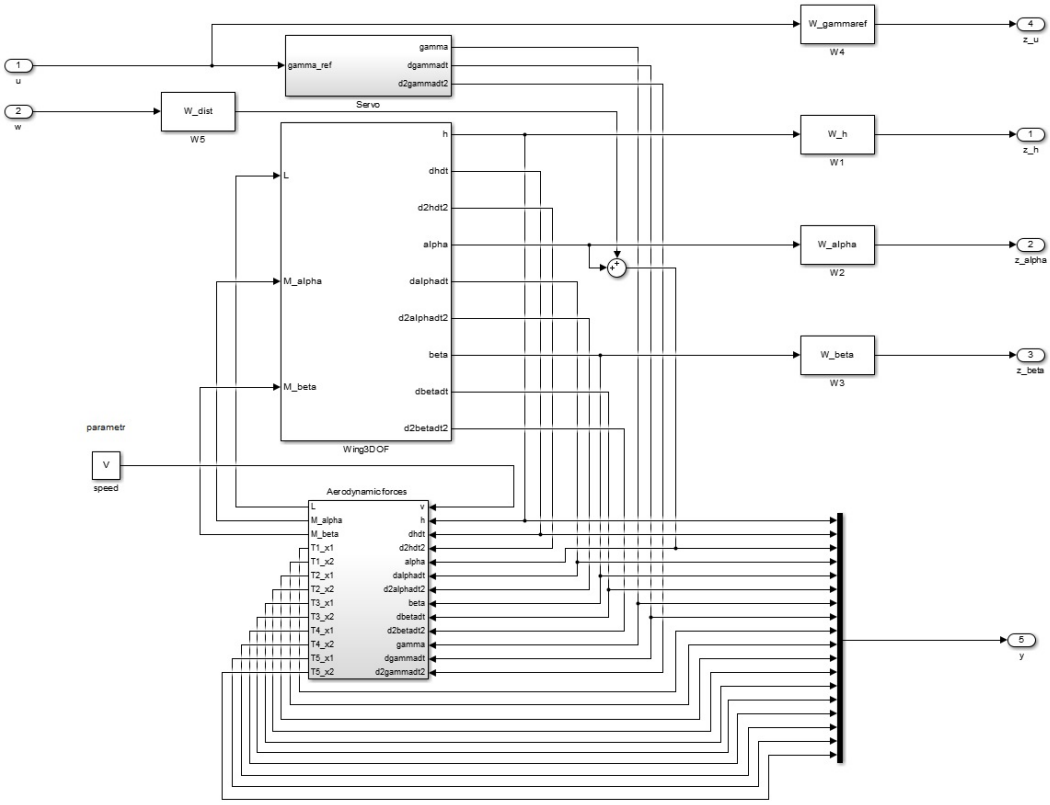
Řízení H_∞ spočívá v minimalizaci H_∞ normy $F_l(P, K)$. Požadavky na soustavu P ani optimalizační algoritmy v tomto textu nebudou uváděny, podrobněji jsou rozebrány například v [SP05].

Klasické metody návrhu řízení vyžadují znalost informace o tom, čeho chceme řízením dosáhnout, ale také jakým způsobem to je možné. V případě „moderního“ návrhu stáčí pouze umět specifikovat požadavky. Nástrojem pro specifikaci požadavků jsou filtry W začleněné do soustavy P. Obrázek 7.4 vykresluje schéma zobecněné soustavy, skládající se z dynamiky elastického křídla, bloku aerodynamiky (s integrovanými Theodorsenovými funkcemi), dynamiky serva a zmíněných filtrů umístěných na signálech, které chceme řízením ovlivnit. Mimo vstupy w a u do soustavy vstupuje také samozřejmě parametr V (rychlost).

Úloha nalezení H_∞ optimálního regulátoru je definována jako hledání stabilizujících regulátorů, které minimalizují

$$\| F_l(P, K) \|_\infty = \max_\omega \bar{\sigma}(F_l(P, K)(j\omega)), \qquad (7.9)$$

tedy minimalizace maxima singulárního čísla $F_l(P(j\omega), K(j\omega))$. Není však zaručeno, že nalezený stabilizující regulátor bude stabilní. Tato úloha je navíc výpočetně náročná, a proto se omezuje na hledání suboptimálního řešení, pro které platí $\| F_l(P, K) \|_\infty < \gamma$, kde $\gamma > \gamma_{min}$. Nalezený regulátor je stejného



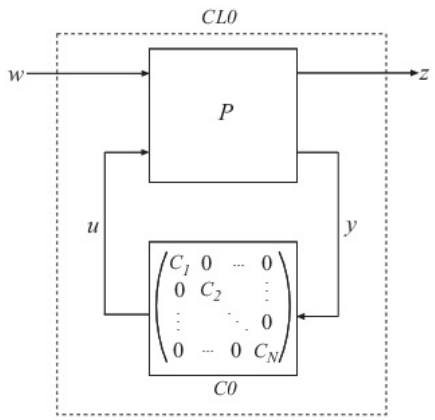
Obrázek 7.4: Zobecněná soustava P

řádu jako soustava P, což odpovídá součtu řádů řízeného systému a všech filtrů, které jsou v P použity.

Práce využívá k řešení úlohy hledání suboptimálního H_∞ regulátoru, nástroj „hinfstruct“, jenž je součástí Robust Control Toolboxu v Matlabu. Výhodou nástroje je, možnost volby „struktury“ regulátoru, včetně jeho řádu a podmínek pro stabilitu hledaného regulátoru. Úloha nástroje hinfstruct je naznačená obrázkem 7.5. Prvky na diagonále C_i mohou být fixní nebo laditelné, mohou to být konstanty, nebo předpisy určité dynamiky, regulátor, respektive jeho strukturu je v podstatě nutné zadat, algoritmus pak provede jeho ladění. Kromě volitelné struktury nástroj dovoluje drobná nastavení samotného algoritmu, jako je například maximální počet iterací nebo počáteční nastavení regulátoru. Hinfstruct hledá pouze suboptimální řešení, z toho důvodu je nastavitelná i volba náhodného počátečního nastavení regulátoru, které se provede s nastaveným opakováním. Snahou je předejít uváznutí v lokálním minimu. Podrobněji se lze o algoritmu dočíst v [AN06]. Zajímavé porovnání a ukázka návrhu H_∞ je popsána v [Me13].

7.2.1 Volba váhovacích filtrů W

Jak již bylo řečeno, umístění a tvar váhovacích filtrů stanovuje požadavky na navrhovaný regulátor. Princip návrhu bude vysvětlen na příkladu systému,



Obrázek 7.5: Soustava systému a strukturovaného regulátoru

kde je známé místo kterým do systému vstupuje porucha a také známý frekvenční charakter poruchy. Pokud má porucha nízkofrekvenční charakter a je nutné omezit citlivost systému na tuto poruchu, pak je požadavek realizován vložením filtru do cesty, kde porucha vstupuje. Omezení na frekvenční charakteristiku poruchy vytváří frekvenční charakteristika $1/W$, kde W je váhovací filtr. Graf amplitudové charakteristiky říká maximální hodnotu zesílení vstupující poruchy do systému napříč frekvencemi. Zjednodušeně řečeno, je-li cílem zmenšit vliv poruchy na nízkých frekvencích, je třeba do cesty poruchy vložit filtr, který na těchto frekvencích zesiluje. Stejným principem jsou navrženy i filtry tvořící výstupní veličinu z. Požadavky na signály v systému (stavy, regulační odchylky a podobně) ve frekvenční oblastí vyjadřují filtry $1/W_i$.

Soustava P z obrázku 7.4 obsahuje filtr $W_{\alpha_{dist}}$, kterým je možné ovlivnit vliv poruchy na soustavu v závislosti na frekvenci. Filtrem na vstupu do systému $W_{\gamma_{ref}}$ je zase stanoven požadavek na velikost akčního zásahu v závislosti na frekvenci. Zbylá trojice filtrů dává požadavek na chování ve frekvenční oblasti stavů h, α a β.

Souvislost mezi amplitudovou frekvenční charakteristikou a tvarem filtru

Několik dalších řádků si klade za cíl vysvětlit samotný návrh filtru, ze znalosti (z požadavku) amplitudové frekvenční charakteristiky. Filtry budou ve tvaru

$$W(s) = K\frac{(\frac{s}{\omega_{n_1}}+1)^{i_1}(\frac{s}{\omega_{n_2}}+1)^{i_2}...(\frac{s}{\omega_{n_m}}+1)^{i_m}}{s^N(\frac{s}{\omega_{d_1}}+1)^{j_1}(\frac{s}{\omega_{d_2}}+1)^{j_2}...(\frac{s}{\omega_{d_p}}+1)^{j_p}}, \tag{7.10}$$

kde ω_{n_a} je a-tá nula (kořen čitatele) násobnosti $i_a, i_a > 0$, ω_{d_a} je a-tý pól (kořen jmenovatele) násobnosti $j_a > 0$ a K je zesílení na nulové frekvenci. Člen s^N je v případě $N > 0$ pól v nule s násobností N a pro $N < 0$, nulou v nule s násobností $-N$.

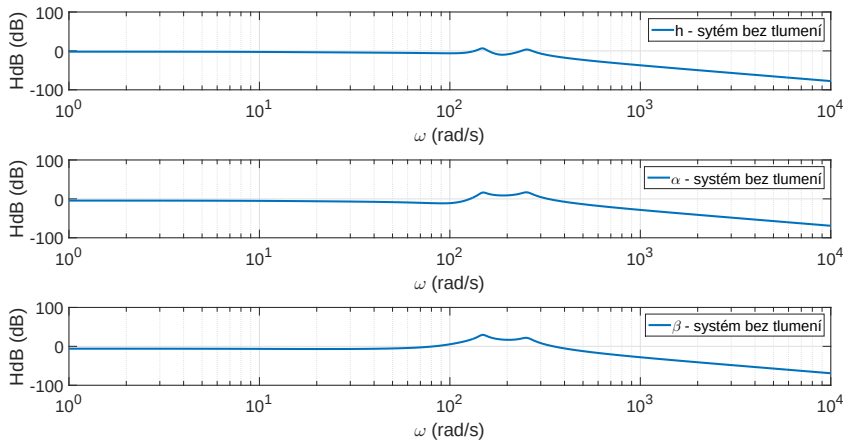
Zesílení pro nízké frekvence $K = \lim_{s\to 0} W(s)$ určuje začátek asymptoty, který je v $20\log(K)$. Pokud je $N = 0$ pak je asymptota rovnoběžná s frekvenční

osou až do nejbližší frekvence ω_n nebo ω_d. Pro kladná N, kdy se jedná o pól v nule, má asymptota zápornou směrnici a její velikost je závislá na mocnině N. Jednonásobnému pólu přísluší klesání s rychlostí -20dB/dec a každý další násobek zvětší sklon asymptoty o dalších -20dB/dec. Když je N záporné, pak je kořen nulou a asymptota má kladnou směrnici s velikostí 20dB/dec pro $N = -1$ a opět s každou další mocninou roste sklon o 20dB/dec. Sklon asymptoty je změněn na nejbližší další frekvenci ω, v tomto bode se asymptota „láme“ v kladném smyslu pro ω_n a v záporném pro ω_d. Sklon se změní o 20dB/dec pro jednonásobný kořen a pro větší násobnosti je princip stejný jako u kořenu v nule.

Podstatnou připomínkou je, že stupeň čitatele musí být menší nebo roven stupni jmenovatele, aby byl filtr realizovatelný.

7.2.2 Stavová zpětná vazba a H_∞

První experiment s metodou H_∞ a nástrojem hinfstruct bude zaměřen na návrh stavové zpětné vazby. Motivací je porovnat stavové zpětné vazby navržené metodou LQ a H_∞ a demonstrovat návrh s nástrojem hinfstruct. Struktura systému je nakreslena v obrázku 7.5. Stavovou zpětnou vazbou bude snaha systém stabilizovat pro rychlosti větší než je V_f a zlepšit jeho vlastnosti, to znamená potlačit rezonanční frekvence. Vodítkem pro návrh budou frekvenční charakteristiky přenosů z poruchy na stavové veličiny h, α a β při rychlosti $1.1V_f$ viz. obrázky 7.6. Pro nízké kmitočty je opět požadována nezměněná hodnota zesílení z již uvedených důvodů. Na vyšších kmitočtech bude zase snahou potlačit vliv módů systému.



Obrázek 7.6: Amplitudové frekvenční charakteristiky pro přenos z poruchy, při rychlosti 158.54m/s

Volba váhovacích filtru

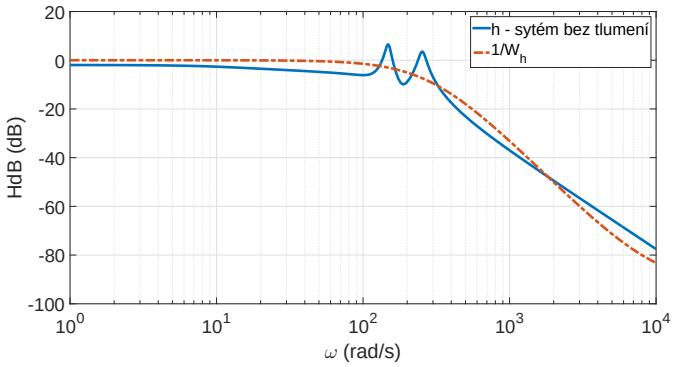
Volba filtrů je klíčovou záležitostí při návrhu touto metodou. Samotný proces návrhu probíhal iterativně. Nejprve byly na základě frekvenčních charakteristik 7.6 stanoveny počáteční požadavky pro dané přenosy a na jejich základě navrženy filtry s požadovanými frekvenčními charakteristikami inverzí těchto filtrů. Po sestavení filtrů a nalezení regulátoru byly zkontrolovány změny ve stejných frekvenčních charakteristikách, ale již pro uzavřenou smyčku. Nevyhovující tvar charakteristik byl upravován tvarováním frekvenční charakteristiky filtrů a hledáním nových zákonů řízení. Takto upravené filtry popisuje následující text.

Filtr W_h. U frekvenční charakteristiky přenosu z poruchy na vertikální výchylku je cílem potlačit dvě viditelné rezonanční špičky na frekvencích 148 rad/s a 260 rad/s. Požadované maximální zesílení naznačuje frekvenční charakteristika $1/W_h$, ta má přenos 0dB až do frekvence 290 rad/s kde začíná tlumit. Sklon asymptoty byl zvolen -60 dB/dec. U $1/W_h$ jde o trojnásobný pól, filtr v systému P je ale W_h, ve skutečnosti jde tedy o trojnásobnou nulu. Realizovatelnost filtru zajistí trojnásobný pól na vysoké frekvenci, například 10^4 rad/s.

Přenos filtru je

$$W_h(s) = \frac{(\frac{s}{290}+1)^3}{(\frac{s}{10000}+1)^3}. \tag{7.11}$$

Názorněji situaci popisuje obrázek 7.7 s frekvenční amplitudovou charakteristikou přenosu z poruchy na h a charakteristikou W_h.

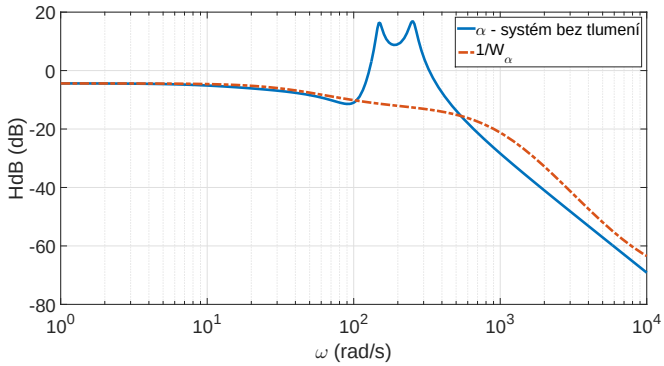


Obrázek 7.7: Amplitudové frekvenční charakteristiky pro přenos z poruchy a přenos filtru $1/W_h$

Filtr W_α. V tomto případě se osvědčil systém kde $1/W_\alpha$ má na nízkých frekvencích totožné zesílení jako přenos z poruchy na α, to jest -4.4 dB. Konstantu K, podle tvaru 7.10 je možné vypočítat z $K = 10^{(\frac{-4.4}{20})}$. Pokles charakteristiky $1/W_\alpha$ začíná na 40 rad/sec, na 100 rad/s se charakteristika narovnává a začne klesat s rychlostí 60 dB/dec na frekvenci 1000 rad/s.

Realizovatelnost zaručí pól v 10^4 rad/s. Přenos a frekvenční charakteristiky viz. 7.8.

$$W_\alpha(s) = \frac{1}{10^{(\frac{-4.4}{20})}} \frac{(\frac{s}{40}+1)(\frac{s}{1000}+1)^3}{(\frac{s}{100}+1)(\frac{s}{10000}+1)^3} \tag{7.12}$$

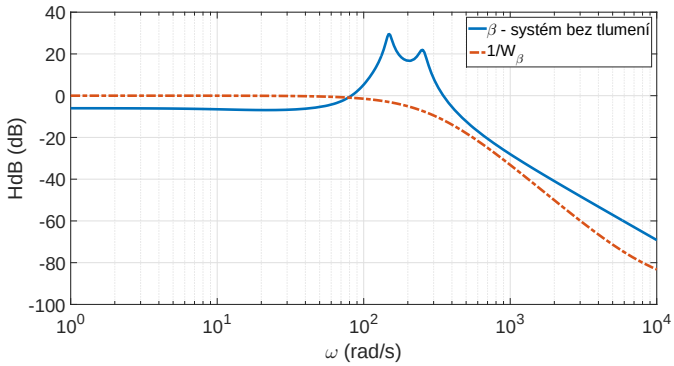


Obrázek 7.8: Amplitudové frekvenční charakteristiky pro přenos z poruchy a přenos filtru $1/W_\alpha$

Filtr W_β. Filtr W_β, který váhuje vliv poruchy na výchylku kormidla má stejný tvar jako W_h.

$$W_\beta(s) = \frac{(\frac{s}{290}+1)^3}{(\frac{s}{10000}+1)^3} \tag{7.13}$$

Vykreslením frekvenčních charakteristik je získán obrázek 7.9.



Obrázek 7.9: Amplitudové frekvenční charakteristiky pro přenos z poruchy a přenos filtru $1/W_\beta$

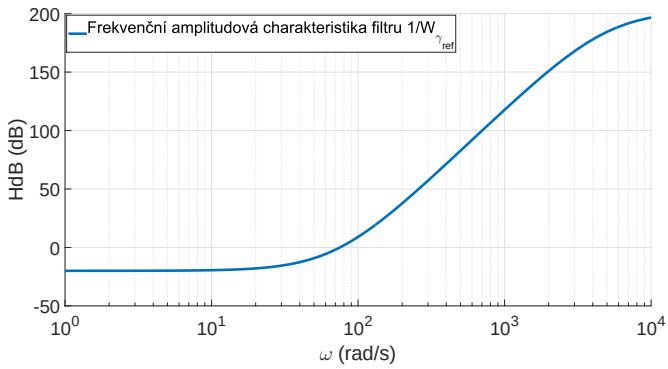
Filtr $W_{\alpha_{dist}}$. Počáteční tendence vedly k přenosům, které měly větší zesílení na vyšších frekvencích (okolo modálních frekvencí). To mělo zajistit lepší odolnost vůči vysokofrekvenčním poruchám, lepší výsledky ale přineslo jednotkové zesílení (0dB) napříč všemi kmitočty.

$$W_{\alpha_{dist}}(s) = 1 \tag{7.14}$$

Filtr $W_{\gamma_{ref}}$. Posledním použitým filtrem je $W_{\gamma_{ref}}$, který váží velikost akčního zásahu. Nízké frekvence mají zůstat nezměněny, jinak řečeno regulátor by neměl na nízkých frekvencích generovat akční zásah. Inverzní přenos filtru proto na nízkých frekvencích tlumí s hodnotou zesílení -20 dB a na frekvenci 70 rad/s začne zesilovat, aby systém dokázal potlačit poruchy na vyšších frekvencích.

$$W_{\gamma_{ref}}(s) = \frac{1}{10}\frac{(\frac{s}{5000}+1)^6}{(\frac{s}{70}+1)^6} \tag{7.15}$$

Amplitudová frekvenční charakteristika systému 7.15 je následující (obrázek 7.10).



Obrázek 7.10: Amplitudová frekvenční charakteristika pro přenos filtru $1/W_{\gamma_{ref}}$

Zajímavá je ukázka, kde je zesílení filtru na nízkých kmitočtech rovno 0 dB, to znamená filtr zde nezesiluje. Výsledek bude diskutován v části věnující se frekvenční analýze systému s regulátorem.

Návrh regulátoru

V okamžiku, kdy jsou navrženy váhovací filtry a je k dispozici model systému, může být sestaven blok P, viz obrázek 7.4.

Návrh se týká stavové zpětné vazby, proto výstupy v obsahují všechny stavy původního systému. K získání stavového popisu pomůže simulinkové schéma a funkce linmode, která provede linearizaci celého systému (opět pro rychlost $1.1V_f$).

Druhou částí je samotný regulátor. U stavové zpětné vazby to je řádkový vektor K tvořený reálnými konstantami k_i. V Matlabu jde vektor laditelných reálných konstant zadefinovat funkcí „realp“, možné je i zadání počáteční hodnoty vektoru (například z LQ návrhu).

Obě části dokáže propojit funkce „feedback“, zde je nutné správně zadat jaký výstup (v) se má propojit s daným vstupem (u). Pak už jen stačí definovat

správný vstup do systému (w) a výstup z. Výsledkem je zpětnovazební systém s laditelnou stavovou zpětnou vazbou CL0.

Zadání úlohy. Vlastní zadání úlohy vyžaduje pouze systém CL0 a objekt „options“ získaný funkcí hinfstructOptions. Podrobnější informace o funkcích a nastavitelných parametrech poskytuje Help Matlabu, nebudou tak v práci podrobněji popisovány. Hodnoty parametrů s jimiž byl návrh proveden obsahuje tabulka.

Parametr	Hodnota
'MaxIter'	300
'RandomStart'	100
'UseParallel'	1
'TargetGain'	0
'MaxFrequency'	inf
'MinDecay'	10^{-7}

Tabulka 7.1: Nastavení funkce hinfstruct

Funkce hinfstruct kromě objektu CL, který obsahuje systém CL0 s naladěnými parametry, vrací i hodnotu γ, což je nejlepší dosažená hodnota H_∞ normy uzavřené smyčky. Snahou je dosáhnout $\gamma = 0$, to však nemusí být možné. Velikost γ dává jakousi informaci o míře úspěchu naladění parametrů s ohledem na požadavky zadané filtry. Obecně nelze tvrdit, že menší γ zaručí lepší regulátor, právě díky závislosti na volbě filtru.

Analýza regulátoru

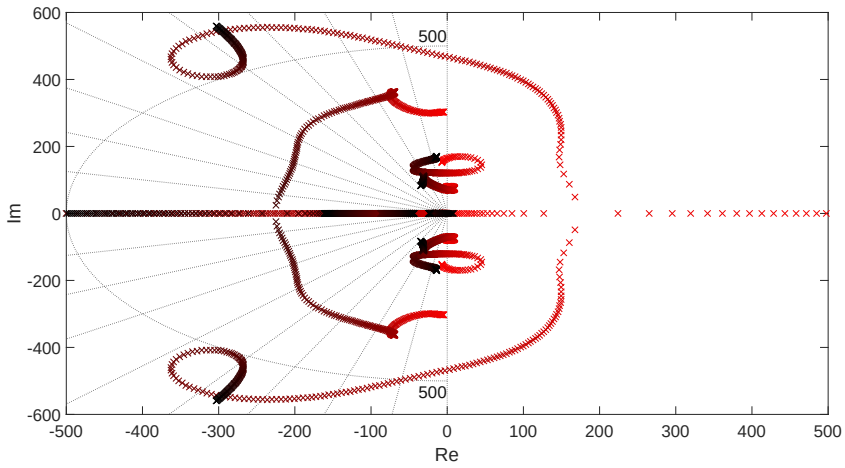
Ze sta náhodných startů algoritmu byl nalezen regulátor s minimální hodnotou $\gamma = 6.79$. Kritická rychlost byla posunuta na 248 m/s, to znamená o 72%. Další vlastnosti systému rozebere následující text.

Analýza v komplexní rovině. Zkoumáním polohy pólů uzavřené smyčky v závislosti na rychlosti byla zjištěna maximální rychlost, kde je systém ještě stabilní, ale také rychlost minimální. Cenou za poměrně velké posunutí kritické rychlosti je vznik nestability na rychlostech, kde by byl systém bez řízení stabilní.

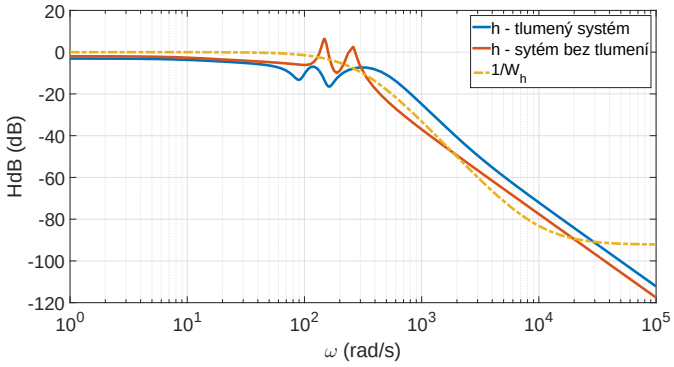
Obrázek 7.11, také napovídá, že komplexní dvojice (módy systému), jsou stále poměrně dobře zatlumené, za nestabilitou stojí reálný pól, překračující imaginární osu při nové kritické rychlosti.

Frekvenční analýza. Frekvenční charakteristiky přenosů z poruchy na stavové veličiny zachycují obrázky 7.12 až 7.14. Pro porovnání jsou součástí obrázku charakteristiky uzavřené smyčky i systému bez řízení.

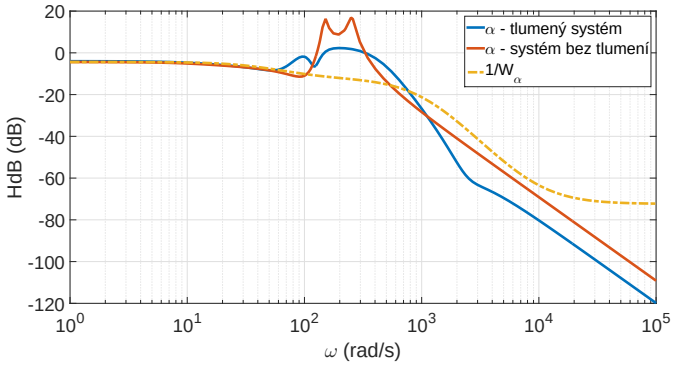
Zvolené váhovací filtry zatlumily frekvenční špičky bez výrazného posunutí frekvencí. Nežádoucí by mohla být zvýšená citlivost na frekvenci 100 rad/sec



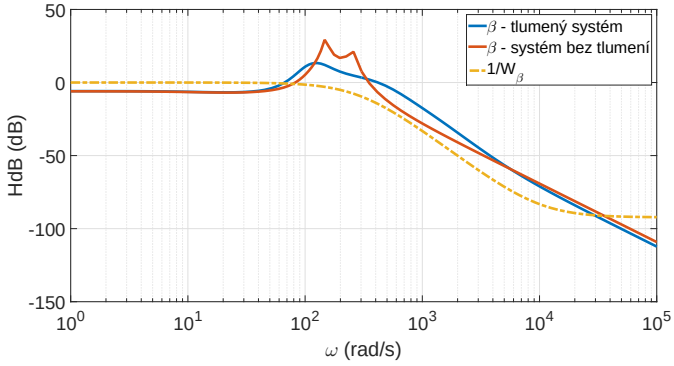
Obrázek 7.11: Komplexní rovina s póly uzavřené smyčky od 0m/s do 255m/s



Obrázek 7.12: Amplitudová frekvenční charakteristika přenosu z poruchy na h

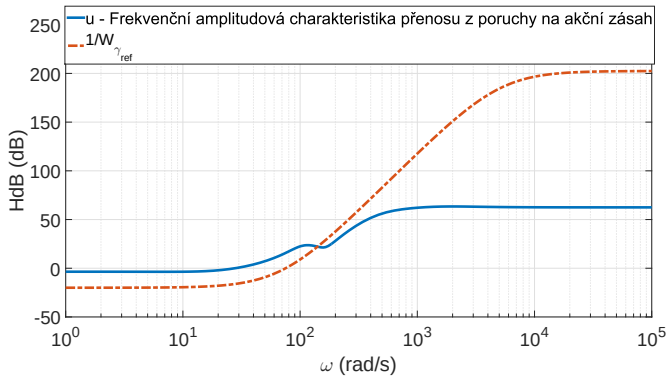


Obrázek 7.13: Amplitudová frekvenční charakteristika přenosu z poruchy na α



Obrázek 7.14: Amplitudová frekvenční charakteristika přenosu z poruchy na β

u frekvenční charakteristiky přenosu z poruchy na torzi křídla. Návratem k otázce volby váhovacího filtru na vstupu systému P, to znamená filtru, kterým je váhována velikost akčního zásahu napříč frekvencemi, je frekvenční charakteristika přenosu z poruchy na akční zásah u na obrázku .

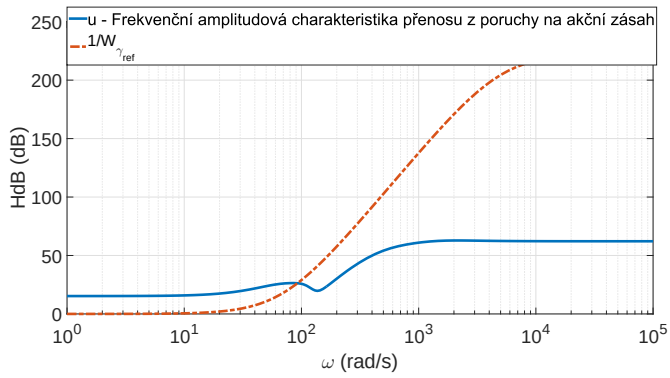


Obrázek 7.15: Amplitudová frekvenční charakteristika přenosu z poruchy na u

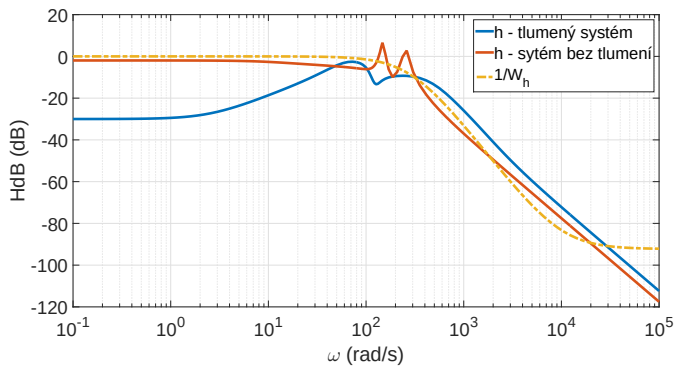
Mimo jiné je vidět souvislost mezi zvýšenou citlivostí na poruchu na frekvenci 100 rad/s u torze křídla a „velikostí“ akčního zásahu. Jiným důvodem vykreslení obrázku 7.15 je demonstrace citlivosti návrhu na volbu váhovacího filtru. Bude-li uvažován filtr, kde přenos na nízkých frekvencích odpovídá 0 dB, dojde ke změně frekvenční charakteristiky viditelné v obrázku 7.16.

Graf jasně naznačuje, že má porucha na nízkých frekvencích vliv na velikost akčního zásahu (zesílení je větší než 0 dB). To samozřejmě způsobí i ovlivnění dalších frekvenčních charakteristik, příkladem může být obrázek 7.17. Změna velikosti zesílení nízkých kmitočtů je nežádoucí, proto je upravený filtr nevhodný.

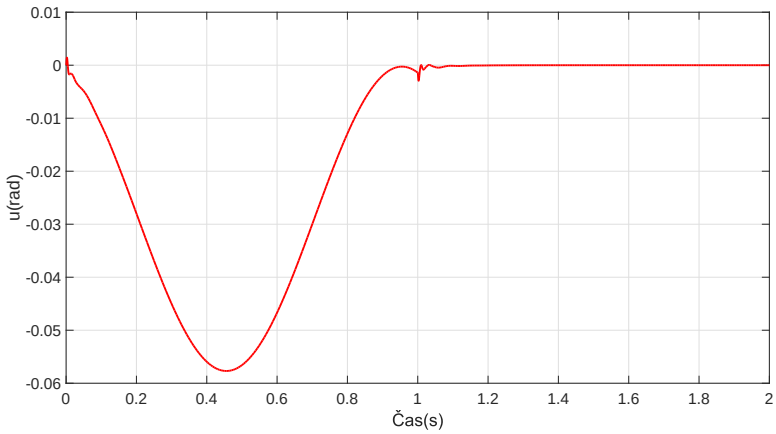
Kontrola v časové oblasti. Numerické simulace prozradily chování řízeného systému při poruše. Maximální výchylka řízeného křidélka při potlačení poruchy nepřekročila 3.5°. Po odeznění poruchy a drobném přechodovém jevu se hodnota akčního zásahu ustálila na nule, situaci zobrazuje průběh 7.18. Vliv poruchy na výchylky stavových veličin zachycují zase obrázky 7.19.



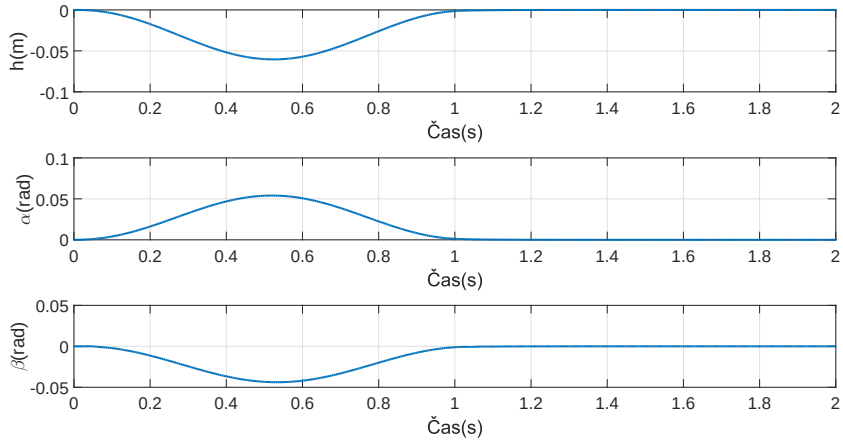
Obrázek 7.16: Amplitudová frekvenční charakteristika přenosu z poruchy na u s upraveným $W_{\gamma_{ref}}$



Obrázek 7.17: Amplitudová frekvenční charakteristika přenosu z poruchy na h s upraveným $W_{\gamma_{ref}}$



Obrázek 7.18: Akční zásah stavové zpětné vazby



Obrázek 7.19: Průběhy stavových veličin v uzavřené smyčce při poruše

Zhodnocení. Návrh stavové zpětné vazby metodou H_∞ ukázal mnohdy značně rozdílné vlastnosti oproti LQ návrhu. Navzdory určité fyzikální interpretaci prvků v matici Q a R je tvarování frekvenčních charakteristik těmito členy obtížnější než filtry začleňovanými do systému. Ani tvorba systému P, respektive váhovacích filtrů nemusí být triviální a dosažení požadovaných výsledků ve frekvenční oblasti vyžaduje určitý iterativní přístup a porozumění systému.

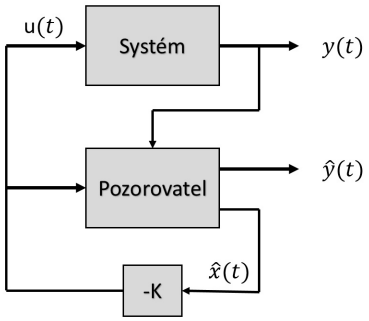
Navržený zákon řízení dokáže rychleji potlačit poruchu, charakter akčního zásahu u LQ a H_∞ je viditelně rozdílný. Nová kritická rychlost je také výrazně větší než v případě LQ návrhu. Lepší vlastnosti systému na vysokých rychlostech jsou ale na úkor nestability na rychlostech nižších.

Porovnání metod je nutné brát s ohledem na vliv parametrů samotného návrhu. Vlastnosti regulátorů navržených různým způsobem mnoho nevypovídají o vlastních metodách, protože jsou tyto vlastnosti závislé na návrhu (na volbě parametrů/tvaru filtrů atd.). Možným kritériem může být náročnost návrhu a jeho možnosti. Například přínosem strukturovaného návrhu (H_∞) je možnost využít k řízení pouze některé signály (nemusí to ani být stavy), což LQR jako takové neumožňuje.

7.3 Pozorovatel stavu

Předpoklad o možnosti měření všech stavů byl nerealistický, díky principu separace je ale možné navržené stavové zpětné vazby použít i bez možnosti měření všech stavů. Řešení je v použití pozorovatele stavu, který dokáže rekonstruovat/odhadovat stavy, které nejsou k dispozici z měření. Pozorovatel stavu je systém, skládající se z modelu soustavy a výstupní injekce (zpětné vazby), stanovující dynamiku odhadu. Úplné schéma systému se skládá z řízené soustavy, pozorovatele stavu a stavové zpětné vazby. Schéma ukazuje obrázek 7.20. Ze struktury systému je jasné, že řád regulátoru je stejný jako řád

soustavy. I s možností snížení řádu, použitím pozorovatele k odhadovaní pouze stavů, které nejsou měřeny, může tento návrh vést na regulátory zbytečně vysokých řádů.



Obrázek 7.20: Systém s pozorovatelem stavu a stavovou zpětnou vazbou

Metodika návrhu pozorovatele stavu (Kalmanova filtru) je dobře známá a věnuje se jí nespočet literatury, například [SIm06], text chce pouze naznačit možný přístup, proto nebude problematika Kalmanova filtru podrobněji popisována.

Za předpokladu použití pozorovatele stavu navrženém na stejné rychlosti jako jsou navržené stavové zpětné vazby ($1.1V_f$) a bez uvažování „šumů“ systému a měření, budou stavové zpětné vazby fungovat totožně jako v případě bez pozorovatele, v odhadu nebude chyba. Dynamika systému je však závislá na rychlosti a za stejných předpokladů, ale jiné rychlosti návrhu a jiné rychlosti letu se bude odhad stavů lišit. To znamená, že jsou vlastnosti uzavřené smyčky mimo rychlost návrhu rozdílné oproti systému, kde měřený výstup obsahoval všechny stavy. Proto, aby se mohl systém s pozorovatelem alespoň přiblížit výsledkům, kde byly stavy měřitelné, musí být také jeho dynamika závislá na rychlosti. Správná funkce pozorovatele je navíc ovlivněna měřitelným výstupem, poruchami, vstupujícími do systému a znalostí charakteru těchto poruch.

Relativně složitý návrh pozorovatele, který by dokázal rekonstruovat stavy napříč rychlostmi a vysoký řád řídicího systému, je motivací k přímému využití měřitelného výstupu a návrhu strukturovaného MIMO řízení.

7.4 Strukturované MIMO řízení a H_∞

Tato část kapitoly věnovaná řízení MIMO systémů se zaměří na využití „měřitelných“ signálů k účelům řízení. Bude stanovena struktura regulátoru a pomocí zobecněné soustavy P a nástroje hinfstruct, určeny koeficienty regulátoru. Významnou výhodou popisovaného přístupu je odstranění nutnosti implementace pozorovatele stavu. Argument nabude ještě většího významu v kapitole o řídicím systému parametrizovaným rychlostí.

Jako měřitelný výstup byl již určen vektor

$$y_m = (\ddot{h}, \beta, \dot{\beta}, \ddot{\alpha}, \gamma, \dot{\gamma}). \tag{7.16}$$

Nejprve bude využita pouze část vektoru, aby mohl být demonstrován vliv znalosti některých signálů. Doposud totiž nebyla rozebrána problematika pozorovatelnosti a řiditelnosti stavu, která je pro zatlumení módů systému důležitá. Intuitivním příkladem může být uvažovaný systém, kde je měřené pouze $\ddot{h}$, to poskytuje určitou informaci o výchylce křídla, ale neříká nic o torzi ani poloze křidélka. Jakýkoli zákon řízení pak může jen velice obtížně reagovat na oscilace v torzi křídla, nebo v poloze kormidla.

V dalším textu budou zákony řízení pro MIMO systém označovány jako „Řízení MIMO-X“, kde X značí počet signálů použitých k řízení. Také budou definovány měřitelné výstupy y_x, specifikující signály použité k řízení.

7.4.1 Řízení MIMO-3

Prvním příkladem strukturovaného MIMO řízení s měřitelným výstupem

$$y_3 = (\ddot{h}, \beta, \dot{\beta}), \tag{7.17}$$

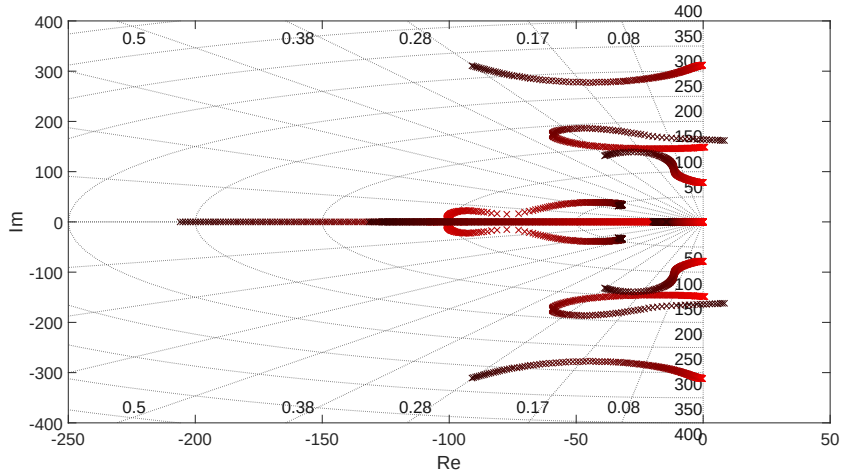
využívá k řízení trojici signálů. Stejně jako u stavové zpětné vazby, bude k návrhu použita soustava P (obrázek 7.4) a struktura s proporcionálními regulátory. Oproti stavové zpětné vazbě je výstupem soustavy P, i $\ddot{h}$, což je derivace stavu. Stavy, které nejsou k řízení využity nejsou ani součástí výstupu soustavy. Váhovací filtry byly zvoleny totožné jako v předchozím příkladě, tedy 7.11, 7.12, 7.13, 7.15 a 7.14. Po sestavení P a CL0 je princip návrhu stejný jako v části o stavové zpětné vazbě a H_∞. Nalezenému zákonu řízení přísluší $\gamma = 13.4$.

Analýza regulátoru

Stejně jako u jiných popisovaných návrhů, bude i zde provedena analýza systému s nalezeným regulátorem. Kromě standardních parametrů, jakými jsou například nová kritická rychlost, tvary frekvenčních charakteristik, velikost akčního zásahu a podobně, je zajímavé sledovat rozdíly mezi dosaženými výsledky regulátorů pro SISO systém, plnými stavovými zpětnými vazbami a regulátory využívající měřitelný výstup. Výsledek pozorování napoví, jaký význam má použití pozorovatele a plné stavové zpětné vazby, oproti řízení na základě známých dat.

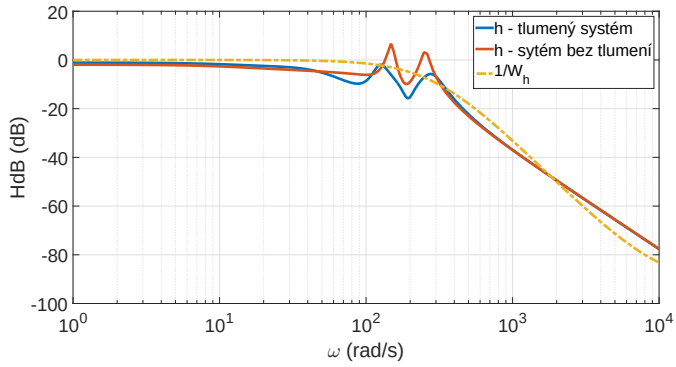
Analýza v komplexní rovině. Obrázek 7.21 vykresluje polohu pólů v komplexní rovině v závislosti na rychlosti, pro kterou byl systém linearizován. Směr pohybu kořenů naznačují barvy. Graf se zaměřuje na část kolem imaginární osy, aby bylo možné rozhodovat o stabilitě. Opět vzniká nestabilita na velmi nízkých rychlostech (zhruba do 4 m/s), která lze řešit použitím regulátoru od vyšších rychlostí. Druhou hranicí je nová kritická rychlost, ta činí téměř 192 m/s.

Frekvenční analýza. Frekvenční charakteristiky přenosů z poruchy na stavové veličiny a akční zásah, prozrazují schopnost regulátoru tlumit nežádoucí módy. Požadavek na nízkých frekvencích je dodržen a módy systému jsou



Obrázek 7.21: Komplexní rovina s póly uzavřené smyčky od 0m/s do 200m/s

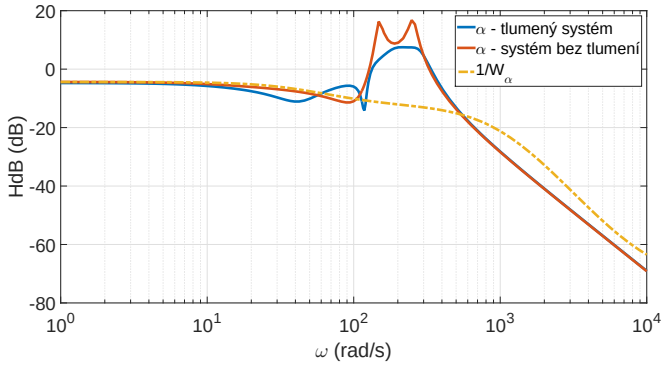
tlumené. Nechtěnou by mohla být zvýšená citlivost na kmitočtu 100 rad/s u přenosu z poruchy na torzi křídla.



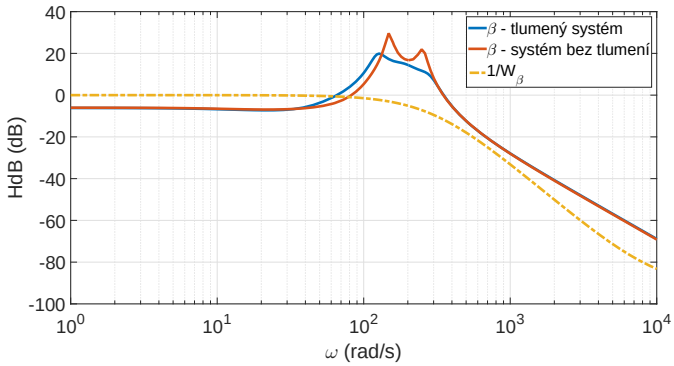
Obrázek 7.22: Amplitudová frekvenční charakteristika přenosu z poruchy h s regulátorem MIMO-3

Kontrola v časové oblasti. Maximální výchylka kormidla pro potlačení poruchy nepřekročila 3° a po odeznění poruchy zůstala nulová. Stavové veličiny po poruše také rychle konvergovaly k nule. Pohled na akční zásah a průběhy stavových veličin poskytují obrázky 7.25, 7.26.

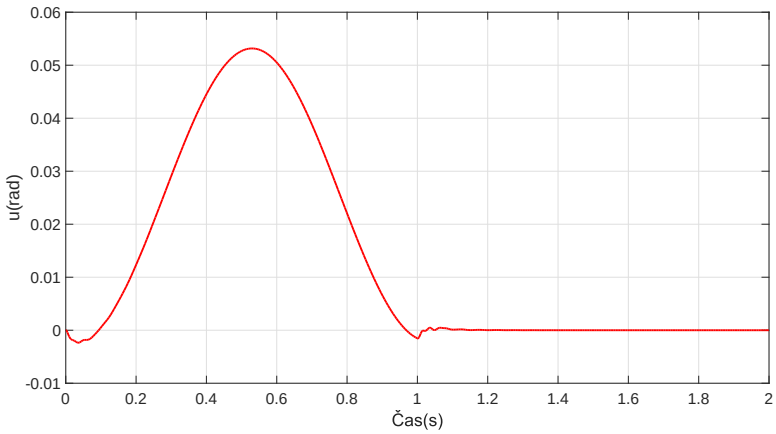
Zhodnocení. Až na zvýšenou citlivost na poruchu o kmitočtu 100 rad/s a krátký úsek nízkých rychlostí, kde je systém nestabilní, nevykazuje zpětnovazební systém nežádoucí chování. Řídicí zákon posunul kritickou rychlost o 33%.



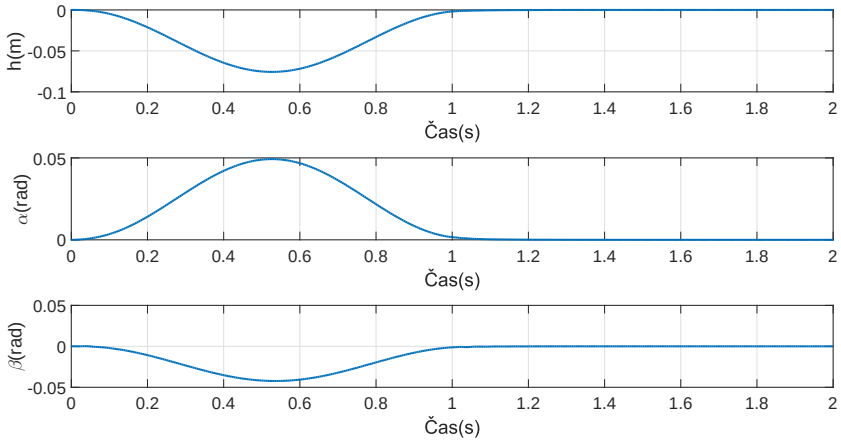
Obrázek 7.23: Amplitudová frekvenční charakteristika přenosu z poruchy α s regulátorem MIMO-3



Obrázek 7.24: Amplitudová frekvenční charakteristika přenosu z poruchy β s regulátorem MIMO-3



Obrázek 7.25: Akční zásah regulátoru MIMO-3



Obrázek 7.26: Průběhy stavových veličin v uzavřené smyčce při poruše

7.4.2 Řízení MIMO-4

V předchozí části, kde byl uvažován měřitelný výstup 7.17, byla absence signálu souvisejícího s torzí křídla α. Regulátor MIMO-4 je motivovaný otázkou na schopnost potlačení zejména módu torze, pokud bude do vektoru y_3 začleněna i $\ddot{\alpha}$. Nový měřitelný výstup popisuje vektor

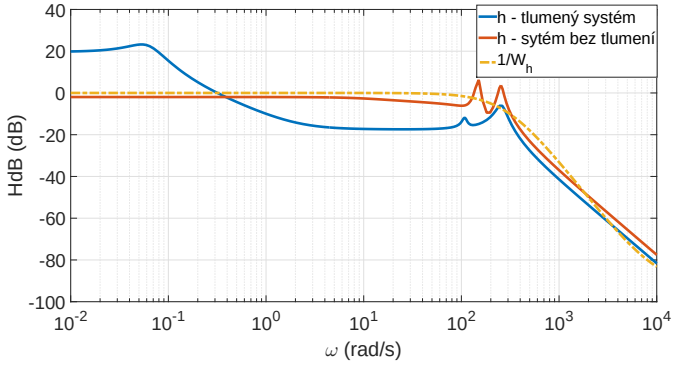
$$y_4 = (\ddot{h}, \ddot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}). \tag{7.18}$$

Princip návrhu je stále stejný, liší se jen v počtu vstupů. Využití soustavy proporcionálních regulátorů v tomto případě není ale vhodný. Podrobněji se bude touto otázkou zabývat text níže.

Soustava proporcionálních regulátorů

V prvních úvahách o zatlumení problematických módů byl odhalen problém, kde zatlumením jednoho módu byl „posílen“ druhý mód a naopak. Tato vlastnost vychází z průběhu fáze systému. Zavedením proporcionálních zpětných vazeb současně od $\ddot{h}$ i $\ddot{\alpha}$ naráží na toto specifikum.

S nezměněnými parametry nástroje hinfstruct a stejnou volbou váhovacích filtrů, byl nalezen regulátor s minimální hodnotou $\gamma = 397$. Oproti MIMO-3 je rozdíl značný, důvod zobrazují frekvenční charakteristiky, jako příklad je vykreslena charakteristika 7.27. Všechny frekvenční charakteristiky dokazují značné zatlumení módu torze, cenou je ovšem nedodržení průběhů frekvenčních charakteristik na nízkých kmitočtech a zvýraznění módu křidélka. Ani komplexní rovina nedává pozitivní výsledek experimentu. Navzdory rozšíření pozorovaného výstupu o novou informaci, nedošlo k zlepšení vlastností řízeného systému, ba naopak, nalezený regulátor je nepoužitelný.



Obrázek 7.27: Amplitudová frekvenční charakteristika přenosu z poruchy na h s čtyřmi proporcionálními regulátory

Soustava proporcionálních regulátorů a filtr

Předchozí struktura regulátoru je nyní doplněna o strukturu filtru upravující přenos z $\ddot{\alpha}$. Výstup řídicího systému popisuje rovnice

$$u = k_1\ddot{h} + k_2\frac{1}{s+D}\ddot{\alpha} + k_3\beta + k_4\dot{\beta}, \tag{7.19}$$

kde $k_i, i = 1, 2, 3, 4$, jsou statická zesílení a $-D$ je pól filtru. Pro takto upravenou strukturu má nalezený regulátor zcela rozdílné vlastnosti, to napovídá i $\gamma = 11.9$.

Struktura filtru byla funkcí doplněna do tvaru

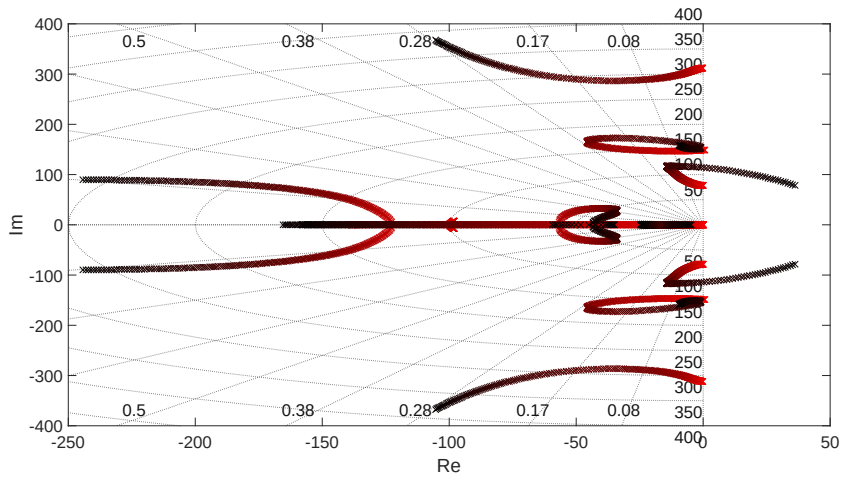
$$F(s) = \frac{1}{s+D} = \frac{1}{s+132.3}. \tag{7.20}$$

Analýza v komplexní rovině. Rychlostní závislost polohy kořenů uzavřené smyčky poskytuje informaci o intervalu, kde je systém stabilní. Podobně jako u MIMO-3 i zde začíná oblast stability na rychlosti kolem 3 m/s. Nová kritická rychlost činí 216 m/s, to odpovídá 50% přírůstku.

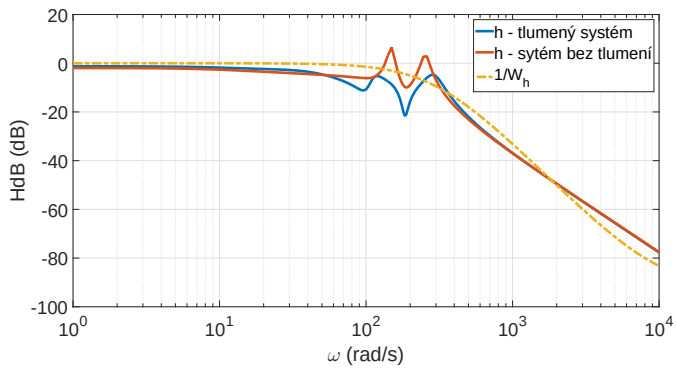
Frekvenční analýza. Hodnoty frekvenčních charakteristik (obrázky 7.29 až 7.31) na nízkých frekvencích zůstaly zachovány. Zatlumení frekvenčních špiček je výraznější než u MIMO-3 návrhu, nicméně zvýšená citlivost na 100 rad/sec u přenosu poruchy na torzi zůstala.

Kontrola v časové oblasti. Potlačení poruchy nevyžaduje větší výchylku křidélka než 3°. Akční zásah i stavové veličiny se rychle ustálí na nule. Dokumentující obrázky jsou 7.32 a 7.33.

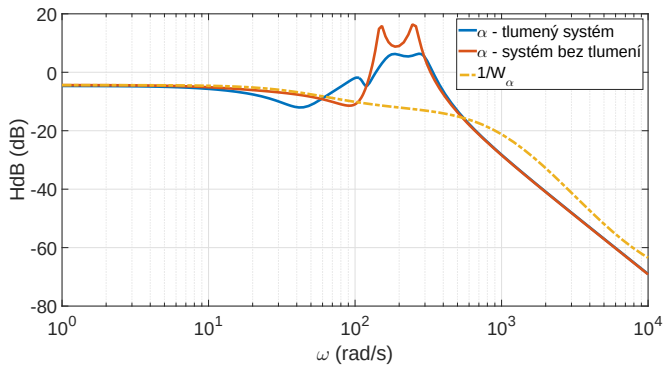
Zhodnocení. Na první pohled se mohlo zdát využití měřeného výstupu y_4 jako kontraproduktivní, ale experiment s jednoduchým filtrem prokázal, že je řízení na základě 7.18 možné a že znalost $\ddot{\alpha}$ umožní výraznější potlačení torzního módu. Výsledný systém pak vykazuje lepší vlastnosti než u MIMO-3.



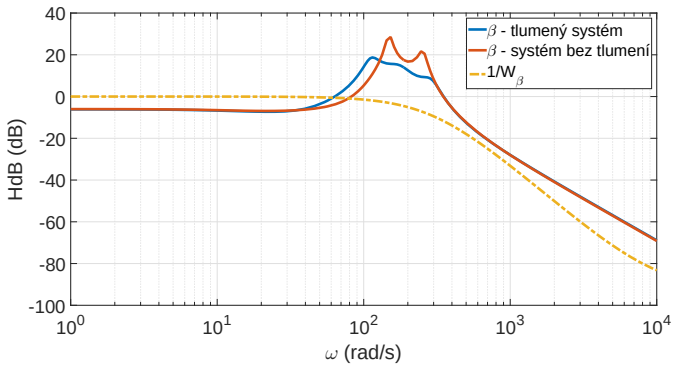
Obrázek 7.28: Komplexní rovina s póly uzavřené smyčky od 0m/s do 250m/s



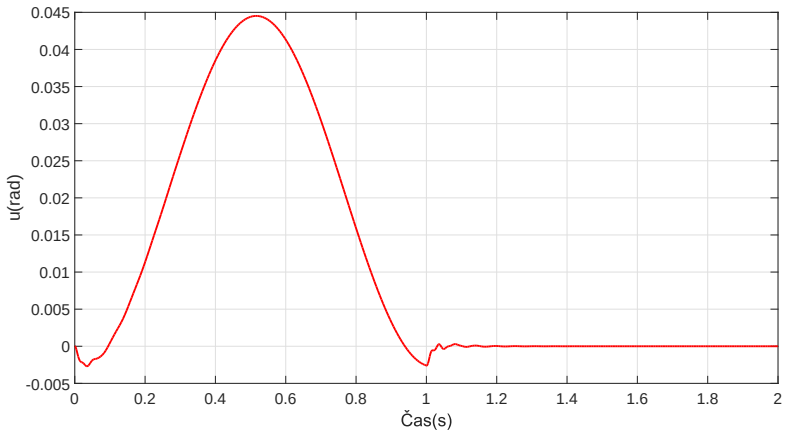
Obrázek 7.29: Amplitudová frekvenční charakteristika přenosu z poruchy h s regulátorem MIMO-4



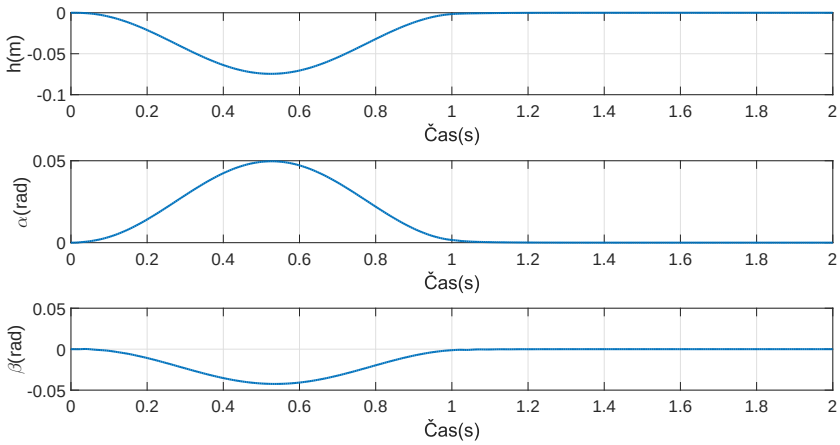
Obrázek 7.30: Amplitudová frekvenční charakteristika přenosu z poruchy α s regulátorem MIMO-4



Obrázek 7.31: Amplitudová frekvenční charakteristika přenosu z poruchy β s regulátorem MIMO-4



Obrázek 7.32: Akční zásah regulátoru MIMO-4



Obrázek 7.33: Průběhy stavových veličin v uzavřené smyčce při poruše

7.4.3 Řízení MIMO-6

Posledním regulátorem této kapitoly bude systém pracující s měřeným výstupem

$$y_6 = (\ddot{h}, \ddot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, \gamma, \dot{\gamma}). \tag{7.21}$$

Oproti předchozím je měřený úhel a úhlová rychlost řízeného křidélka. Jde o stavové veličiny, které jsou přímo řízené vstupem do systému a mají známou a stabilní dynamiku.

Struktura regulátoru bude totožná s MIMO-4 včetně struktury použitého filtru 7.19, navíc budou pouze proporcionální členy u signálů γ a $\dot{\gamma}$.

Nejprve byl použit nalezený filtr 7.20 a hledány pouze proporcionální členy regulátoru. Výsledný systém s $\gamma = 11.9$ vykazoval prakticky stejné vlastnosti jako MIMO-4 (velice podobné frekvenční charakteristiky atd.), proto nebudou dále uváděny. Pro další hledání parametrů byl hledán i koeficient filtru, nicméně ani systémy s $\gamma < 11$ nepřinesly lepší výsledky. V některých případech byly módy posunuty ve frekvenci, jinde vznikly zase nové rezonanční frekvence.

Zhodnocení. Využití signálů γ a $\dot{\gamma}$ nepřináší z hlediska řízení výrazné zlepšení. Bez hlubší analýzy to je možné zdůvodnit úvahou o znalosti vstupu do systému, který se přímo projevuje přes známou dynamiku na stavech γ a $\dot{\gamma}$. Měřený výstup 7.21 by hrál větší roli pro řízení například v případě uvažování propojení serva a kormidla spojením, které není absolutně tuhé nebo použitím slabého servomotoru, které nedokáže vždy generovat dostatečný moment.

Kapitola 8

Řízení systémy parametrizovanými rychlostí

Předchozí kapitoly pracovaly s regulátory, které byly navrženy na rychlosti $1.1V_f$ a jejich koeficienty byly neměnné. Systém, reprezentující model aeroelastického křídla, je ovšem závislý na rychlosti a jeho dynamika se s rychlostí výrazně mění. Použitím jednoho zákona řízení jsou vlastnosti zpětnovazební smyčky (odezvy na porucho a podobně), platné jen v okolí pracovního bodu ($1.1V_f$). Také nová kritická rychlost je značně omezena okolím, kde regulátor ještě dokáže stabilizovat. Navíc v mnoha návrzích regulátor, který stabilizoval na vyšších rychlostech, udělal ze systému nestabilní systém, na nízkých rychlostech. Zmíněné argumenty spolu s dostupnou informací o rychlosti letu jsou motivací pro návrh řídicích systémů proměnných s rychlostí.

Již popsané výsledky ukazují, že i proporcionální regulátory, nebo struktury těchto regulátorů dokáží systém stabilizovat a dodržet přitom další požadavky na zpětnovazební systém. Proto se následující úvahy omezí na zkoumání parametrizovaných proporcionálních regulátorů. Předpoklad tak umožní zabývat se pouze trajektoriemi zpětnovazebních zesílení. Návrh bude pracovat z linearizacemi, rychlostí parametrizovaného systému. Linearizované systémy tvoří množinu systému, pro které bude navržena množina regulátorů (zesílení), ty budou následně charakterizovány v závislosti na rychlosti.

Princip pracuje s úvahou, že změna dynamiky systému je pro dostatečně malé okolí zanedbatelná a tím i koeficienty navržené zpětné vazby jsou pro dostatečně blízké rychlosti „téměř stejné“. Potom lze průběh koeficientů v závislosti na rychlosti popsat spojitou funkcí. Bohužel takto jednoduchou myšlenku, nelze jednoduše analyzovat z hlediska stability, protože stabilita „jednotlivých systémů“, nemusí znamenat stabilitu celku. V této práci bude stabilita ověřována pouze pro diskrétní hodnoty rychlostí a simulačně.

8.1 Interpolace průběhu koeficientů polynomy

Již bylo řečeno, že diskrétní hodnoty koeficientů budou interpolovány spojitou funkci. V následujících několika řádcích bude vysvětlen princip interpolace, která bude použita pro popis závislostí koeficientů regulátorů na rychlosti.

Nechť je posloupnost $\phi(V)$, pro $V \in [V_{min}; V_{max}]$, posloupností popisující

hodnoty daného koeficientu v $n+1$ různých bodech, pak je hledán interpolační polynom $P_n(V) = a_0 + a_1 V + a_2 V^2 + \ldots + a_n V^n$. Lze ukázat, že mezi všemi polynomy nejvýše n-tého stupně existuje právě jeden, který je interpolačním polynomem zadané posloupnosti. Z uvedeného, lze sestavit lineární systém n rovnic

$$\begin{aligned} P_n(V_0) &= a_0 + a_1 V_0 + a_2 V_0^2 + \ldots + a_n V_0^n = \phi(V_0), \\ P_n(V_1) &= a_0 + a_1 V_1 + a_2 V_1^2 + \ldots + a_n V_1^n = \phi(V_1), \\ &\vdots \\ P_n(V_n) &= a_0 + a_1 V_n + a_2 V_n^2 + \ldots + a_n V_n^n = \phi(V_n). \end{aligned} \tag{8.1}$$

Maticový zápis $\mathbf{V}a = \phi$, kde $\mathbf{V}$ je takzvaná Vandermondeova matice, a je vektor koeficientů a_0 až a_n a ϕ je vektor hodnot $\phi(V_0)$ až $\phi(V_n)$, umožňuje výpočet koeficientů podle rovnice

$$a = \mathbf{V}^{-1}\phi. \tag{8.2}$$

Výpočetně přijatelnější je například využití Hornerova schematu. Z hlediska implementace je vhodnou funkcí, funkce polyfit (z Matlabu), která úlohu řeší a nabízí i volbu stupně polynomu. Posloupnosti, které bude nutné interpolovat nevykazují „příliš rychlé změny“, proto bude bez větší chyby interpolace, dostačující polynom stupně $m \ll n$.

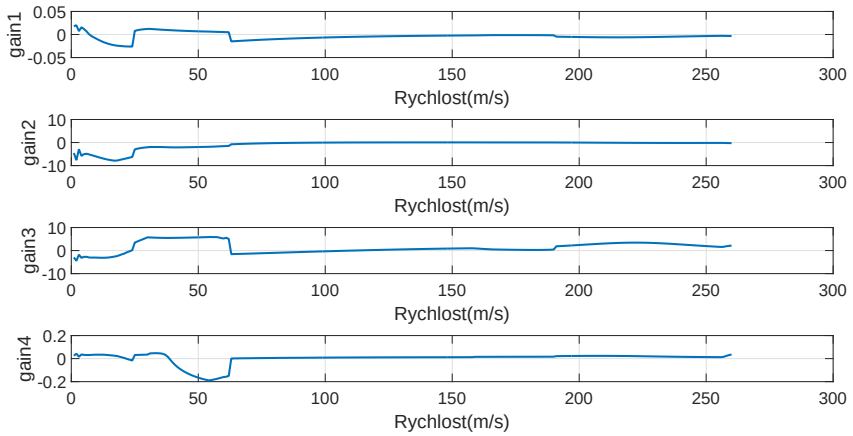
8.2 MIMO-4 závislé na parametru

V této podkapitole bude rozebrán návrh regulátoru MIMO-4 (7.4.2) závislý na parametru. Stejně jako u neparametrizovaného regulátoru bude i zde měřený výstup 7.18, také struktura regulátoru zůstane stejná. Součásti systému byl filtr, popsaný přenosovou funkcí 7.20. Ten bude pro jednoduchost fixní, to znamená, že bude mít neměnnou dynamiku. Experimenty s návrhem řízení, pro různé rychlosti ukázaly, že uvažování proměnné dynamiky filtru, dokáže ještě posunout možnosti návrhu. Průběh koeficientu filtru, je ovšem problematicky popsatelný, proto bude hledání regulátoru omezeno pouze na zesílení.

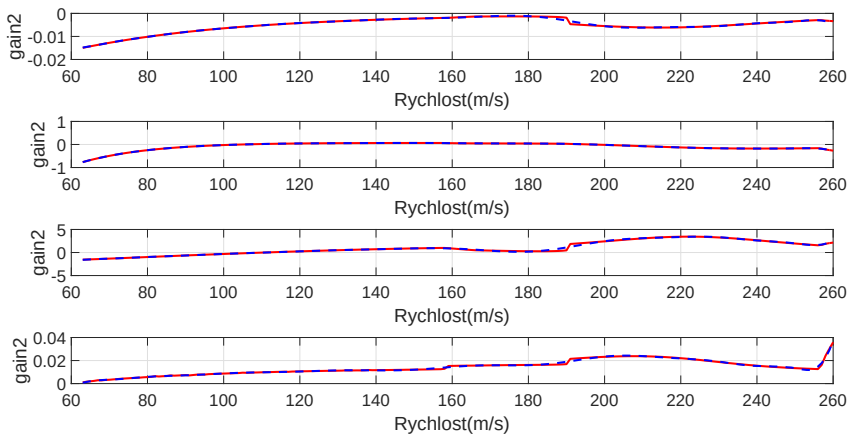
Různým rychlostem letu přísluší různé dynamiky systému, to znamená, že i požadavky na řízení se mohou s rychlostí měnit. S tím souvisí tvar frekvenčních charakteristik filtrů soustavy P, kterými je návrh specifikován. Jednoduše viditelnou změnou frekvenčních charakteristik přenosů z poruchy je zesílení (na nulové frekvenci). S rostoucí rychlostí roste i zesílení vlivu poruchy na veličiny h, α, β a od určité rychlosti začnou zesílení opět klesat. Nabízí se využití této znalosti ve smyslu parametrizace zesílení váhovacích filtrů. Experimenty s proměnným zesílením ale nevedly k lepším výsledkům. Návrh je pro různé rychlosti různý a tvar filtrů je tak těžko parametrizovatelný.

Hlavním cílem je potlačit rezonanční frekvence a stabilizovat systém v okolí kritické rychlosti. To je také důvodem použití filtru ve zpětné vazbě navrženém na $1.1V_f$ a váhovacích filtrů, sestavených pro stejnou rychlost. Simulace ukázaly, že i tato zjednodušení je možné při návrhu využít. Výsledkem je

návrh zpětnovazebních zesílení pro rychlosti od 1 m/s, do 260 m/s. Návrh neumožňuje výrazně překročit rychlost 260 m/s, aby byl systém ještě stabilní. Samotné vlastnosti uzavřené smyčky, byť stabilní, jsou v okolí takových rychlostí už špatné. Je ale vhodné zmínit, že se jedná o rychlosti překračující kritickou rychlost o více než 80%! Průběhy zesíleních jsou na obrázku 8.1. Obrázek ukazuje, že nalezená zesílení jsou od rychlosti 63 m/s poměrně snadno interpolovatelná, do této rychlosti je proložení hodnot problematické. Protože se jedná o nízké rychlosti, na kterých flutter nehrozí, bude situace zjednodušena zapínáním systému pro tlumení až od této rychlosti. Interpolace koeficientů zesílení realizují polynomy dvacátého řádu. Porovnání navržených hodnot s interpolací pomocí polynomů nabízí graf 8.2, kde jsou vykresleny interpolační křivky modrou přerušovanou čarou.



Obrázek 8.1: Průběhy zesílení pro MIMO-4 s fixním filtrem a rychlostmi do 260m/s

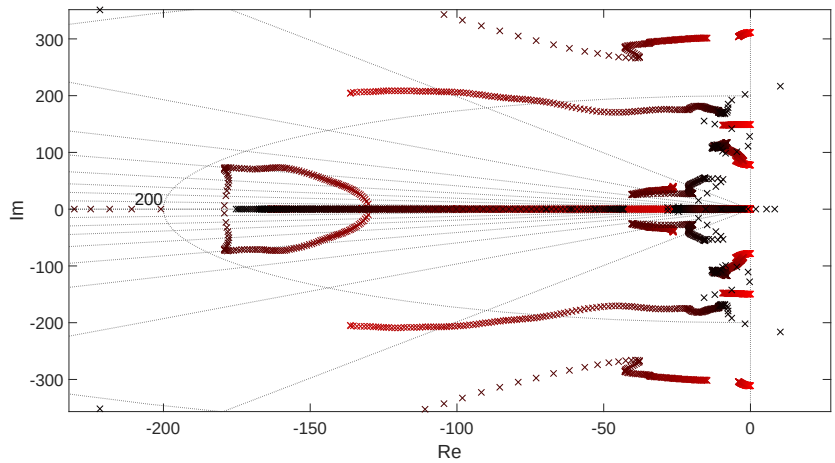


Obrázek 8.2: Průběhy zesílení pro MIMO-4 s interpolací polynomy

8.2.1 Analýza řídicího systému

Analýza bude opět zaměřena na komplexní rovinu, frekvenční charakteristiky a časovou oblast. Rozdíl bude v uvažování vlivu změny rychlosti a zkoumání reakce systému na zapínání a vypínání řízení.

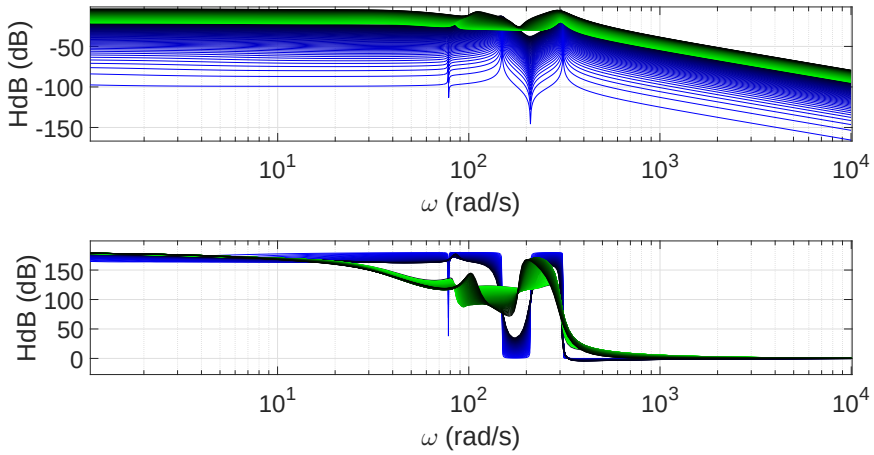
Analýza v komplexní rovině. Studiem polohy pólů systému byla nalezena nová kritická rychlost lehce překračující 260 m/s. Systém netrpí nestabilitou na nízkých rychlostech. Komplexní rovinu s póly pro rychlosti od 0 do 260 m/s, zobrazuje graf 8.3. Zaměřením na oblast kolem imaginární osy, je dobře viditelný vliv sepnutí řízení, které skokově posune polohu kořenů (začne tlumit).



Obrázek 8.3: Komplexní rovina s póly uzavřené smyčky od 0m/s do 265m/s

Frekvenční analýza. Nejprve bude pozornost zaměřena na frekvenční charakteristiky přenosů z poruchy v uzavřené smyčce na vertikální výchylku, vykreslené pro rychlosti od 0 m/s do 100 m/s (8.4. Z grafů je dobře viditelný přechod, kdy začne regulátor tlumit. Jde o zelenou část grafu. Tmavší odstín grafu znázorňuje vyšší rychlost proudění. Dalšími grafy jsou frekvenční charakteristiky systému s tlumením v úseku od 63m/s do 260m/s (8.5). Vypočtené charakteristiky dokazují tlumící schopnosti systému na všech rychlostech, pro které byl navržen, přestože byly váhovací filtry pro všechny návrhy stejné. Srovnání nabízí graf 8.6, kde byl tlumící systém vypnut. Modře je v grafu naznačena část do rychlosti flutteru, červeně jsou charakteristiky nad tuto rychlost.

Kontrola v časové oblasti. Podobně jako u předchozích regulátorů, bude systém testován při poruše na veličinu α. Rychlost ale nebude zafixována a bude lineárně stoupat, od 0m/s do 200m/s. Sekvenci poruch tvoří po sobě jdoucí průběhy z obrázku 4.14. Reakcí na poruchy je akční zásah z obrázku 8.8. Zde je dobře viditelný vliv rostoucí rychlosti, která se projevuje výrazněji ve výchylkách systému (obrázek 7.33), což je přirozenou a žádoucí vlastností,



Obrázek 8.4: Frekvenční charakteristiky přenosu uzavřené smyčky, z poruchy na h, od 0m/s do 100m/s

která souvisí se zachováním zesílení systému na nízkých kmitočtech. Velikost akčního zásahu se s rychlostí zvětšuje, pohybuje se ale v tolerovaných hodnotách. Systém je stabilní i při změně rychlosti a nevykazuje problémy v chování.

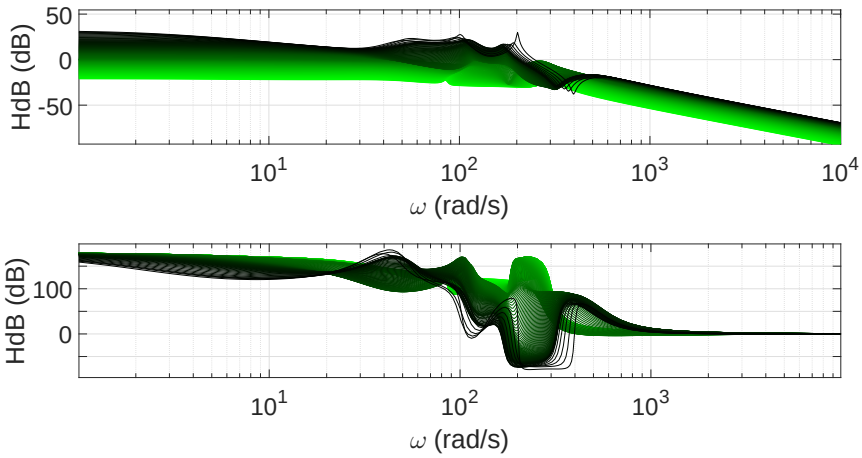
Jiné simulace zase testovaly reakci na zapínání a vypínání tlumícího systému. Experiment byl navržen tak, že rychlost $V = 62 + 3\sin(t)$, to zaručilo změnu rychlosti na hranici, kde je regulace aktivní. Společně s poruchou o stejném průběhu, jako v předchozí simulaci, podmínky zajistily akční zásah v podobě 8.10.

Na hranicích, kde systém začínal tlumit, se objevují krátké přechodové děje v akčním zásahu. Na průběhy stavových veličin (obrázek 8.9) měl přechodový děj minimální vliv. Drobná zakmitání jsou viditelná pouze u výchylky kormidla. Rostoucí vliv poruchy s rychlostí je skryt v polovině obálky průběhů výchylek stavových veličin h, α a β.

Zhodnocení. Navzdory zjednodušením, provedeným při návrhu systému, se s použitím čtveřice měřitelných signálů podařilo dosáhnout posunutí kritické rychlosti o 80%. Aktivní tlumení přitom netrpí nepřiměřeným akčním zásahem, pomalou konvergencí, či nestabilitu na nízkých rychlostech.

8.3 Stavová zpětná vazba závislá na parametru

Opět by se nabízelo řízení se stavovou zpětnou vazbou, v tomto případě závislou na parametru. Experimenty ukázaly, že i za předpokladu možnosti rekonstrukce všech stavů, není tento úkol snadný. Důvodem je počet stupňů volnosti v ladění proporcionálních členů. Cyklicky volaný algoritmus pro hledání parametrů na rychlostech od 0 m/s do 432 m/s, s totožným nastavením, i filtry jako u strukturovaného MIMO řízení, nalezl trajektorie konstant, které ukazuje obrázek 8.11. Už na první pohled jsou zřejmé velmi rychlé změny



Obrázek 8.5: Frekvenční charakteristiky přenosu uzavřené smyčky, z poruchy na h, od 64m/s do 260m/s

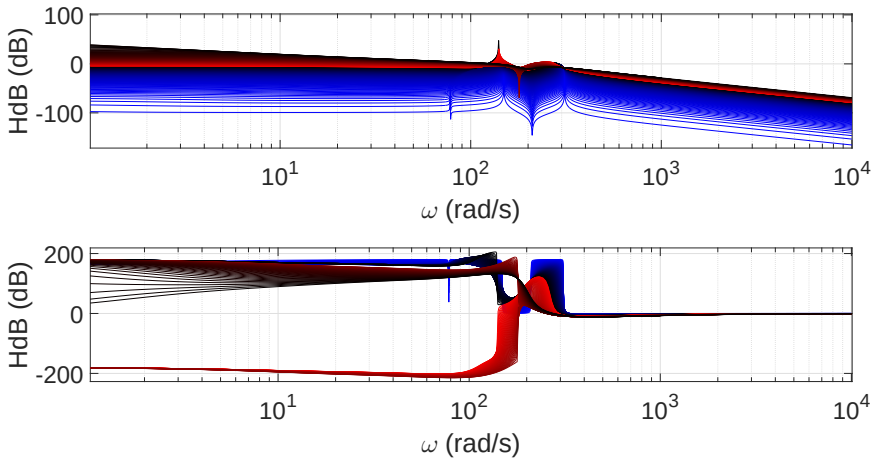
v hodnotách některých parametrů. Rychlé změny se objevují i při zmenšení měřítka u jiných koeficientů. Vykreslením průběhu γ, které návrh s H_∞ používá jako měřítko kvality návrhu, lze zjistit, že γ takové chování nemá. Do rychlosti 231 m/s je průběh téměř lineární, pak následuje prudký růst do 257 m/s, kde začne γ opět klesat.

Velká variabilita v ladění konstant měla za následek těžko aproximovatelné trajektorie koeficientů stavové zpětné vazby, která by navíc musela téměř skokově měnit své hodnoty s rychlostí.

Lepšího výsledku při hledání koeficientů je možné dosáhnout zavedením různých omezení a úpravou algoritmu. Jednou z použitých úprav bylo zavedení nalezeného vektoru stavové zpětné vazby pro rychlost 432 m/s, jako referenční hodnotu na rychlosti 431 m/s a vypnutí náhodných startů algoritmu. Po naladění regulátoru na této rychlosti, byl nový vektor zadán jako referenční a opět byla snížena rychlost. Odůvodnění postupu dává snaha nalezení „podobných“ hodnot stavové zpětné vazby na blízkých rychlostech, tedy hledání řešení v okolí předchozího řešení.

Postup vedl na trajektorie z obrázku 8.12. Ani tato úprava není dostačující a trajektorie stále obsahují prudké změny. Tentokrát kolem 50 m/s a 232 m/s. Velkou variabilitu ve volbě konstant dokazuje průběh γ, který je téměř totožný s předchozím laděním, kde byl nastaven náhodný start algoritmu pro každou rychlost.

Pro popis další úpravy je vhodné zavést značení, kde $V(i)$ je hodnota rychlosti v i-tém kroku a $K(i)$ je vektor stavové zpětné vazby pro i-tý krok, respektive rychlost $V(i)$. Pak jde úprava algoritmu popsat jako omezení na vektor $K(i) \in (K_{i+1} - K_\triangle, K_{i+1} + K_\triangle)$. Tím je zaručena rychlost změny každého koeficientu na maximálně $K_\triangle = 1$, kde 1 je jednotkový vektor. Počáteční hodnotou K, byl vzatý vektor nalezený pro $V = 432$. Průběhy koeficientů, díky zavedenému omezení, neobsahují prudké změny. Vývoj hodnoty γ ale není spojitý a od 148 m/s do 233 m/s nebyl nalezen žádný zákon řízení. Přes-



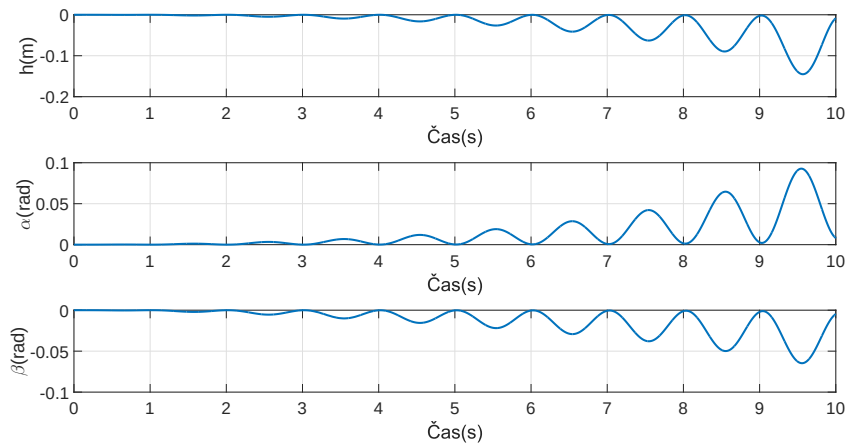
Obrázek 8.6: Frekvenční charakteristiky přenosu otevřené smyčky, z poruchy na h, od 0m/s do 260m/s

něji řečeno, v tomto intervalu nebyla nalezena žádná stavová zpětná vazba, která by systém stabilizovala a splňovala přitom omezení na rychlost změny koeficientů. V hledaném intervalu rychlostí, je řešení nalezeno například pro $K_\triangle = 5$. Průběhy koeficientů a hodnoty γ v závislosti na rychlosti znázorňují obrázky 8.13.

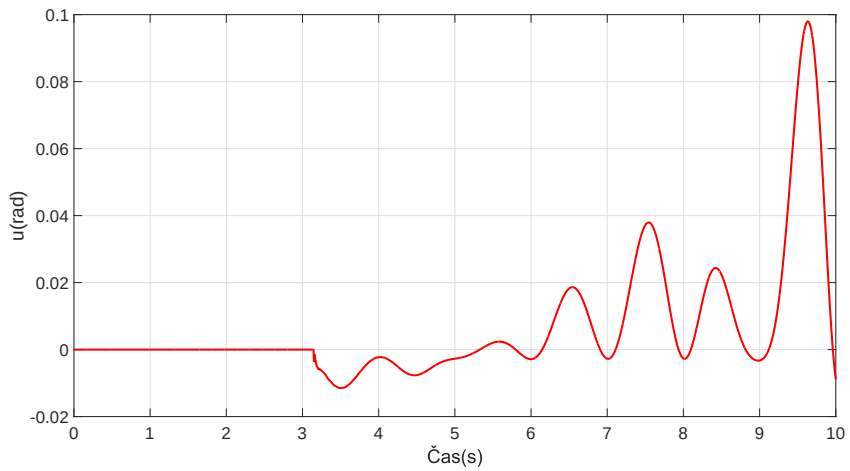
Hodnoty koeficientů byly interpolovány polynomy dvacátého řádu, podobně jako v předchozím případě. Ukázku interpolace pro první čtveřici koeficientů vykreslují obrázky 8.14, 8.15, kde přerušované čáry naznačují průběh interpolace. Průběh γ má podobný tvar jako u H_∞ bez omezení na koeficienty, měřítko je ale jiné. Přísnější omezení na koeficienty vedou k větším hodnotám H_∞ normy, to znamená horšímu plnění požadavků na systém. Naproti tomu jsou trajektorie koeficientů snáze aproximovatelné. Například omezení $K_\triangle = 10$ odpovídá příznivější průběh γ, ale trajektorie jdou hůře interpolovat.

Zhodnocení. Podkapitola se zabývala přístupem, který vedl na posunutí kritické rychlosti teoreticky i na 300% původní kritické rychlosti. Byl zde naznačen možný princip nalezení vhodných trajektorií koeficientů stavové zpětné vazby a jejich interpolace polynomy. Omezení aplikované při samotném ladění ale vedla ke zvýšení hodnoty γ. Řízený systém proto může mít nežádoucí vlastnosti. Hlavním problémem je ovšem silná závislost na kvalitě pozorovatele.

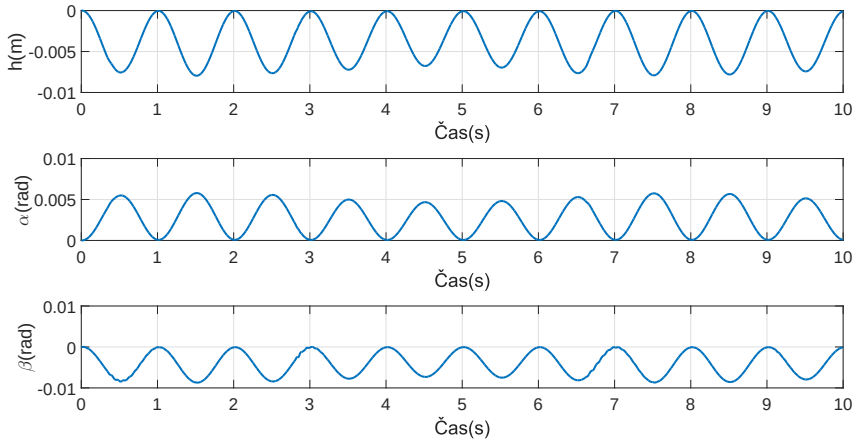
Přes silný předpoklad bezchybné znalosti stavu, není zmíněné řešení triviální a nemusí vést k lepším výsledkům. Teoretické posunutí kritické rychlosti je ale s tímto předpokladem značné. Na druhou stranu je nutné zmínit fakt, že je křídlo namáháno nejenom dynamicky ale i staticky a s příliš vysokými rychlostmi jsou spojené i značné síly, které mohou nevratně poškodit konstrukci letadla a vést k jeho pádu. Proto může být požadavek posunutí rychlosti flutteru co nejvýše zbytečný.



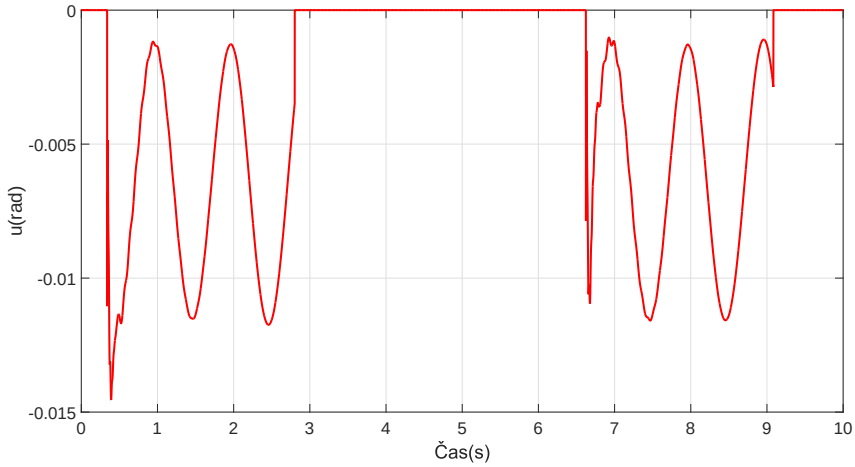
Obrázek 8.7: Průběhy stavových veličin při sekvenci poruch a rostoucí rychlosti od 0m/s do 200m/s



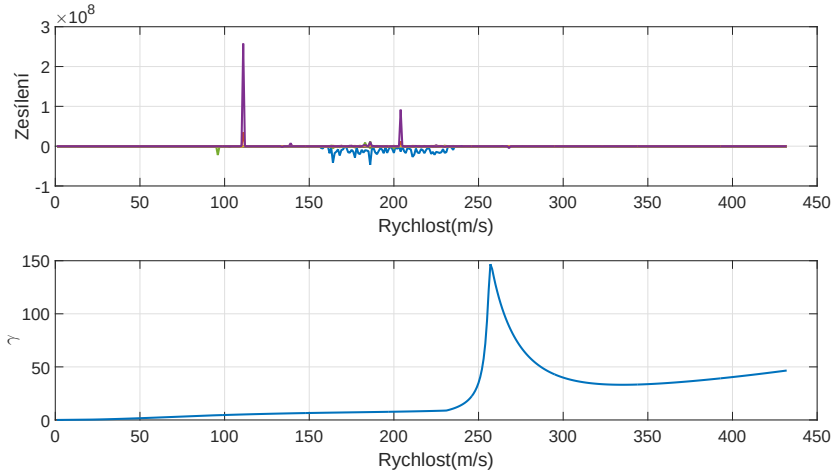
Obrázek 8.8: Akční zásah regulátoru při sekvenci poruch a rostoucí rychlosti od 0m/s do 200m/s



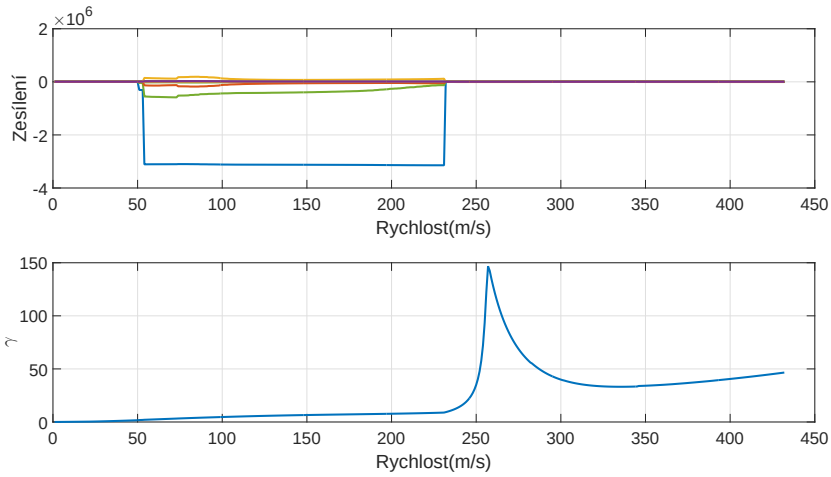
Obrázek 8.9: Průběhy stavových veličin při sekvenci poruch a změně rychlosti



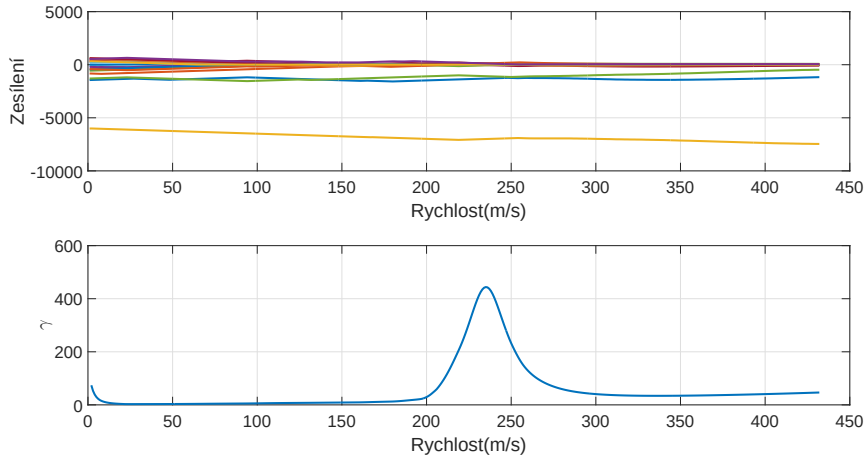
Obrázek 8.10: Akční zásah regulátoru při sekvenci poruch a změně rychlosti



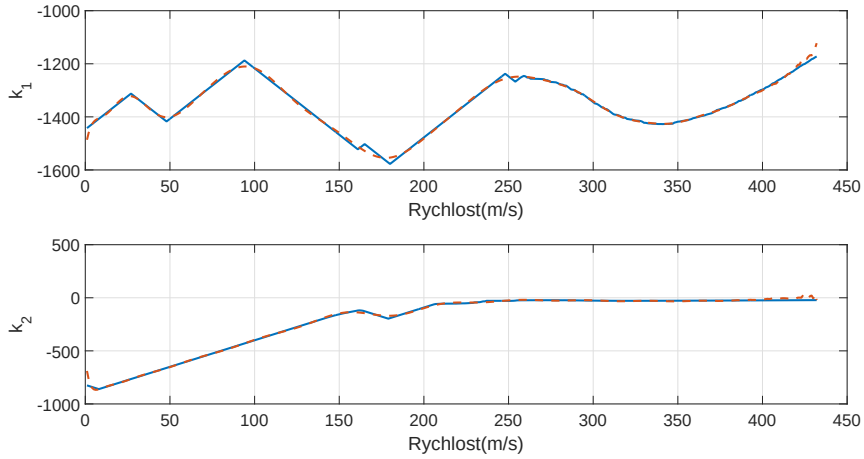
Obrázek 8.11: Průběh zesílení stavové zpětné vazby a γ v závislosti na rychlosti



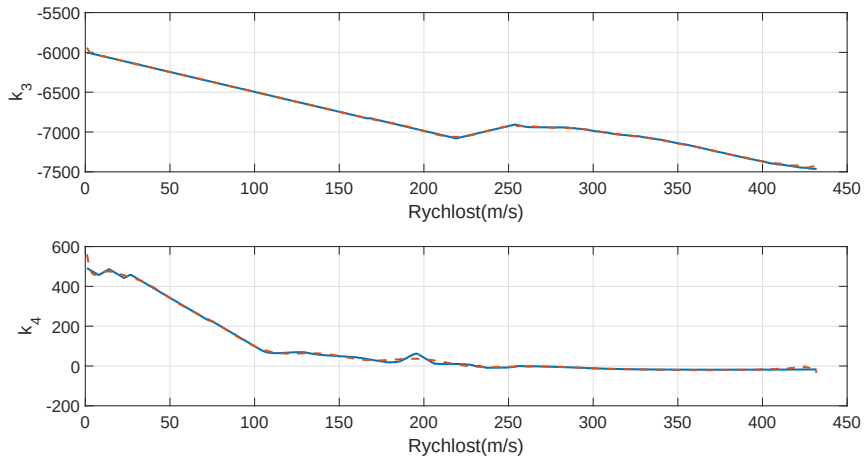
Obrázek 8.12: Průběh zesílení stavové zpětné vazby a γ v závislosti na rychlosti pro algoritmus s omezením



Obrázek 8.13: Průběh zesílení stavové zpětné vazby a γ v závislosti na rychlosti pro algoritmus s $K_{\triangle} = 5$



Obrázek 8.14: Průběhy zesílení k_1, k_2 a jejich interpolace



Obrázek 8.15: Průběhy zesílení k_3, k_4 a jejich interpolace

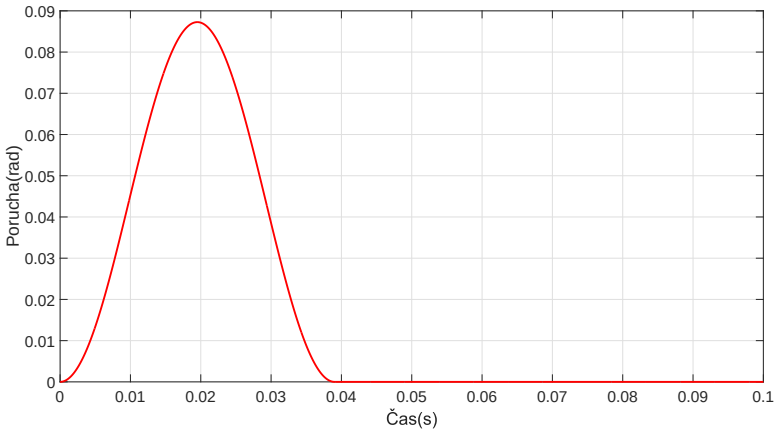
Část IV

Validace a verifikace

Kapitola 9

Ověření dosažených výsledků

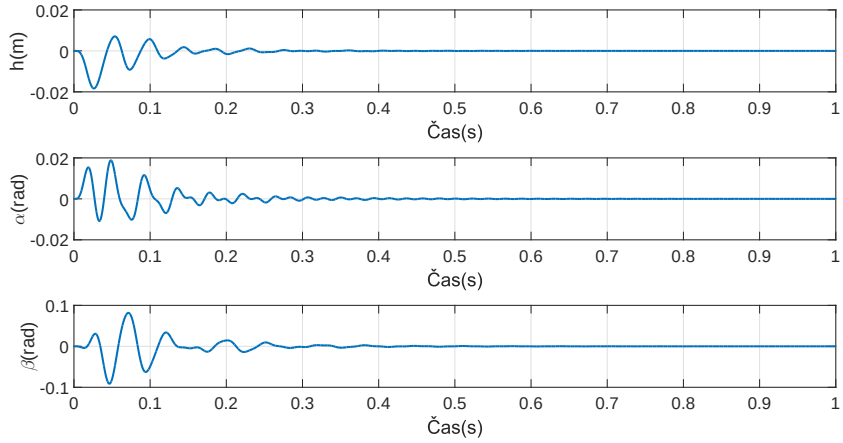
Pro úplnost je poslední část práce věnována demonstraci dosažených výsledků prostřednictvím numerických simulací a návrhu experimentů, kterým se věnuje kapitola 10. Simulace se zaměří na porovnání odezvy netlumeného systému a systému s řízením MIMO-4 parametrizovaným rychlostí z podkapitoly 8.2. Jako porucha bude tentokrát zvolen signál o kmitočtu $\omega = 161\text{rad/s}$, vykreslený v grafu 9.1.



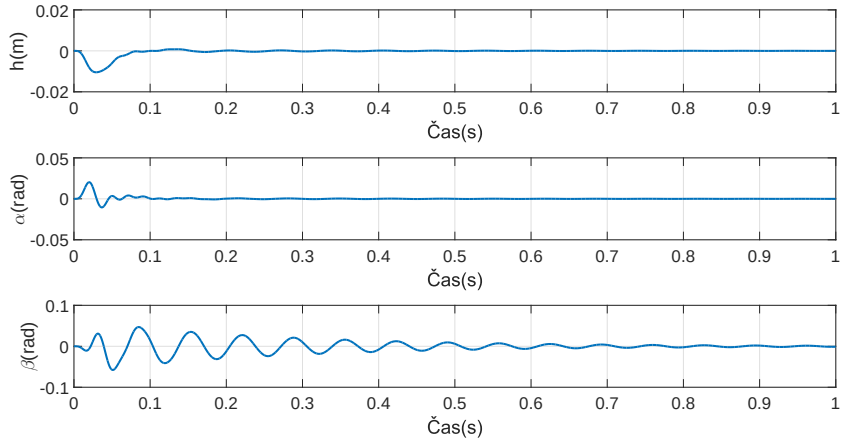
Obrázek 9.1: Průběh poruchy na stav α

9.1 Odezvy křídla na poruchu při nízkých rychlostech

První simulace se vztahují k ověření tlumících schopností regulátoru na nízkých rychlostech, respektive před kritickou rychlostí. Graf 9.2 vykresluje průběhy stavů pro křídlo bez tlumícího systému. Rychlost proudění byla nastavena na 100m/s. Odezvy na poruchu jsou kmitavé, ale rychle se ustálí na nule. Obrázek 9.3, zobrazuje stejné signály, tentokrát ovšem se zapnutým regulátorem. Vliv tlumícího systému je při porovnání obou obrázků dobře patrný.



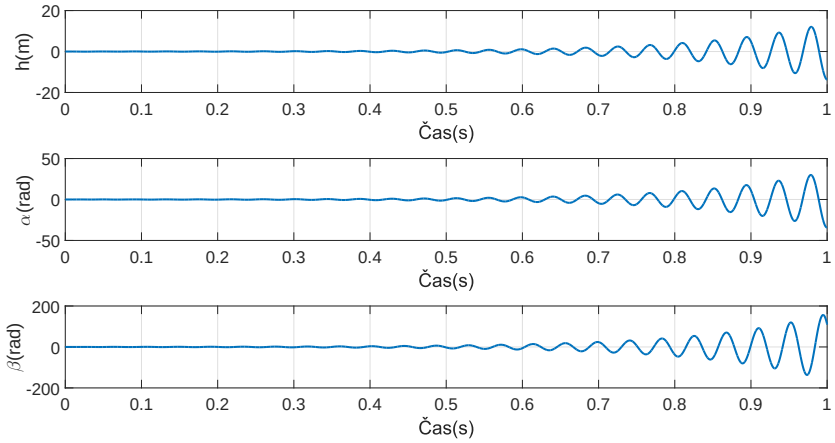
Obrázek 9.2: Průběhy stavových veličin pro netlumený systém V = 100m/s



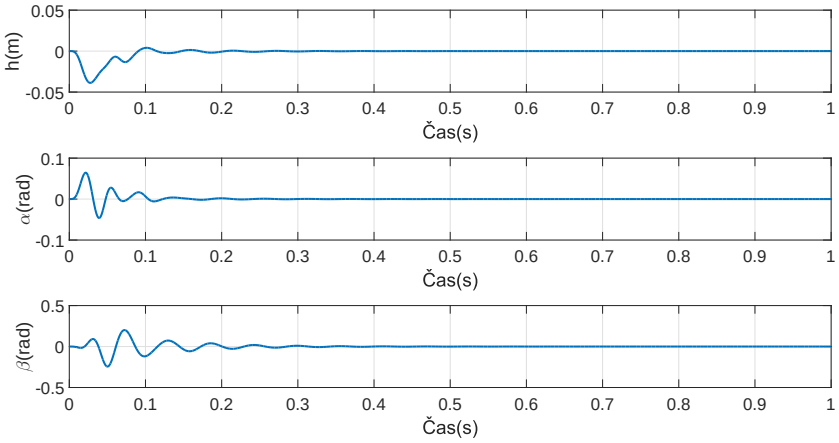
Obrázek 9.3: Průběhy stavových veličin pro tlumený systém V = 100m/s

9.2 Odezvy křídla na poruchu nad kritickou rychlostí

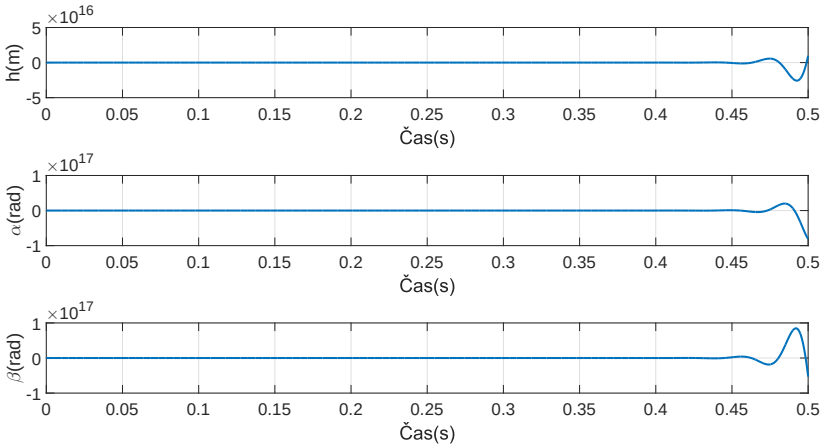
Hlavním úkolem regulátoru je udržet systém stabilní i nad kritickou rychlost, proto budou další grafy ze simulací při rychlostech větších, než je kritická rychlost. První dvojice obrázků (9.4, 9.5) znázorňuje reakci křídla na poruchu při rychlosti 158.54m/s a to s tlumícím systémem i bez něj. Regulátor opět zafungoval a poruchu rychle potlačil. Křídlo bez regulátoru naopak vykazuje kmitavou odezvu s rostoucí amplitudou až do hodnot, které by znamenaly zničení křídla. Ještě ničivější účinky dokazuje obrázek 9.6, pro rychlost 250m/s. Průběhy tlumeného křídla dokumentuje obrázek 9.7.



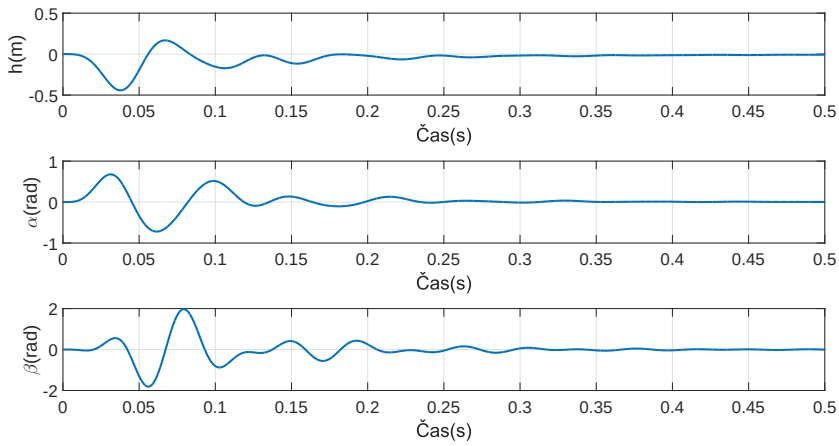
Obrázek 9.4: Průběhy stavových veličin pro netlumený systém V = 158.54m/s



Obrázek 9.5: Průběhy stavových veličin pro tlumený systém V = 158.54m/s



Obrázek 9.6: Průběhy stavových veličin pro netlumený systém V = 250m/s



Obrázek 9.7: Průběhy stavových veličin pro tlumený systém V = 250m/s

Kapitola 10

Návrh experimentu

Kromě teoretické části, v které byly studovány vlastnosti aeroelastického křídla a navrženy různé řídicí zákony, byla nemalá část práce zaměřena i na praktické ověření závěrů plynoucích z matematického modelu, simulací a návrhu řízení. Předmětem zkoumání v experimentech jsou zmenšené modely křídel se stejnou konfigurací, jako uvažoval i matematický model. To znamená element křídla tenkého profilu s dvojicí křidélek. Jedním křidélkem, kde tuhost rotace simuluje tuhost řízení a druhým křidélkem, řízeným servomotorem a zpětnovazebním regulátorem. Kromě vlastního křídla je zapotřebí proud vzduchu obtékající křídlo. K vytvoření vhodných podmínek byl využit aerodynamický tunel. Konkrétně cirkulační aerodynamický tunel s příkonem 150kW a průměrem rotorů 1400 mm, umístěném v laboratoři Ústavu letadlové techniky na Karlově náměstí.

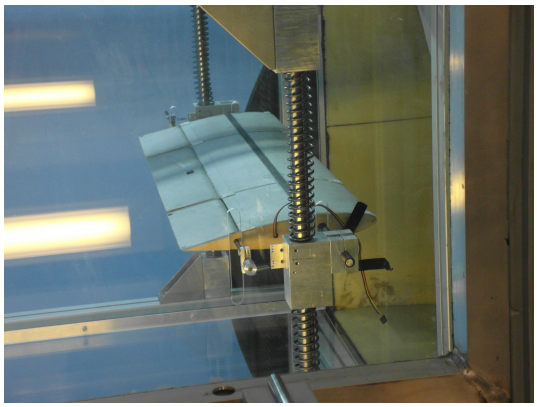
10.1 Provedené experimenty

První experiment byl realizován s modelem, kde byl profil křídla nahrazen obdélníkovým profilem s minimální tloušťkou (6mm). Motivaci přinesla teorie tenkého profilu, která říká, že křídlo o tenkém profilu a malém prohnutí lze nahradit tenkou deskou obdélníkového průřezu. Jako materiál křídla bylo zvoleno PVC, kvůli nízké tuhosti a snadné výrobě. Tuhost řízení simulovala pružina uchycená na křidélko. Experiment byl proveden v rámci bakalářské práce „Aktivní potlačení flutteru na modelu křídla“ z roku 2014 [Svo14] a výsledkem bylo zjištění, že je takový model k experimentům s aeroelasticitou nevhodný. Důvodem jsou nepříznivé materiálové vlastnosti jako je tuhost a hustota. Fotografii experimentu ukazuje obrázek 10.1.

U dalšího modelu byla zvolena zcela jiná strategie, a to vytvořit velice tuhé křídlo, respektive element křídla, uchycený v pojezdu, který by dovoloval pouze vertikální pohyb křídla a rotaci křidélka. Tuhost křídla modelovala čtveřice pružin a tuhost řízení další čtveřice pružin. Z důvodu symetrického rozmístění sil, bylo volné kormidlo rozděleno na dvě části a umístěno po stranách křídla, řízené křidélko bylo mezi těmito částmi. Kvůli nežádoucím jevům, které by vznikaly na koncích křídla se model umístil do plexisklového tubusu prodlužujícího ústí aerodynamického tunelu. Pojezdový systém zůstal vně tubusu a neovlivnil tak proudění vzduchu. Fotografii přípravku je možné

vidět na obrázku 10.2.

Obrázek 10.1: Model křídla z prvního experimentu



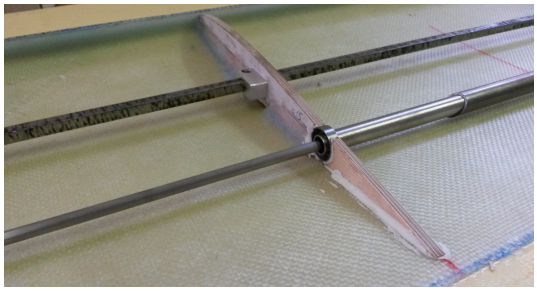
Obrázek 10.2: Model křídla z druhého experimentu

Z naměřených a zvolených parametrů vycházela kritická rychlost kolem 80m/s. Nedokonalost pojezdu (nesouosost a tření) nedovolily křídlu samobuzené kmitání už na této rychlosti, proto byla rychlost zvyšována, až ke kmitání došlo. Po drobné úpravě pojezdu bylo spuštěno druhé měření, při kterém byla opět překročena vypočtená rychlost flutteru. Síly, které při kmitání vznikly, byly příliš velké a způsobily natočení křídla. To vedlo k ještě větším silovým účinkům, při kterých se model utrhl z pojezdu a zničil.

10.2 Probíhající práce

Zmíněná měření vedla k užitečným zkušenostem a započetí práce na dalším experimentu. Koncept vlastního křídla zůstal stejný, stále se jedná o element s dvojicí kormidel, kde neřízené kormidlo tvoří dvě části propojené osou. Rozdíl je pouze v preciznějším uložení křidélek s ložisky, umožňující hladký pohyb obou křidélek, bez vzájemného ovlivňování. Výraznější změny nastaly

v uchycení křídla, tam uhlíkovou trubici vystřídala ocelová tyč. Mimo to byl upraven pojezdový mechanizmus. Úpravy nyní dovolují i rotační pohyb křídla v elastické ose s definovanou tuhostí. Uložení os křidélek naznačuje obrázek 10.3 s polovinou laminátového křídla.



Obrázek 10.3: Osa křidélek

Kapitola 11

Závěr

Hlavními cíli této práce bylo sestavení modelu dynamiky aeroelastického křídla se třemi stupni volnosti a řízeným křidélkem, který měl být dále analyzován z hlediska dynamických aeroelastických jevů, zejména flutteru, a následně pro něj měl být navržen aktivní tlumící systém, potlačující tyto aeroelastické jevy.

První část práce se zaměřila na modelování aeroelastického křídla. Nejprve byl popsán model se třemi stupni volnosti včetně odvození modelu dynamiky elastického křídla. Odvození modelu, respektive samotný model bývá v literatuře velice často zjednodušován, proto se text věnoval i zjednodušené variantě modelu. Také byla popsána problematika nestacionární aerodynamiky, představující další blok modelu. Spojením modelů servomotoru, aerodynamiky a vlastního elastického křídla vznikl výsledný systém. Ten dále posloužil jako stavební blok pro model s rozprostřenými parametry, jehož sestavení se první část také věnovala.

Druhou částí byl odvozený model analyzován z hlediska dynamiky a její změny v závislosti na rychlosti. Linearizace modelu společně s komplexní rovinou poskytly informace o stabilitě, tedy kritické rychlosti a i o módech systému. Identifikace módů dále dovolila specifikovat konkrétní příčinu flutteru. Analýzu doplnily informace získané z frekvenčních charakteristik a numerických simulací nelineárního systému. Mimo to byl popsán algoritmus, sloužící k nalezení rychlosti flutteru, který nebyl použit pouze v této části, ale také při návrhu řídicích systémů.

Po analýze systému následuje sekce, která se věnuje návrhu zákona řízení. Text je členěn od jednoduchých myšlenek, kde je vstupem regulátoru pouze jeden měřený signál, až po složitější regulátory s více vstupy. Každý návrh je analyzován a jsou shrnuty jeho vlastnosti. Jednoduché principy odhalily některá specifika systému, jako je zvýraznění módu torze, při tlumení módu vertikální výchylky, nebo vliv rychlosti na dynamiku křídla a vlastní řízení. Typické hodnoty nových kritických rychlostí u regulátorů s jedním vstupem a s konkrétními parametry křídla byly zhruba o 27% zvětšeny oproti původní. Vícevstupé regulátory dokázaly posunout kritickou rychlost i o více než 80%. Nevhodnost některých regulátorů ukázaly analýzy, provedené u všech návrhů. Jako perspektivní přístup se ukázal návrh strukturovaného regulátoru, v textu označeného jako MIMO-4.

Nakonec jsou simulačně ověřeny dosažené výsledky, které ukazují na výrazné zlepšení chování křídla s tlumícím systémem z hlediska dynamických aeroelastických jevů. Systém tlumení funguje už od nízkých rychlostí až do nové kritické rychlosti, která je výrazně posunuta oproti původní. Součástí poslední části je také popis provedených a budoucích experimentů, které by doplnily simulace.

Přílohy

Příloha A

Literatura

[AM07] Panos J. Antsaklis and Anthony N. Michel, *A linear systems primer*, Birhhauser Boston, 2007.

[AN06] P. Apkarian and D. Noll, *Pnonsmooth h-infinity synthesis*, IEEE Transactions on Automatic Control **51** (2006), 71–86.

[BM07] Randal W. Beard and Timothy W. McLain, *Small unmanned aircraft theory and practice*, Wiley and Sons, 2007.

[Bro06] Forbes T. Brown, *Engineering system dynamics: A unified graph-centered approach, second edition*, CRC Press, 2006.

[DCK12] Ronald C. Rosenberg Dean C. Karnopp, Donald L. Margolis, *System dynamics, fifth edition*, Wiley and Sons, 2012.

[DIVD86] Csc. Doc. Ing. Vladimír Daněk, *Aeroelasticita*, VUT Brno, 1986.

[Gar36] I. E. Garric, *Propulsion of a flapping and oscilating airfoil, report 567*, Tech. report, NACA, 1936.

[Gar38] ———, *Reciprocal relations in the theory of nonstationary flows, report 629*, Tech. report, NACA, 1938.

[Hem15] Mark Hemedi, *Optimal input - output selection for the control of flexible structures*, Ph.D. thesis, Technischen Universitat Wien Fakultat fur Maschinenbau, 2015.

[Me13] Z. Hurák M. Řezáš, *Structured mimo h-infinity design for dual-stage inertial stabilization: Case study for hifoo and hinfstruct solvers*, IFAC Mechatronics, The Science of Intelligent Machines **23** (2013), 1084–1093.

[Nis11] Norman S. Nise, *Control systems engineering, sixth edition*, Wiley and Sons, 2011.

[Oga10] Katsuhiko Ogata, *Modern control engineering, fifth edition*, Pearson, 2010.

[Pro09] Jiří Prokop, *Algoritmy v jazyku c a c++*, Grada Publishing, 2009.

[SIm06] D. SImon, *Optimal state estimation: Kalman, h infinity, and nonlinear approaches*, Wiley and Sons, 2006.

[SP05] Sigurd Skoqestad and Ian Postlethwaite, *Multivariable feedback control, analysis and design, second edition*, Wiley and Sons, 2005.

[Sut11] Alan Neville Sutherland, *Aeroservoelastic analysis, design and wind tunnel testing of a three degree of freedom binary flutter model*, Ph.D. thesis, School of Mechanical, Industrial and Aeronautical Engineering, University of the Witwatersrand, 2011.

[Svo14] Filip Svoboda, *Aktivní potlačení flutteru na modelu křídla*, Master's thesis, České vysoké učení technické v Praze, Fakulta elektrotechnická, 2014.

[The35] Theodore Theodorsen, *General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter, report 496*, Tech. report, NACA, 1935.

[Wal09] William Paul Walker, *Unsteady aerodynamics of deformable thin airfoils*, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 2009.

[WC07] Jan R. Wright and Jonathan E. Cooper, *Introduction to aircraft aeroelasticity and loads*, Wiley, 2007.