Odvození stavového popisu modelu Inverzní kyvadlo P1

Vzhledem k tomu, že model inverzního kyvadla P1 představuje nelineární systém, bude nutné provést jeho linearizaci. Rovnice (1) a (2) vyjádříme tedy ve tvaru vhodném k linearizaci:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}=-\frac{m_p l \frac{d^2x(t)}{dt^2}\cos\theta(t)}{I}-\frac{k\frac{d\theta(t)}{dt}}{I}-\frac{m_p g\, l\sin\theta(t)}{I}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-\frac{b}{m_c}\frac{dx(t)}{dt}-\frac{m_p l\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\cos\theta(t)}{m_c}+\frac{m_p l\frac{d\theta^2(t)}{dt}\sin\theta(t)}{m_c}+\frac{c}{m_c}u(t)\qquad ,$$

kde zároveň platí

$$m_c=m_t+m_p\quad .$$

Nyní již můžeme model linearizovat. Linearizaci provedeme nejprve v obecném pracovním bodě a poté v konkrétním, námi zvoleném, pracovním bodě.

Linearizace v obecném pracovním bodě

$$\Delta\ddot\theta(t)=\left|-\frac{m_p l\cos\theta(t)}{I}\right|_p\Delta\ddot x(t)-\left|\frac{k}{I}\right|_p\Delta\dot\theta(t)+\left|-\frac{m_p g\, l\cos\theta(t)}{I}+\frac{m_p l\,\ddot x(t)\sin\theta(t)}{I}\right|_p\Delta\theta(t)$$

$$\Delta\ddot x(t)=\left|-\frac{m_p l\cos\theta(t)}{m_c}\right|_p\Delta\ddot\theta(t)+\left|\frac{2m_p l\,\dot\theta(t)\sin\theta(t)}{m_c}\right|_p\Delta\dot\theta(t)-\left|\frac{b}{m_c}\right|_p\Delta\dot x(t)$$
$$+\left|\frac{m_p l\ddot\theta(t)\sin\theta(t)}{m_c}+\frac{m_p l\dot\theta^2(t)\cos\theta(t)}{m_c}\right|_p\Delta\theta(t)+\frac{c}{m_c}\Delta u(t)$$

Linearizace v konkrétním pracovním bodě

Jako pracovní bod si zvolíme horní polohu kyvadla, tzn. do rovnic linearizovaného modelu v obecném bodě dosadíme $\theta=\pi$ a tím obdržíme následující rovnice:

$$\Delta\ddot\theta(t)=\frac{m_p l}{I}\Delta\ddot x(t)-\frac{k}{I}\Delta\dot\theta(t)+\frac{m_p g\, l}{I}\Delta\theta(t)$$

$$\Delta\ddot x(t)=\frac{m_p l}{m_c}\Delta\ddot\theta(t)-\frac{b}{m_c}\Delta\dot x(t)+\frac{c}{m_c}\Delta u(t)\quad .$$

Stavový popis modelu

Úpravou rovnic (8) a (9) a zavedením konstanty *a*, pro kterou platí

$$a=m_p^{\,2}l^2-I\,m_c$$

získáme rovnice

$$\Delta\ddot\theta(t)=\frac{k\,m_c}{a}\Delta\dot\theta(t)-\frac{m_p g\, l\, m_c}{a}\Delta\theta(t)+\frac{m_p l b}{a}\Delta\dot x(t)-\frac{m_p l}{a}\Delta u(t)$$

$$\Delta\ddot x(t)=\frac{m_p l\,k}{a}\Delta\dot\theta(t)-\frac{m_p^{\,2}l^2 g}{a}\Delta\theta(t)+\frac{b\,I}{a}\Delta\dot x(t)-\frac{I}{a}\Delta u(t)\quad .$$

K vyjádření stavového popisu potřebujeme odstranit druhé derivace. To zajistíme zavedením dalších stavů: rychlost vozíku $\Delta v(t)$ a úhlová rychlost kyvadla $\Delta\omega(t)$. Tím obdržíme rovnice

$$\begin{aligned}
&\Delta\dot{\omega}(t)=\frac{k\,m_c}{a}\Delta\omega(t)-\frac{m_p\,g\,l\,m_c}{a}\Delta\theta(t)+\frac{m_p\,l\,b}{a}\Delta v(t)-\frac{m_p\,l}{a}\Delta u(t)\\
&\Delta\dot{\theta}(t)=\Delta\omega(t)\\
&\Delta\dot{v}(t)=\frac{m_p\,l\,k}{a}\Delta\omega(t)-\frac{m_p^{\,2}\,l^2\,g}{a}\Delta\theta(t)+\frac{b\,I}{a}\Delta v(t)-\frac{I}{a}\Delta u(t)\\
&\Delta\dot{x}(t)=\Delta v(t)
\end{aligned}$$

Ze znalosti obecné rovnice stavového popisu

$$\begin{aligned}
&\Delta\frac{dx(t)}{dt}=A\,\Delta x(t)+B\,\Delta u(t)\\
&\Delta y(t)=C\,\Delta x(t)+D\,\Delta u(t)\quad ,
\end{aligned}$$

kde je v našem případě stavový vektor:

$$x(t)=[\Delta\omega(t)\Delta\theta(t)\Delta v(t)\Delta x(t)]^T\quad ,$$

získáme stavové matice systému

$$A=\begin{bmatrix}\frac{k\,m_c}{a} & -\frac{m_p\,g\,l\,m_c}{a} & \frac{m_p\,l\,b}{a} & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{m_p\,l\,k}{a} & -\frac{m_p^2\,l^2\,g}{a} & \frac{b\,I}{a} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}-\frac{m_p\,l}{a}\\ 0\\ -\frac{I}{a}\\ 0\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}\quad .$$

Po dosazení hodnot těchto matic do obecné rovnice přenosu systému

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

získáme přenos systému:

$$G(s)=\frac{-(lm_p\,a)\,s}{a^2\,s^3-(Iab+akm_c)\,s^2+(aglm_c\,m_p-bkl^2\,m_p^{\,2}+Ibkm_c)\,s-Ibglm_c\,m_p+bgl^3\,m_p^{\,3}}\quad .$$