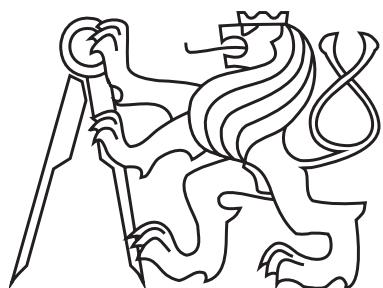


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

**Velikost nelinearity nelineárního systému
v otevřené a uzavřené smyčce**

Praha, 2014

Autor: Petr Vála

Autor: Petr Vála
Kybernetika a robotika

Vedoucí: Doc. Ing. Petr Hušek, Ph.D.
Katedra řídicí techniky, Fakulta elektrotechnická.
České vysoké učení technické v Praze

Rok: 2014

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 10.5.2014



Petr Vála

Poděkování

Děkuji především vedoucímu bakalářské práce Doc. Ing. Petru Huškovi, Ph.D. za jeho cenné rady a čas, který mi ochotně věnoval při řešení dané problematiky.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá popisem nelinearit klasických systémů řídící techniky. Těmito systémy jsou 1-válcová vodárna, 2-válcová vodárna, a inverzní kyvadlo. Každý ze systémů je hodnocen Vinnicombovou metrikou a dvěma dalšími metrikami představenými v této práci. Cílem je určit pracovní oblasti systémů na základě vyhodnocení metrik popisujících nelinearity a ověřit jejich platnost simulacemi.

Abstract

This Bachelor Thesis deals with description of nonlinearities in classical systems used in Control Engineering. Those systems are: Water Tank, Coupled Tanks, and Inverted Pendulum. Each of these systems is evaluated by Vinnicombe metric and by two other metrics introduced in this thesis. The goal is to determine systems operating areas on the basis of nonlinearity describing metrics, and to verify their validity with simulations.

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická
katedra řídicí techniky

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: **Petr Vála**

Studijní program: Kybernetika a robotika
Obor: Systémy a řízení

Název tématu: **Velikost nelinearity nelineárního systému v otevřené a uzavřené smyčce**

Pokyny pro vypracování:

1. Vypracujte přehled možností měření velikosti nelinearity nelineárního systému v otevřené a uzavřené smyčce.
2. Pro několik klasických nelineárních systémů určete velikosti jejich nelinearit v okolí různých pracovních bodů v otevřené i uzavřené smyčce.
3. Na základě výsledků z bodu 2 vyberte vhodné příklady pro ilustraci velikosti okolí platnosti linearizovaného systému.

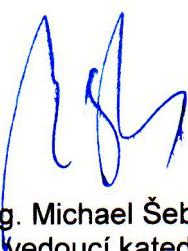
Seznam odborné literatury:

- [1] G.F. Franklin, J.D. Powell, A. Emami-Naeini: Feedback Control of Dynamic Systems. Prentice Hall, 2006
- [2] D. Qian, J. Yi and S. Tong: Understanding Neighborhood of Linearization in Undergraduate Control Education, IEEE Control Systems Magazine, vol. 33, No. 4, 2013, 54-60
- [3] G. Vinnicombe, Frequency domain uncertainty and the graph topology, IEEE Trans. Autom. Contr., vol. 38, no. 9, pp. 1371-1383, 1993

Vedoucí: Doc.Ing. Petr Hušek, Ph.D.

Platnost zadání: do konce letního semestru 2013/2014

prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry



prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.
děkan



Obsah

Seznam obrázků	xi
Seznam tabulek	xiii
Notace	1
1 Úvod	3
2 Metody měření nelinearity	5
2.1 Vinnicombova metrika	5
2.2 Míra v otevřené smyčce	7
2.3 Míra v uzavřené smyčce	7
2.4 Další metody měření nelinearity	8
2.4.1 Vzdálenost lineárního a nelineárního systému	9
2.4.2 Křivost nelineární funkce	9
3 1-válcová vodárna	11
3.1 Popis systému	11
3.2 Výpočet δ_v	12
3.3 Výpočet δ_{OL}	13
3.4 Návrh PI regulátoru a výpočet δ_{CL}	13
3.5 Měření odezv	15
3.6 Výsledky experimentu	17
4 2-válcová vodárna	19
4.1 Popis systému	19
4.2 Výpočet δ_v	21
4.3 Výpočet δ_{OL}	21

4.4	Návrh regulátorů a výpočet δ_{CL}	22
4.5	Měření odezv	24
4.6	Výsledky experimentu	28
5	Inverzní kyvadlo	31
5.1	Popis systému	31
5.2	Výpočet δ_v	32
5.3	Výpočet δ_{OL}	33
5.4	Návrh regulátorů a výpočet δ_{CL}	33
5.5	Měření odezv	37
5.6	Výsledky experimentu	37
6	Závěr	39
Literatura		41
A	Obsah přiloženého CD	I

Seznam obrázků

2.1	Schéma systému	5
3.1	1-válcová vodárna	11
3.2	1-válcová vodárna: měření δ_v	13
3.3	1-válcová vodárna: δ_{OL} a δ_{CL}	14
3.4	1-válcová vodárna: změna reference	15
3.5	1-válcová vodárna: Změna počátečních podmínek	16
4.1	2-válcová vodárna	19
4.2	2-válcová vodárna: δ_v a δ_{OL}	21
4.3	2-válcová vodárna: δ_{CL}	24
4.4	2-válcová vodárna: změna reference	26
4.5	2-válcová vodárna: změna počáteční podmínky	27
5.1	Inverzní kyvadlo	31
5.2	Inverzní kyvadlo: δ_v a δ_{OL}	33
5.3	Inverzní kyvadlo: $\delta_{CL}(PD)$ a $\delta_{CL}(Lead)$	34
5.4	Inverzní kyvadlo: změna počátečních podmínek	36

Seznam tabulek

3.1	1-válcová vodárna: změna reference	16
3.2	1-válcová vodárna: změna počáteční podmínky	17
4.1	2-válcová vodárna: změna reference	26
4.2	2-válcová vodárna: změna počáteční podmínky	27
5.1	Inverzní kyvadlo: změna počátečních podmínek	36

Notace

Symbol	Význam	Jednotka
A, B, C, D	stavové matice	
I	jednotková matice	
t	čas (spojitý)	s
u, x, y	vektory vstupu, stavů, a výstupu	
δ_v	Vinnicombova míra	
$ \cdot $	amplituda	
$H_\infty, \ \cdot\ _\infty$	nekonečná norma	
δ_{OL}	rozdílnost v otevřené smyčce	
δ_{CL}	rozdílnost v uzavřené smyčce	
a^*	číslo komplexně sdružené k a	
T_s	doba ustálení	s
$\%OS$	překmit v procentech	
ζ	poměrné tlumení	
ω_0	přirozená frekvence	s^{-1}

Kapitola 1

Úvod

Automatické řízení je odvětví umožňující řízení velice komplikovaných systémů a návrh systémů, které by bez řízení nebyly schopny provozu. Drtivá většina těchto systémů je nelineární, což implikuje složitý popis i komplikace pro návrh řízení. Z tohoto důvodu jsou systémy linearizovány v nějaké pracovní oblasti.

Pro lineární, respektive linearizované systémy již existují snáze použitelné metodiky návrhu regulátorů, avšak tyto systémy nejsou s nelineárními totožné. Platí, že regulátory navržené pro lineární systémy budou systém nelineární regulovat jen v okolí pracovního bodu. Termín „okolí“ je však dán mírou nonlinearity daného systému. Lze proto říci, že pro systémy vykazující malou nonlinearity bude navržený regulátor použitelný i velmi daleko od pracovního bodu. Oproti tomu systémy popsané rapidně se měnícimi funkcemi budou regulátorem regulovány jen v určitém malém okolí pracovního bodu.

Odezva systému samotného se od odezvy v uzavřené smyčce bude lišit v závislosti na nonlinearity systému, navrženém regulátoru, i řídících signálech. Nonlinearity systému lze měřit, avšak otázkou zůstává, jaký je vztah mezi systémem v otevřené smyčce a systémem ve smyčce uzavřené. Již zavedenými metrikami a některými novými se zabývá Kapitola 2 s podtitulem „Metody měření nonlinearity“. Ve třech následujících kapitolách jsou tyto metriky testovány na různých klasických modelech teorie řízení se vzrůstající složitostí. Jsou jimi 1-válcová vodárna (Kap. 3), 2-válcová vodárna (Kap. 4), a inverzní kyvadlo (Kap. 5). V závěrečné Kapitole 6 jsou shrnutы výsledky testování dnaých systémů a důsledky z toho plynoucí.

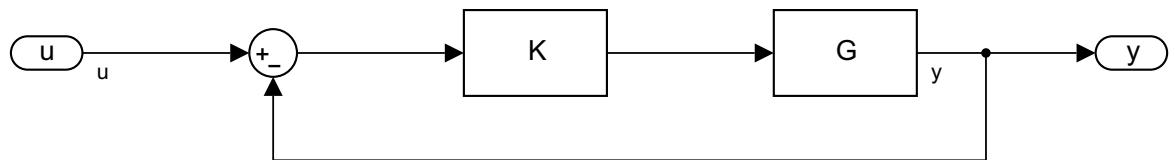
Kapitola 2

Metody měření nelinearity

Tato kapitola se zabývá metodikou porovnávání systémů. Jelikož jsou všechny přírodní systémy popsány diferenciálními rovnicemi, analyticky jde o porovnání řešení těchto rovnic. U většiny nelineárních systémů je však toto porovnání možné provést pouze numericky. Zdůrazněme, že jsou ve zde představených metodách vždy porovnávány dva *lineární*, respektive linearizované systémy.

Nejprve je představena obecně používaná Vinnicombova metrika, která je dále používána jako standard v této práci. Dále jsou uvedeny způsoby měření rozdílnosti systémů v otevřené i uzavřené smyčce, které představují, současně s jejich experimentálním ověřením, těžiště této práce.

2.1 Vinnicombova metrika



Obrázek 2.1: Schéma systému

Glenn Vinnicombe představil v roce 1993 metriku porovnávající dva systémy, které mají obecně více proměnných. Tato metrika, která bude dále značena δ_v , je pro soustavu

(obr. 2.1) s regulátorem K a systémem G definována vztahem

$$\delta_v(G_0, G_1) = \left\| (I + G_1 G_1^*)^{-\frac{1}{2}} (G_1 - G_0) (I + G_0^* G_0)^{-\frac{1}{2}} \right\|_\infty \leq 1 \quad (2.1)$$

kde $\|\cdot\|_\infty$ značí nekonečnou normu a G_i^* , $i = \{1, 2\}$, značí číslo komplexně sdružené k G_i . G_0 a G_1 jsou pak dva systémy, jejichž vzdálenost (rozdílnost) testujeme. Numerická hodnota δ_v se pohybuje v rozmezí $0 \leq \delta_v(G_0, G_1) \leq 1$, kdy $\delta_v(G_0, G_1) = 0$ značí, že systémy jsou identické a pro $\delta_v(G_0, G_1) = 1$ platí, že systémy jsou absolutně vzdálené. Vztah 2.1 lze interpretovat takto: Jakýkoli systém G_1 , jehož δ_v vzdálenost od testovacího systému G_0 je menší než určitá konstanta β , bude stabilizován jakýmkoli regulátorem K , který stabilizuje G_0 s bezpečností stability β . Dále, každý systém G_1 vzdálený od G_0 o δ_v větší než β bude destabilizován některým regulátorem K , který stabilizuje G_0 s bezpečností stability větší než β . Vinnicombe dále dokazuje, jak už z interpretace plyne, že δ_v dosahuje nejmenší možné hodnoty při porovnání dvou systémů a není omezena jen na stabilní systémy. Je-likož jsou systémy porovnávány v uzavřené smyčce, může v některých případech jejich δ_v dosahovat nízkých hodnot i přestože jsou odezvy v otevřených smyčkách diametrálně odlišné (Vinnicombe, 1993).

Příklad 2.1: Tuto skutečnost ilustrují následující systémy

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{s+1}, & P_2 &= \frac{1}{s-1}, \\ P_3 &= \frac{100}{2s+1}, & P_4 &= \frac{100}{2s-1}. \end{aligned}$$

Spočítáním δ_v zjistíme, že $\delta_v(P_1, P_2) = 1$, zatímco $\delta_v(P_3, P_4) = 0,02$. V obou případech je dynamika otevřené smyčky podstatně odlišná, avšak u odezvy uzavřené smyčky je tomu jinak. Pro první dva systémy dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{P_1 + 1} &= \frac{1}{s+2}, \\ \frac{P_2}{P_2 + 1} &= \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Tedy systém P_1 je stabilní, zatímco P_2 je na mezi stability. Oproti tomu přenosové funkce druhé dvojice systémů jsou takřka stejné

$$\begin{aligned} \frac{P_3}{P_3 + 1} &= \frac{50}{s+50,5}, \\ \frac{P_4}{P_4 + 1} &= \frac{50}{s+49,5}. \end{aligned}$$

Hlubší teoretický rozbor této metriky, jakož i její výpočet je náročný a výrazně přesahuje rámec této práce.

Ve výpočetním prostředí MATLAB je však výpočet δ_v realizován funkcí `gapmetric`, která počítá vzdálenost mezi dvěma LTI¹ systémy. Díky tomuto nástroji lze k δ_v metrice přistupovat bez nutnosti hlubokých matematických znalostí. Syntaxe je následující:

```
[gap1,gap2] = gapmetric(p0,p1)
```

kde $gap1$ a $gap2$ jsou metriky podobnosti (δ_v je $gap2$) a $p0$, $p1$ jsou LTI systémy, které porovnáváme, respektive systémy linearizované v pracovních bodech. Relativní přesnost, která je nativně nastavena na 10^{-3} , lze změnit volitelným třetím parametrem `tol`.

2.2 Míra v otevřené smyčce

Definujme metriku měření nelinearity v otevřené smyčce. Otevřenou smyčkou je zde myšlen pouze systém samotný.

Definice 2.1 (Rozdílnost v otevřené smyčce): Mějme přenosové funkce G_0 a G_1 . Pak rozdíl

$$\delta_{OL}(G_0, G_1) = \|G_0 - G_1\|_\infty, \quad (2.2)$$

kde $\|\cdot\|_\infty$ značí nekonečnou normu H_∞ , nazveme *rozdílností systémů v otevřené smyčce*.►

Norma H_∞ pro SISO² systémy odpovídá maximální hodnotě amplitudy frekvenční charakteristiky těchto systémů. Tedy máme-li přenos $H(j\omega)$, pak

$$\|H(j\omega)\|_\infty = \max_\omega |H(j\omega)| = \max_\omega \sqrt{(\Re\{H(j\omega)\})^2 + (\Im\{H(j\omega)\})^2}. \quad (2.3)$$

V případě, že bude zřejmé, které dva systémy jsou testovány, bude dále používáno i značení δ_{OL} .

2.3 Míra v uzavřené smyčce

Tato podkapitola se zabývá metodou vycházející z míry otevřené smyčky. Posun od předchozí metody je jednoznačný - jednak z uzavřené smyčky vyplývá podstatně odlišná

¹LTI neboli Linear Time-Invariant je zkratka pro lineární systémy neproměnné v čase.

²SISO neboli Single Input-Single Output je zkratka pro systémy s jedním vstupem a jedním výstupem.

dynamika systému, například stabilizace nestabilního systému. Za druhé je zde navíc dynamika regulátoru, jehož kvalitu lze touto metodou také testovat.

Definice 2.2 (Rozdílnost v uzavřené smyčce): Mějme přenosové funkce dvou systémů G_0, G_1 a regulátoru K . Pak rozdíl

$$\begin{aligned}\delta_{CL}(G_0, G_1, K) &= \|T_0 - T_1\|_\infty, \\ T_i &= \frac{G_i K}{1 + G_i K}, \quad i = \{0, 1\},\end{aligned}\tag{2.4}$$

kde $\|\cdot\|_\infty$ značí nekonečnou normu H_∞ , nazveme rozdílností systémů v uzavřené smyčce.►

Dále bude také používáno značení δ_{CL} , pokud budou zřejmé systémy i regulátor, či $\delta_{CL}(K)$ pro regulátor K , pokud budou zřejmě porovnávané systémy.

Jelikož jsou δ_{CL} a δ_v obě míry v uzavřené smyčce, má smysl rozebrat jejich rozdíly:

Identické systémy: Zde platí $\delta_v(G_0, G_1) = 0 \Rightarrow \delta_{CL}(G_0, G_1, K) = 0$, jelikož regulátor K je stejný pro oba systémy. Opačná implikace však neplatí, protože lze najít dva systémy $G_0 \neq G_1$ takové, že po regulaci regulátorem K bude jejich H_∞ nulová.

(Absolutně) Vzdálené systémy: V tomto případě $\delta_v = 1$. Pro $\delta_{CL}(G_0, G_1, K)$ však toto neplatí, což ostatně plyne z oboru hodnot $\mathcal{H}(\delta_{CL}(G_0, G_1, K)) = \langle 0, \infty \rangle$.

Graf δ_{CL} : Je zřejmé, že δ_v a δ_{CL} jsou různá čísla a jejich graf bude také různý. Zatímco δ_{CL} je hodnota vypovídající o nelinearitě systému regulovaného jedním regulátorem, K , δ_v je hodnota vypovídající o nelinearitě systému podrobeného regulaci všemi regulátory.

Lze předpokládat, že δ_v a δ_{CL} by měly mít podobný graf, avšak ověření ponecháme na experimentální části.

2.4 Další metody měření nonlinearity

Existuje více metod, kterými lze stanovit nelinearitu systému, lze je však rozřadit do dvou skupin. První skupina se zabývá určením vzdálenosti nelineárního systému od jiného, lineárního. Druhá skupina pak popisuje tvar křivky jako takový. Ucelený přehled včetně nezanedbatelného množství zdrojů prezentuje (Li, 2012):

2.4.1 Vzdálenost lineárního a nelineárního systému

Základ metod porovnávání vzdálenosti položil (Beale, 1960). Jeho práce se zabývá stanovením vzdálenosti mezi nelineární funkcí g a funkcí linearizovanou rozvojem 1. stupně Taylorovy řady v nějakém bodě x_0 . Míra je definována jako normovaná vzdálenost mezi g a její lineární approximací v několika bodech v okolí x_0 . Tato práce sloužila jako základ pro všechny další metody v této kategorii.

Problémů tohoto přístupu je několik. Jednak je jím nutnost vypočítat derivaci funkce, ta vždy nemusí existovat, nebo může být obtížná na výpočet. Další metody zabývající se popisem vzdálenosti křivek však již derivaci nevyžadují.

Dalším problémem je, že míra určuje vzdálenost křivek v jednom bodě. Pro popis celé funkce většinou používají nejhorší případ (v nejhorším bodě). To však znamená nějakou extrémní hodnotu vstupu, která nemusí vypovídat o systému velmi dobře. Spíše udává nejhorší případ vzdálenosti systémů a popisuje systém horší, než v běžných provozních podmírkách je.

2.4.2 Křivost nelineární funkce

Do této kategorie lze zařadit metody popisující křivky pomocí diferenciálů. (Bates, 1980) uvádí, jak určit míru pomocí první a druhé derivace dané nelineární funkce v nějakém směru. Tyto derivace lze nazvat *okamžitou rychlosť* a *okamžité zrychlení* v daném bodě, ve kterém je míra nonlinearity počítána. Jelikož okamžité zrychlení nemusí ležet v tečné rovině okamžité rychlosti, je použit podíl těchto derivací k získání dané metriky.

$$N^I(x) = \max_l \frac{\|\ddot{z}_l^N\|}{\|\dot{z}_l\|^2}, \quad (2.5)$$

kde N^I je vlastní křivost (nonlinearity) funkce z v určitém směru l , a \ddot{z}_l^N je složka druhé derivace kolmá k tečné rovině. Tato míra nezávisí na parametrizaci.

Výhody této metody spočívají v jednoduchosti výpočtu metriky, pokud jsou k dispozici derivace. Také je z ní patrnější její geometrická a fyzikální interpretace oproti těm porovnávajícím vzdálenost od lineární approximace. Nevýhodou je ale i zde to, že je daná metrika počítána pouze v určitém bodě. Pro rozšíření na celou funkci pak lze opět použít nejhorší výsledek. To však již může být výpočetně náročné.

Poslední dvě prezentované metriky jsou uvedené pro kompletnost a tato práce se jimi dále, ani do větší hloubky nezabývá.

Kapitola 3

1-válcová vodárna

Tato kapitola se zabývá systémem 1-válcové vodárny, který je nejprve popsán a poté je stanovena jeho míra nelinearity. Ta je zpracována v sekcích zvlášť pro δ_v , δ_{OL} a δ_{CL} . Dále porovnáváme odezvy systému s naměřenými hodnotami.

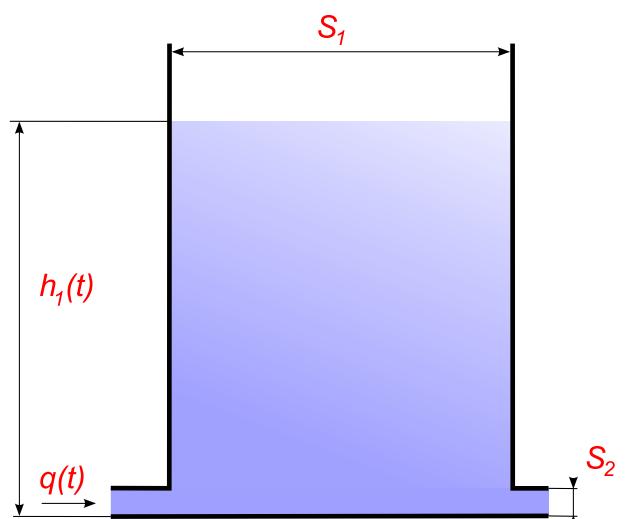
3.1 Popis systému

1-válcová vodárna je systém prvního řádu s jedním vstupem a jedním výstupem. Vstupem je přítok a výstupem je výška hladiny. Systém vodárny je popsán touto rovnicí

$$\dot{h}(t) = -\frac{S_2}{S_1} \sqrt{2gh(t)} + \frac{q(t)}{S_1}, \quad (3.1)$$

kde $h(t)$ [m] je výška hladiny, $q(t)$ [$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$] je objemový přítok, $S_1 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ je průřez nádrže, $S_2 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ je průřez výpusti, a $g = 9,82 \text{ m s}^{-2}$ je gravitační zrychlení (ROUBAL, J. et al., 2011).

Rozsah hladin, ve kterém bude vodárna hodnocena, bude v rozmezí $(0; 2)$ m, pracovní bod P_0 bude pro $h(t) = 0,5$ m. Připomeňme, že aby byl systém lineární, je třeba brát v úvahu i záporný přítok q a systém neomezený saturací.



Obrázek 3.1: 1-válcová vodárna

Po substituci $u = q, x = h, y = h = x$ vypočteme pracovní bod položením levé strany rovnice 3.1 rovné nule, což platí pro ustálený stav.

$$u_0 = \sqrt{2S_2^2 gx_0} \quad (3.2)$$

Nyní linearizujme systém v obecném pracovním bodě pomocí Taylorova rozvoje

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{S_2}{S_1} \sqrt{2gx_0} + \frac{1}{S_1} u_0 - \frac{S_2 \sqrt{2g}}{2S_1 \sqrt{x(t)}} \Big|_{x_0} \Delta x(t) + \frac{1}{S_1} \Delta u(t), \\ y(t) &= x_0 + \Delta x(t), \end{aligned} \quad (3.3)$$

kde $\Delta x(t) = x(t) - x_0$ a $\Delta u(t) = u(t) - u_0$. Matice stavového popisu pro obecný pracovní bod, odvozené z rovnic 3.3, jsou následující

$$\mathbf{A} = \left[-\frac{S_2}{2S_1} \sqrt{\frac{2g}{x_0}} \right], \quad \mathbf{B} = \left[\frac{1}{S_1} \right], \quad \mathbf{C} = [1], \quad \mathbf{D} = [0]. \quad (3.4)$$

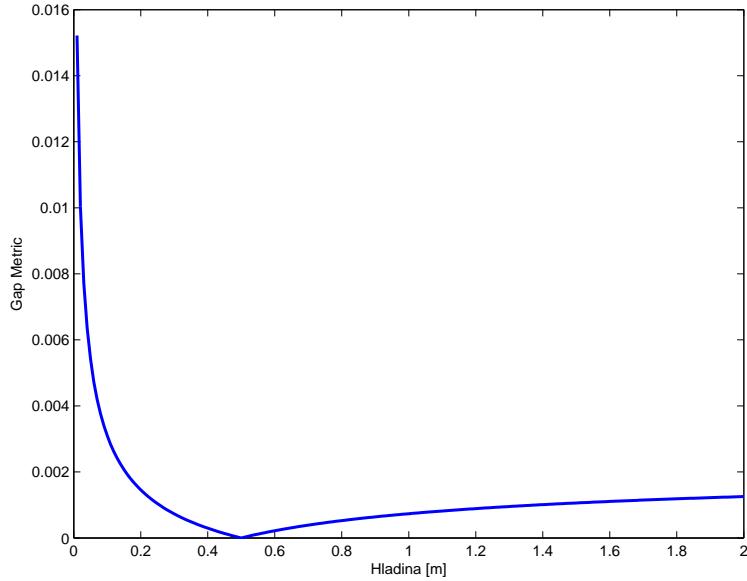
Dosadíme li do rovnice 3.2 naše požadavky, tedy $x_0 = 0,5$ m, obdržíme druhou souřadnici $u_0 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Přenosová funkce linearizovaná v bodě P_0 o právě nalezených souřadnicích je pak:

$$H_{P_0} = \frac{33,33}{s + 0,0836}. \quad (3.5)$$

3.2 Výpočet δ_v

Jak již bylo výše zmíněno, prostředí MATLAB nabízí funkci `gapmetric`, počítající δ_v . Je-likož je Vinnicombova míra definována jako rozdíl dvou LTI systémů a vodárna je systém nelineární (stavová proměnná pod odmocninou), využijeme nyní popisu v obecném pracovním bodě (3.4), a vypočítáme rozdíl mezi přenosem nominálním H_{P_0} , a systémem linearizovaným v jiných pracovních bodech. Tyto pracovní body budeme volit s krokem 1 cm.

Z obrázku 3.2 lze vidět, že δ_v dosahuje nejmenší, nulové, hodnoty v bodě 0,5 metru. Nejvyšší hodnota je pak v bodě 0,01 metru - asi 0,015. Tedy se snižující se hladinou oproti P_0 stoupá nelinearita vodárny podstatně více nežli s hladinou vyšší. Dle (Qian et al., 2013) však hranice, kdy jsou systémy ještě dostatečně podobné, aby byly snadno regulovatelné jedním regulátorem, je cca $\delta_v = 0,1$. Z tohoto předpokladu tedy lze říci, že nelinearita vodárny je zanedbatelná.

Obrázek 3.2: 1-válcová vodárna: měření δ_v

3.3 Výpočet δ_{OL}

V tomto výpočtu získáme δ_{OL} dle jeho vzorce 2.2, pro výpočet H_∞ využijeme příkazu MATLABu `getPeakGain`. Pro referenci ponecháme identický krok s výpočtem δ_v . Nahlédnutím na obr. 3.3a vidíme, že nelinearity δ_{OL} stoupá na obě strany od pracovního bodu téměř stejně rychle, z čehož by se dalo usuzovat, že systém vodárny bez regulace je stejně nelineární pro klesající i stoupající hladinu. numericky je sice δ_{OL} mnohokrát větší než δ_v , ale k jejich shodě není žádný důvod.

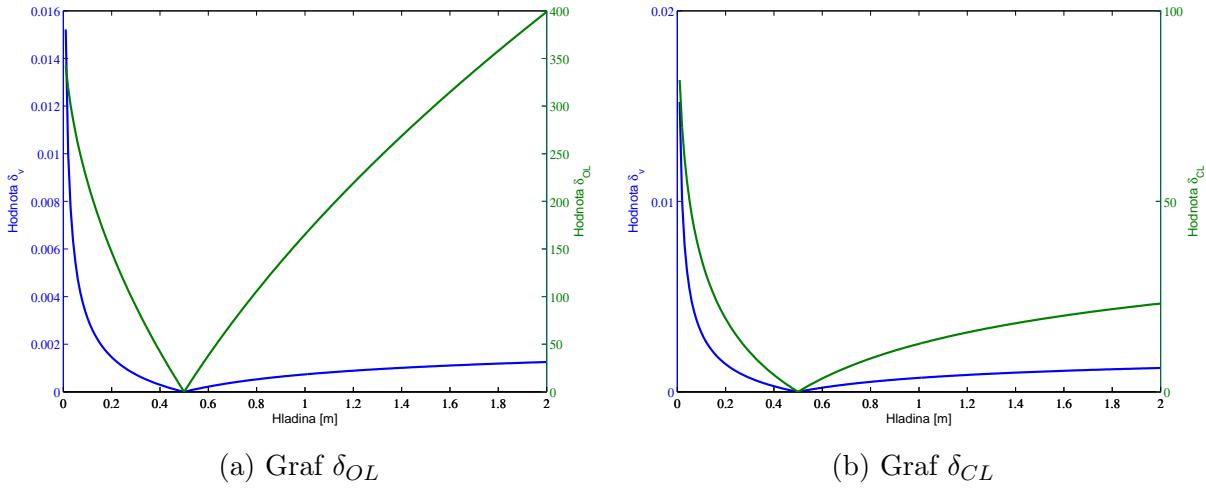
3.4 Návrh PI regulátoru a výpočet δ_{CL}

Abychom mohli porovnávat systém v uzavřené smyčce, je nutné navrhnout regulátor pro daný systém. Zvolíme PI regulátor, po kterém budeme požadovat následující:

$$T_s = 30 \text{ s}; \quad \% OS = 10 \quad (3.6)$$

kde T_s je doba ustálení s hranicí 2 % a $\% OS^1$ je překmit v procentech. Pro návrh pomocí charakteristického polynomu tyto požadavky převedeme na poměrné tlumení ζ

¹Overshoot = překmit



Obrázek 3.3: 1-válcová vodárna: δ_{OL} a δ_{CL}

a přirozenou frekvenci ω_0 :

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS)}} = 0,5912; \quad \omega_0 \approx \frac{4}{\zeta T_s} = 0,2255 \text{ s}^{-1}. \quad (3.7)$$

Mějme systém a regulátor ve tvarech

$$H = \frac{K}{s+p}; \quad K_{PI} = \frac{k_P s + k_I}{s} \quad (3.8)$$

kde K je zesílení systému, p je pól přenosu, a k_P, k_I jsou konstanty proporcionálního a integrálního zesílení regulátoru. Pro 3.8 obdržíme charakteristický polynom uzavřené smyčky a tento srovnáme s charakteristickým polynomem systému druhého řádu 3.9.

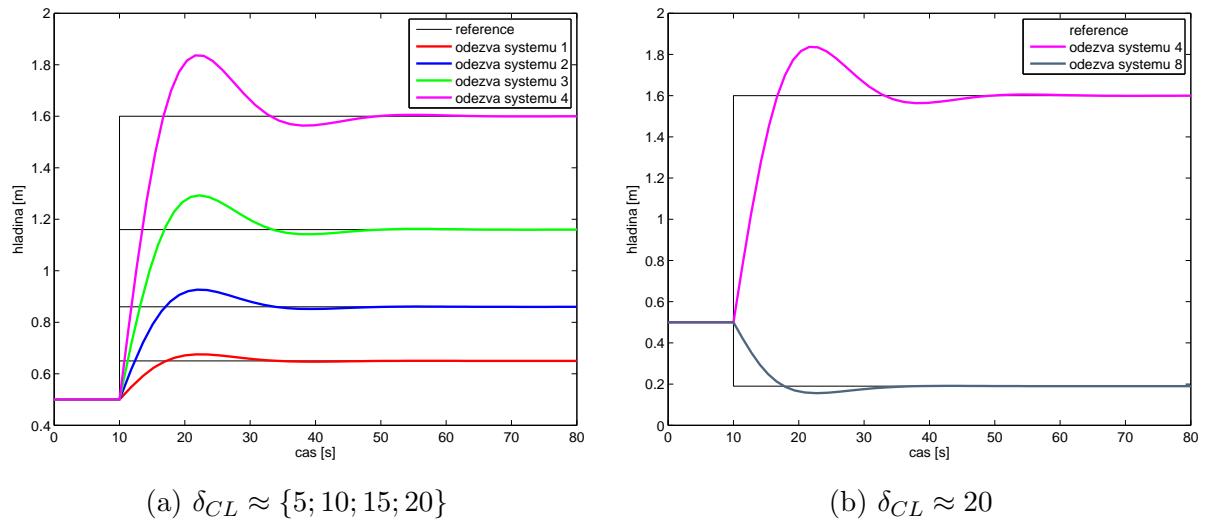
$$\begin{aligned} c(s) &= (p + s)s + K(k_P s + k_I) \\ c(s) &= s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Odtud již výpočtem a dosazením parametrů 3.7 obdržíme konstanty regulátoru:

$$k_I = \frac{\omega_0^2}{K} = 0,0015; \quad k_P = \frac{2\zeta\omega_0 - p}{K} = 0,0055. \quad (3.10)$$

Nyní již jen zapojíme regulátor do systému a získáme obr. 3.3b.

Jak je vidět, graf δ_{CL} již lépe kopíruje graf δ_v a to jak při hladinách nad pracovním bodem, tak při hladinách nižších. Tento výsledek však má smysl, jelikož obě metriky jsou definovány na uzavřené smyčce. Numericky jsou obě metriky opět jiné, ovšem to má smysl, jelikož δ_{CL} není nijak škálovaná na rozdíl od δ_v . Podstatný je tedy opravdu spíše tvar.



Obrázek 3.4: 1-válcová vodárna: změna reference

3.5 Měření odezev

Nyní zbývá vypočítané metriky ověřit a zjistit, jestli se shodují s odezvami nelineárního systému. Měření provedeme na různých hladinách vodárny. Jelikož metriky určují „vzdálenost“ systémů mezi sebou, využijeme těchto metrik pro stanovení vhodných bodů měření odezvy. Ačkoli by se zdálo, že proměření systému v ekvidistantních bodech bude správné, my opravdu chceme proměřit systém *ekvidistantně v metrice*. Což v podstatě znamená, že v grafu metriky určíme horizontální hladiny se stejným krokem. Metrika, jajíž hladiny použijeme, bude δ_{CL} .

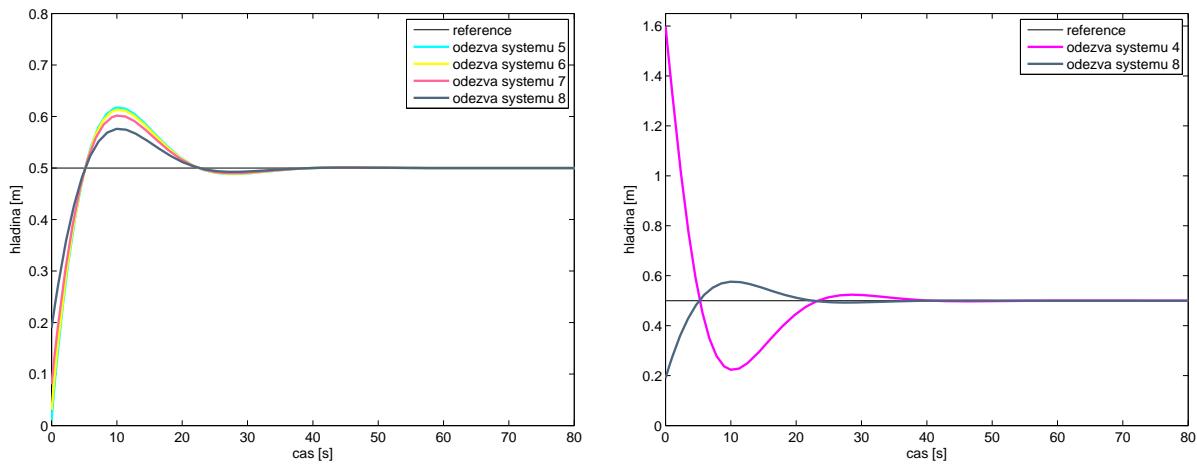
Vlastní měření provedeme dvěma způsoby - jednak změnou reference na bod mimo P_0 , za předpokladu ponechání počáteční podmínky v pracovním bodě, a za druhé změnou počátečních podmínek za ponechání reference v P_0 . Obrázek 3.4 zobrazuje výsledky měření změny reference. Hodnoty metriky, pro které byly odezvy generovány, jsou vyznačeny pod grafy a také v tabulce 3.1. Jak je z obr. 3.4a zřejmé, změny v odezvách nejsou na pohled velmi rozdílné. Má však smysl spočítat jejich charakteristiky, konkrétně překmit a dobu ustálení. Tato data lze porovnat v tabulce 3.1.

Obrázek 3.4b ukazuje napouštění a vypouštění vodárny pro dvě hladiny, které mají hodnotu $\delta_{CL} \approx 20$. Toto porovnání má smysl, protože obě metriky, δ_v i δ_{CL} , určují vzdálenost od pracovního bodu, avšak ne v tomtéž směru. Vdálenost těchto bodů tedy není nutně nulová. Výpočtem δ_{CL} mezi těmito dvěma systémy zjistíme, že $\delta_{CL} = 40,3695$, což je rovné součtu jejich vzdáleností v δ_{CL} od pracovního bodu. Porovnáme-li tento výsledek s δ_v , zjistíme, že Vinnicombova metrika ukazuje to samé. Tedy pro systémy na

x [m]	δ_{CL}	%OS	T_s [s]
0,65	4,9999	3,9254	32,3609
0,86	10,0334	7,7689	41,7411
1,16	15,0490	11,4342	42,8225
1,60	20,0061	14,7710	43,4189
0,19	20,3634	10,9700	33,5355

Tabulka 3.1: 1-válcová vodárna: změna reference

hladinách 1,6 metru a 0,19 metru je $\delta_v(H_{P0}, H_{19}) = 0,0016$ a $\delta_v(H_{P0}, H_{160}) = 0,0011$ vzdálenost od pracovního bodu. Pro vzdálenost mezi těmito systémy pak $\delta_v(H_{19}, H_{160}) = 0,0027$. Rozdíl mezi systémy lze také vyčíst z rozdílných hodnot překmitu a ustálení v tabulce 3.1.



Obrázek 3.5: 1-válcová vodárna: Změna počátečních podmínek

Oba tyto systémy, H_{19} a H_{160} , lze porovnat také při změně počátečních podmínek, jak je zobrazeno v grafu 3.5b. V tomto případě je doba ustálení takřka stejná, ale je větší rozdíl v překmitu. V grafu 3.5a si povšimněme, že všechny odezvy mají téměř totožnou dobu ustálení a i rozdíly v překmitu jsou o mnoho méně markantnější, než v případě odezv na změnu reference. A to i přestože hodnoty metriky δ_{CL} jsou pro změnu počátečních podmínek jedno- až čtyřnásobné. Skutečné rozdíly hladin jsou však velmi malé (viz tabulka 3.2).

Tabulky 3.1 a 3.2 popisují charakteristiky odezv na změnu reference (3.1) a na změnu

x [m]	δ_{CL}	% OS	T_s [s]
1,60	20,0061	25,1545	30,2471
0,19	20,3634	15,1971	30,8472
0,08	39,9108	20,3604	30,7427
0,03	61,3372	22,6131	30,6776
0,01	81,8378	23,4806	30,6472

Tabulka 3.2: 1-válcová vodárna: změna počáteční podmínky

počátečních podmínek (3.2). V prvním sloupci jsou cílové (počáteční) hladiny, a dále míra v uzavřené smyčce mezi systémem na dané hladině a systémem v pracovním bodě P_0 . % OS a T_s značí překmit a dobu ustálení. Systémy H_{19} a H_{160} jsou obsaženy v obou tabulkách, jelikož jsou podrobeny jak testu na změnu počátečních podmínek, tak testu na změnu reference.

3.6 Výsledky experimentu

Pro systém 1-válcové vodárny byly spočítány metriky δ_v , δ_{OL} , a δ_{CL} . Na základě hodnot poslední z nich byly navrženy vzdálenosti od pracovního bodu P_0 , které má smysl použít pro vyhodnocení odezv. Byly vygenerovány odezvy na změnu reference a dále na změnu počátečních podmínek. Parametr, který nebyl v daném pokusu podroben změně (reference při testu na změnu počátečních podmínek a naopak), byl nastaven do pracovního bodu. Výsledky ukázaly stejné doby ustálení pro změnu počátečních podmínek. Pro změnu reference byly kratší doby ustálení pro refrence blízko pracovního bodu, jinak byly podobné. Pro odezvy na změnu počátečních podmínek byla velmi podobná i velikost překmitu, zatímco pro změnu reference se velikost překmitu průběžně zhoršovala s rostoucí vzdáleností od pracovního bodu. Shodu v charakteristikách odezv na změnu počátečních podmínek lze vysvětlit tím, že s přiblížením se k pracovnímu bodu jsou průběhy odezev stále více lineární. Tím lze vysvětlit i to, že méně lineární systémy pro nízké hladiny nemají velký vliv na odezvu při napouštění vodárny. Odezvy na změnu reference vykazují zhoršující se překmit s větší vzdáleností od pracovního bodu P_0 .

Závěrem je však nutné dodat, že 1-válcová vodárna je systém velice blízký lineárnímu. To plyne nejen z prostého řádu systému, ale lze na to použít i Vinnicombovu metriku,

která je patřičně naškálovaná. Pro vodárnu je maximální hodnota $\delta_v = 0,0152$, což spadá do intervalu $\langle 0; 0,1 \rangle$, který dle (Qian et al., 2013) určuje systémy ještě akceptovatelné jako lineární.

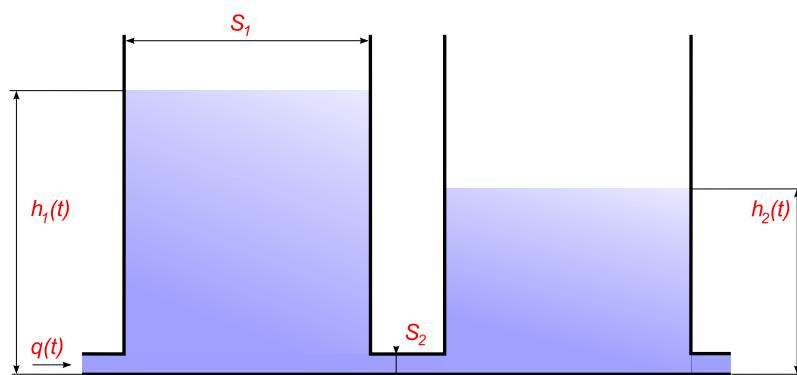
Kapitola 4

2-válcová vodárna

Druhým systémem, kterým se tato práce zabývá, je 2-válcová vodárna. Tento systém je v podstatě spojení dvou jednoválcových vodáren za sebou. Nejprve je popsána architektura systému a rovnice, kterými se řídí. Následuje určení nonlinearity nejprve dle Vinnicomba, a poté měr v otevřené a uzavřené smyčce. Nakonec jsou porovnány odezvy systému s hodnotami nonlinearit.

4.1 Popis systému

2-válcová vodárna je v této podobě systémem druhého řádu s jedním vstupem a jedním výstupem. Vstupem systému je přítok do prvního válce a výstupem je výška hladiny ve druhém válci. Rovnice nelineárního systému vodárny jsou



Obrázek 4.1: 2-válcová vodárna

$$\begin{aligned}\dot{h}_1(t) &= -\frac{S_2}{S_1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} + \frac{q(t)}{S_1}, \\ \dot{h}_2(t) &= \frac{S_2}{S_1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} - \frac{S_2}{S_1} \sqrt{2gh_2(t)},\end{aligned}\tag{4.1}$$

kde $h(t)$ [m] je výška hladiny, $q(t)$ [$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$] je objemový přítok, $S_1 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ je průřez nádrže, $S_2 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ je průřez výpusti, a $g = 9,82 \text{ m s}^{-2}$ je gravitační zrychlení.

Rozsah hladin, ve kterém bude vodárna hodnocena, bude v rozmezí $(0; 2)$ m, pracovní bod P_0 bude pro $h(t) = 0,2$ m. Připomeňme, že aby byl systém lineární, je třeba brát v úvahu i záporný přítok q a systém neomezený saturací.

Po substituci $u = q$, $x_i = h_i$ pro $i = \{1, 2\}$, a $y = h_2 = x_2$; vypočteme pracovní bod položením levé strany soustavy rovnic 4.1 rovno nule, což platí pro ustálený stav:

$$u_0 = \sqrt{2S_2^2 gx_{20}}, \quad x_{10} = 2x_{20}.\tag{4.2}$$

Nyní linearizujme systém v obecném pracovním bodě pomocí Taylorova rozvoje:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{S_2}{S_1} \sqrt{2g(x_{10} - x_{20})} + \frac{1}{S_1} u_0 - \\ &\quad - \frac{S_2 \sqrt{2g}}{2S_1 \sqrt{x_1(t) - x_2(t)}} \left|_{\substack{x_{10} \\ x_{20}}} \right. \Delta x_1(t) + \frac{S_2 \sqrt{2g}}{2S_1 \sqrt{x_1(t) - x_2(t)}} \left|_{\substack{x_{10} \\ x_{20}}} \right. \Delta x_2(t) + \frac{1}{S_1} \Delta u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{S_2}{S_1} \sqrt{2g(x_{10} - x_{20})} - \frac{S_2}{S_1} \sqrt{2gx_{20}} + \\ &\quad + \frac{S_2 \sqrt{2g}}{2S_1 \sqrt{x_1(t) - x_2(t)}} \left|_{\substack{x_{10} \\ x_{20}}} \right. \Delta x_1(t) - \left(\frac{S_2 \sqrt{2g}}{2S_1 \sqrt{x_1(t) - x_2(t)}} + \frac{S_2 \sqrt{2g}}{2S_1 \sqrt{x_2(t)}} \right) \left|_{\substack{x_{10} \\ x_{20}}} \right. \Delta x_2(t), \\ y(t) &= x_{20} + \Delta x_2(t),\end{aligned}\tag{4.3}$$

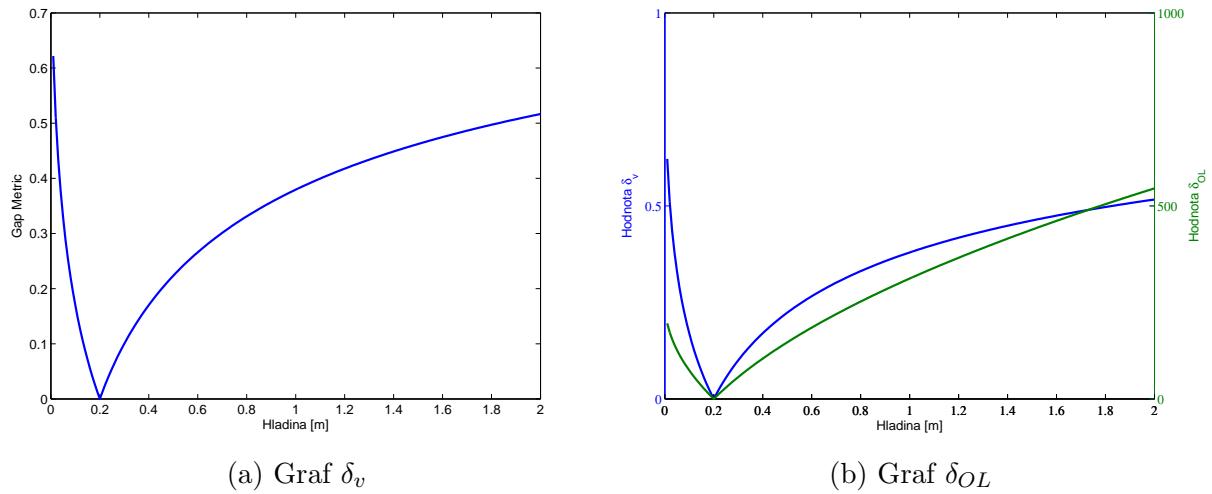
kde $\Delta x_i(t) = x_i(t) - x_{i0}$ a $\Delta u(t) = u(t) - u_0$.

Matice stavového popisu pro obecný pracovní bod, odvozené z rovnic 4.3, jsou následující:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\frac{S_2 \sqrt{2g}}{2S_1 \sqrt{x_{10}-x_{20}}} & \frac{S_2 \sqrt{2g}}{2S_1 \sqrt{x_{10}-x_{20}}} \\ \frac{S_2 \sqrt{2g}}{2S_1 \sqrt{x_{10}-x_{20}}} & -\left(\frac{S_2 \sqrt{2g}}{2S_1 \sqrt{x_{10}-x_{20}}} + \frac{S_2 \sqrt{2g}}{2S_1 \sqrt{x_{20}}} \right) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Dosadíme li do rovnice 4.2 naše požadavky, tedy $x_{20} = 0,2$ m, obdržíme další souřadnice pracovního bodu: $x_{10} = 0,4$ m a $u_0 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{s}^{-1}$. Přenosová funkce linearizovaná v bodě P_0 o právě nalezených souřadnicích je pak:

$$H_{P0} = \frac{4,404}{s^2 + 0,3964s + 0,0175}.\tag{4.5}$$

Obrázek 4.2: 2-válcová vodárna: δ_v a δ_{OL}

4.2 Výpočet δ_v

Vinnicombovu metriku lze spočítat stejně jako v případě jednoválcové vodárny funkcí `gapmetric`. Využitím popisu v obecném pracovním bodě 4.4 a volbou kroku o velikosti 1 cm obdržíme graf 4.2a.

Nejmenší hodnoty dosahuje 4.2a v pracovním bodě P_0 . Nejvyšší hodnota 0,622 je dosažena v bodě 0,01 metru. Nelinearita roste poměrně rychle na obě strany od pracovního bodu, avšak se stoupající hladinou nad přibližně 0,5 metru se růst nelinearity zpomaluje. Již zmíněná hranice podobnosti systémů dle (Qian et al., 2013), cca $\delta_v = 0,1$, je zachována pouze na rozmezí 0,13 m až 0,3 m. Na základě těchto informací lze usuzovat, že dvouválcová vodárna je systém s nezanedbatelnou nelinearitou.

4.3 Výpočet δ_{OL}

Dle vzorce 2.2 a popisu systému v obecném pracovním bodě (4.4) vypočteme δ_{OL} . Graf na obr. 4.2b ukazuje míru v otevřené smyčce stoupající na obě strany od pracovního bodu. Růst nelinearity je pro vypouštění i napouštění téměř konstantní, takže nejvyšší hodnota není dosažena při nejnižší počítané hladině, ale naopak při hladině nejvyšší. Numericky se δ_{OL} pohybuje v rozmezí přibližně $\langle 0; 546 \rangle$. Vizuálně je graf zhruba podobný grafu δ_v , avšak shoda není příliš dobrá.

4.4 Návrh regulátorů a výpočet δ_{CL}

Pro výpočet míry δ_{CL} je třeba navrhnout regulátor pro tento systém. Vodárna bude řízena dvěma různými regulátory - PI a PD. Po PI regulátoru budeme požadovat, aby systém nepřekmitl o více, nežli o 2 % velikosti skoku, tedy

$$\% OS = 2 \rightarrow \zeta^1 = 0,7797. \quad (4.6)$$

Návrh provedeme výpočtem charakteristického polynomu.

Jelikož je PI regulátor systém 1. rádu a vodárna 2. rádu, bude mít spojení těchto systémů v uzavřené smyčce 3. rád. Pojem poměrné tlumení však je platný pouze pro systémy 2. rádu. Přidáme tedy ještě požadavek, že dva póly budou komplexní a třetí pól bude v 5-krát větší vzdálenosti od imaginární osy, tedy získáme dva dominantní póly, téměř neovlivněné reálným. Systém se v tomto případě bude chovat podobně, jakoby měl jen druhý rád. Tento požadavek bude popsán parametrem $\alpha = 5$. Uvažujme systém H a regulátor K_{PI} ve tvaru:

$$H = \frac{K}{(s + p_1)(s + p_2)} = \frac{b(s)}{a(s)}; \quad K_{PI} = \frac{k_P s + k_I}{s} = \frac{q(s)}{p(s)}; \quad (4.7)$$

kde K je zesílení systému, p_i pro $i = \{1, 2\}$ jsou póly přenosu; k_P, k_I jsou konstanty proporcionalního a integrálního zesílení regulátoru; a $a(s), b(s), p(s), q(s)$ jsou polynomy.

Charakteristický polynom uzavřené smyčky $c(s) = a(s)p(s) + b(s)q(s)$ pak srovnáme s polynomem popisujícím systém třetího rádu:

$$\begin{aligned} c(s) &= (p_1 + s)(p_2 + s)s + K(k_P s + k_I), \\ c(s) &= (s + \alpha\omega_0)(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Porovnáním koeficientů polynomů a úpravou obdržíme hledané konstanty:

$$\omega_0 = \frac{p_1 + p_2}{\alpha + 2\zeta}, \quad k_P = \frac{(2\alpha\zeta + 1)\omega_0^2 - p_1 p_2}{K}, \quad k_I = \frac{\alpha\omega_0^3}{K}. \quad (4.9)$$

Při pohledu na odezvu systému s tímto regulátorem (není vykreslena) lze vidět překmit systému větší, než 2 %, upravíme tedy požadavek % OS na hodnotu 0,05, z čehož získáme $\zeta = 0,8602$. Nový výsledný regulátor s přeypočítanými konstantami

$$K_{PI} = \frac{0,0036 s + 0,0002}{s} \quad (4.10)$$

již odpovídá zadaným parametrům návrhu.

¹Připomeňme, že poměrné tlumení získáme z překmitu pomocí rovnice 3.7.

Nyní lze přikročit k návrhu druhého regulátoru. Požadavky na PD regulátor stanovíme takto:

$$\% OS = 0,01; T_s = 20 \text{ s} \rightarrow \zeta = 0,9465; \omega_0 = 0,2113 \text{ s}^{-1}. \quad (4.11)$$

Použijeme opět metodu výpočtu charakteristického polynomu. Uvažujme PD regulátor ve tvaru

$$K_{PD} = k_P + k_D s, \quad (4.12)$$

respektive

$$K_{PDf} = \frac{k_P + k_D s}{\frac{s}{\omega_f} + 1}, \quad (4.13)$$

kde k_P a k_D jsou koeficienty proporcionalní a derivační složky regulátoru, a ω_f je filtrační frekvence. Ačkoli je PD regulátor (4.12) sám o sobě nerealizovatelným systémem, lze jej v tomto tvaru použít pro návrh za předpokladu, že následně bude stanovena určitá filtrační frekvence (4.13) a ověřena správnost návrhu. Použitím tvaru 4.12 bude zjednodušen návrh, protože charakteristický polynom uzavřené smyčky systému H (4.7) s regulátorem K_{PD} je jen druhého řádu:

$$\begin{aligned} c(s) &= (p_1 + s)(p_2 + s) + K(k_P + k_D s), \\ c(s) &= s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Srovnáním a úpravou polynomů 4.14 získáme konstanty PD regulátoru

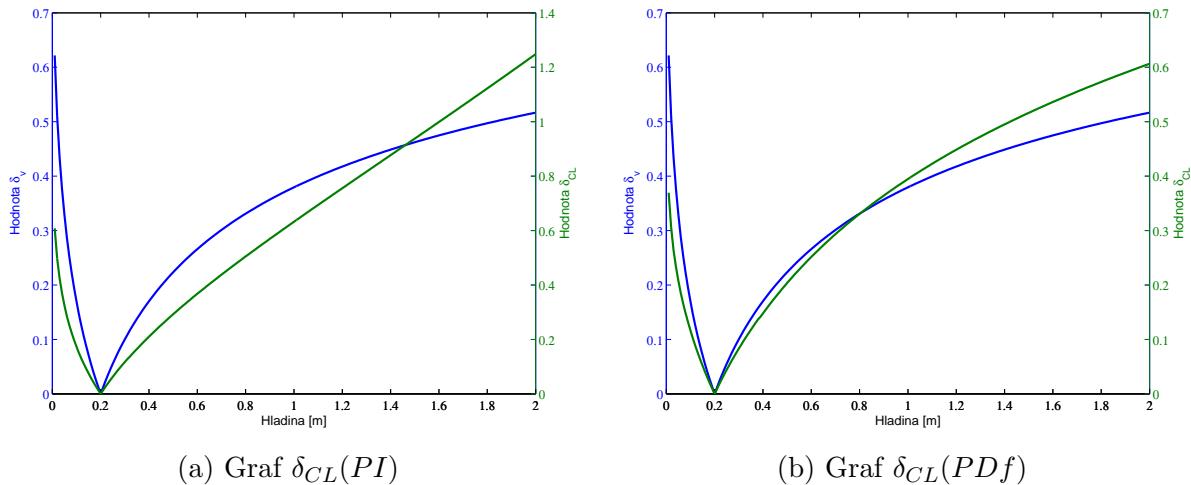
$$k_P = \frac{\omega_0^2 - p_1 p_2}{K} = 0,0062, \quad k_D = \frac{2\zeta\omega_0 - p_1 - p_2}{K} = 0,0008. \quad (4.15)$$

K regulátoru přidáme filtr na frekvenci ω_f , o které platí obecné doporučení, že by měla být $4\times$ až $10\times$ větší nežli zlomová frekvence PD regulátoru, zvolíme čtyřnásobnou:

$$\omega_f = 30,0812 \text{ s}^{-1}. \quad (4.16)$$

Získaný PDf regulátor je však ještě třeba ověřit v uzavřené smyčce. Neměli-li bychom pouze 2 dominantní póly, systém by *de facto* nebyl druhého řádu, což by popřelo validitu naší metody návrhu. Póly a nuly uzavřené smyčky však ukazují, že návrh byl správný:

$$\begin{aligned} p_1 &= -30,0785, \\ p_{2,3} &= -0,1996 \pm j 0,0695, \\ z &= -7,5203. \end{aligned} \quad (4.17)$$



Obrázek 4.3: 2-válcová vodárna: δ_{CL}

Výsledným regulátorem, který má i přes pokusy s úpravou požadavků regulace o několik vteřin delší dobu ustálení, nežli odpovídá témtoto požadavkům, je

$$K_{PDf} = \frac{0,0008s + 0,0062}{0,0332s + 1}. \quad (4.18)$$

Po zapojení každého z regulátorů do systému a vypočtení míry v uzavřené smyčce dle vzorce 2.4 získáme grafy 4.3. U systému s PI regulátorem je na první pohled patrný rozdíl tvarový i numerický. Metrika na obrázku 4.3a má téměř lineární průběh, zatímco graf δ_v je konkávní (pro hladiny vyšší P_0). U systému s PD regulátorem je graf podobný grafu δ_v , a to i číselně. Graf systému s PI regulátorem se číselně pohybuje až do hodnoty přibližně 1,2, což je asi dvojnásobek nejvyšší hodnoty δ_v . Graf s PD regulátorem má oproti tomu nejvyšší hodnotu srovnatelnou s δ_v (cca 0,6).

4.5 Měření odezv

Nyní lze vypočítané metriky ověřit a zjistit, jestli se shodují s odezvami nelineárního systému. Měření bylo provedeno na různých hladinách vodárny a jako základ pro stanovení těchto hladin byla použita Vinnicombova metrika δ_v . Při pohledu na obr. 4.3 je vidět, že vybráním bodů dle pouze jedné metriky není zanadbána žádná „lokální porucha“ δ_{CL} . Jako u 1-válcové vodárny, i v tomto případě byla provedena měření odezvy na změnu reference s počátečními podmínkami v pracovním bodě, respektive na změnu počátečních podmínek s referencí v pracovním bodě.

Obrázek 4.4 zobrazuje výsledky měření změny reference. Hodnoty metriky, pro které byly odezvy generovány, jsou v tabulce 4.1. Pro snadné porovnání byla u grafů i přes rozdílné odezvy zachována stejná časová měřítka.

Grafy 4.4a a 4.4c zobrazují odezvu systému na změnu reference z pracovního bodu $P_0 = 0,2\text{ m}$ do výšky $x_{ref} = \{0, 30; 0, 45; 0, 70; 1, 10\}$ metru pro systém s PI, respektive PD regulátorem. Na grafech 4.4b a 4.4d pak je zobrazena změna reference na 0,09 a 0,45 metru. Tyto dvě hladiny odpovídají hodnotám $\delta_v \approx 0,2$.

Pohlédneme-li na graf 4.4a, zjistíme, že překmit OS a také doba ustálení T_s se zvyšují se vzdáleností reference od pracovního bodu. Zatímco překmit roste téměř lineárně, doba ustálení déle stagnuje a posléze rychle naroste².

Další graf, zobrazující chování PI regulátoru je 4.4b. Zde je patrné, že ačkoli jsou hodnoty metriky (δ_v i $\delta_{CL}(PI)$) pro oba případy velmi podobné, chovají se odlišně. Jednak PI regulátor při vypouštění nepřekmitne cílovou referenci, a za druhé je markantní rozdíl v době ustálení 85,7 s pro vypouštění a 100,6 s pro napouštění.

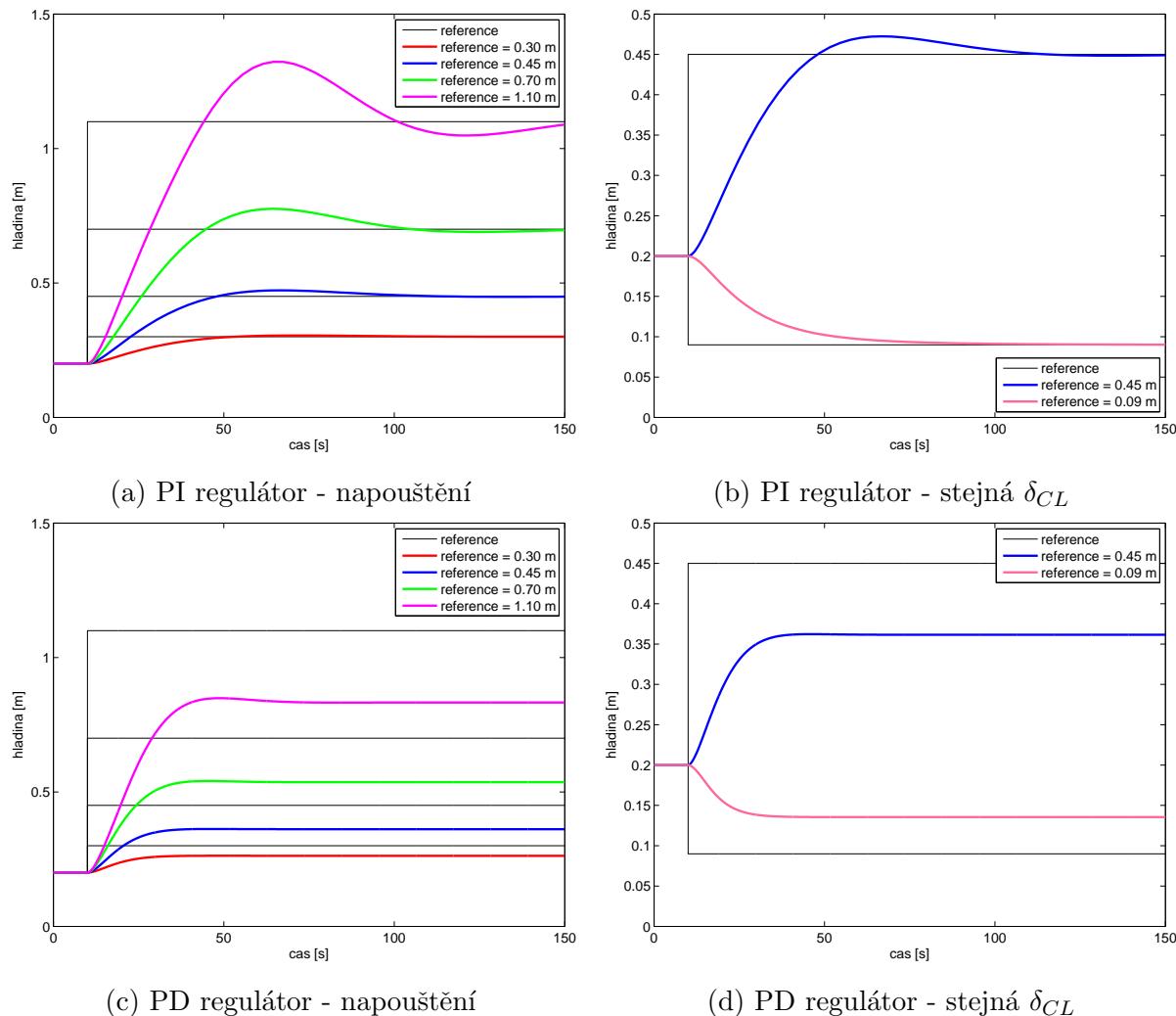
Zhodnotíme-li pohledově graf PD regulátoru 4.4c, řekneme, že PD regulátor nikdy nedosáhne ustáleného stavu (což bylo předpokládáno). Překmit cílové hodnoty má smysl řešit pro překmit vyšší nežli 2%, jelikož to je také naše hranice ustáleného stavu. Tuto hranici systém s PD regulátorem nepřesáhne až do hladiny 0,88 m. Doba odeznění přechodového jevu je viditelně kratší oproti PI. Chyba ustálené hodnoty roste se vzdáleností od pracovního bodu a křivka růstu má téměř lineární tvar.

Poslední graf odezvy na změnu reference (4.4d) zobrazuje chování PD regulátoru při změně na podobné hodnoty δ_v . Pohledem do tabulky vidíme, že v tomto případě jsou podobné i hodnoty $\delta_{CL}(PD)$. Ustálená odchylka má pro hladinu 0,09 metru opačné znaménko, což však odpovídá, protože se jedná o vypouštění. Doba ustálení je zřejmě kratší v případě vypouštění.

Nyní přistupme k popisu grafů odezev na počáteční podmínky, které jsou zobrazeny na obr. 4.5. Grafy jsou rozřazeny stejným způsobem jako grafy pro změnu reference, tedy PI regulátor ve vrchní řadě - (4.5a, 4.5b) a PD regulátor v řadě spodní - (4.5c, 4.5d). Data příslušící k odezvám na změnu počátečních podmínek jsou pak v 4.2. Systémy H_{09} a H_{45} jsou obsaženy v obou tabulkách, jak této, tak 4.1, jelikož byly podrobeny oběma pokusům.

Graf 4.5a ukazuje, že systém řízený PI regulátorem má větší překmit se zvětšující se vzdáleností od pracovního bodu, avšak doba ustálení je velmi podobná. Za povšimnutí

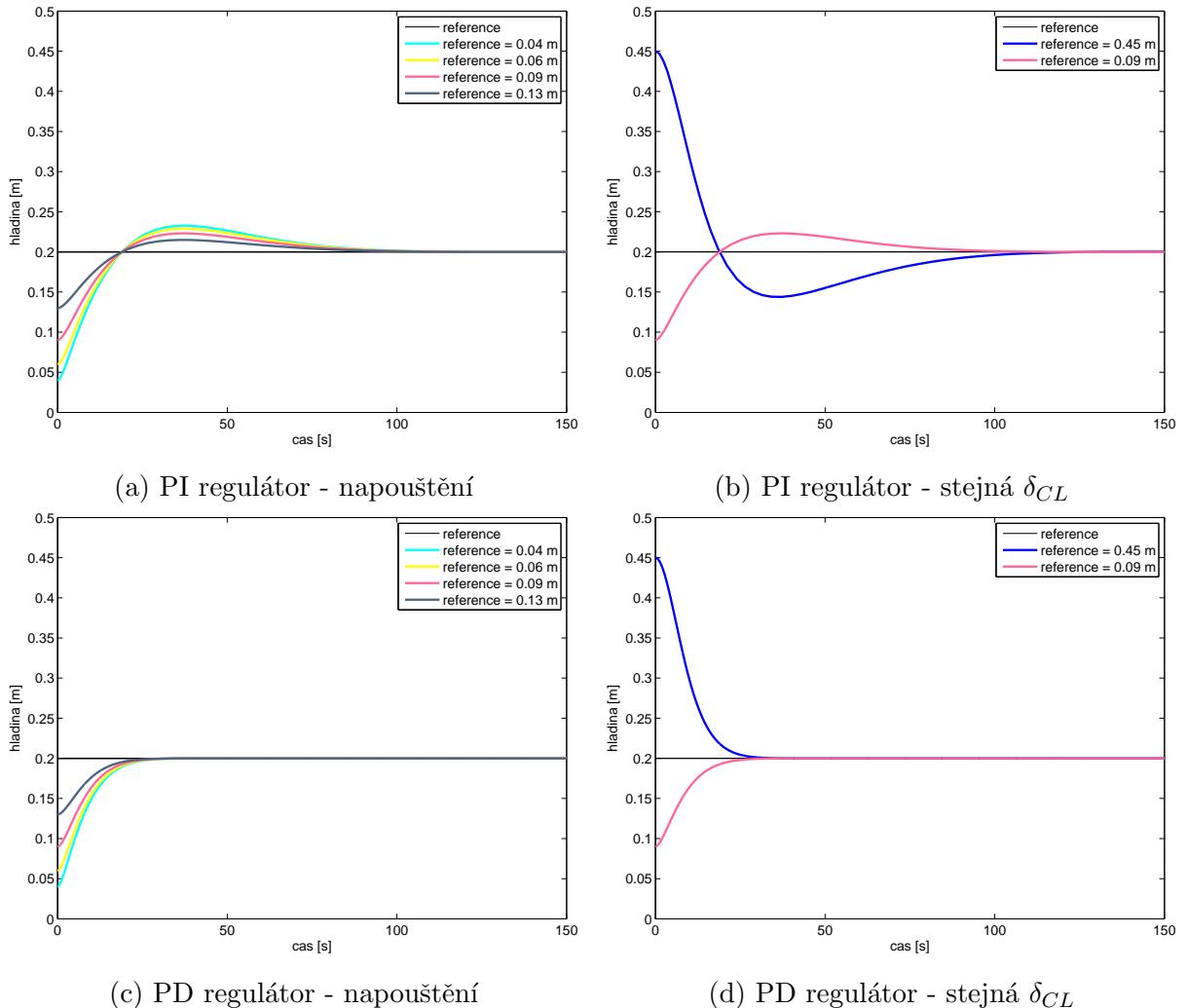
²Tyto skutečnosti jsou ještě lépe než v tabulce vidět v datech, která jsou přiložena na CD



Obrázek 4.4: 2-válcová vodárna: změna reference

x_{ref} [m]	PI				PD			
	δ_v	δ_{CL}	% OS	T_s [s]	δ_{CL}	% OS	T_s [s]	e_{ss}
0,09	0,1947	0,1977	0	85,7	0,1315	0	33,7	-0,0455
0,30	0,1001	0,1171	1,58	98,9	0,0830	0,11	34,6	0,0374
0,45	0,1984	0,2524	4,98	100,6	0,1768	0,45	34,8	0,0885
0,70	0,3012	0,4379	10,82	127,7	0,2934	1,29	35,2	0,1637
1,10	0,3996	0,6943	20,22	145,9	0,4227	2,52	54,7	0,2672

Tabulka 4.1: 2-válcová vodárna: změna reference



Obrázek 4.5: 2-válcová vodárna: změna počáteční podmínky

x_{PP} [m]	δ_v	PI			PD		
		δ_{CL}	% OS	T_s [s]	δ_{CL}	% OS	T_s [s]
0,04	0,3764	0,3698	16,34	90,4	0,2330	0	24,7
0,06	0,2884	0,2868	14,48	90,7	0,1853	0	24,7
0,09	0,1947	0,1977	11,56	91,1	0,1315	0	24,6
0,13	0,1061	0,1108	7,46	91,7	0,0758	0	24,6
0,45	0,1984	0,2524	22,44	96,5	0,1768	0	24,5

Tabulka 4.2: 2-válcová vodárna: změna počáteční podmínky

stojí, že doba náběhu pro systémy je stejná.

Srovnáme-li odezvy na změnu počátečních podmínek se stejnou hodnotou δ_v (4.5b), zjistíme, že překmit u vypouštění je více než dvojnásobný oproti napouštění. Také u doby ustálení H_{45} je již patrný nárůst oproti té pro napouštění (viz tabulka 4.2).

Při pohledu na další graf, 4.5c, lze srovnat, že PD regulátor poskytuje podstatně kratší dobu ustálení než PI regulátor; v tabulce lze nahlédnout, že je to asi $1/3$ doby. I v tomto případě je doba náběhu totožná, avšak novinkou je schopnost PD regulátoru regulovat s nulovou ustálenou odchylkou.

V posledním grafu (4.5d) je vidět, že pro vypouštění má PD stejnou dobu ustálení jako odezva pro napouštění. Překmit je v obou případech nulový.

4.6 Výsledky experimentu

Pro systém 2-válcové vodárny byly spočítány metriky δ_v , δ_{OL} , a δ_{CL} , přičemž byly navrženy 2 regulátory. Na základě hodnot δ_v byly navrženy vzdálenosti od pracovního bodu P_0 , které má smysl použít pro vyhodnocení odezv. Pro tyto vzdálenosti byly vygenerovány odezvy na změnu reference a na změnu počátečních podmínek.

Výsledky ukázaly téměř stejně doby ustálení pro změnu počátečních podmínek u každého z regulátorů. Pro změnu reference se doba ustálení PI regulátoru po počátečním nárůstu drží relativně dlouho v oblasti kolem 100 s, ale poté následuje skok a rychlý nárůst v oblasti hladin asi 0,74 m. Pro PD regulátor je situace podobná, ačkoliv je samozřejmě ustálený stav jiný, než byla požadovaná reference.

Co se překmitu týče, při změně reference u PI regulátoru vykazují hodnoty překmitu lineární nárůst podobně, jako je tomu u $\delta_{CL}(PI)$. U PD regulátoru nemají hodnoty lineární průběh ale tvoří křivku s maximem okolo hladiny 1,2 m. V případě odezvy na počáteční podmínsku má nárůst maximálního překmitu s PI regulátorem lineární charakter, což odpovídá míře v uzavřené smyčce pro PI regulátor. Po PD regulátor jsou hodnoty překmitu blíže než hranice ustáleného stavu. Ustálená odchylka odezvy s PD regulátorem pak také se vzdáleností od P_0 roste téměř lineárně.

PI regulátor je pro změnu reference schopen udržet dvouprocentní překmit pro rozmezí referencí asi $\langle 0; 0,32 \rangle$, zatímco pro změnu počáteční podmínky je rozmezí zhruba $\langle 0,18; 0,21 \rangle$. Doba ustálení je pak velmi špatná v podstatě všude mimo pracovní bod a neodpovídá návrhu.

PD regulátor pak dobu ustálení 20 s udrží na rozmezí $\langle 0, 19; 0, 20 \rangle$ pro odezvu na počáteční podmínku, respektive v bodě 0,20 pro změnu reference. Překmit s PD regulátorem při odezvě na počáteční podmínku spadá pod 2 %-ní hranici v celém rozmezí, pro změnu reference platí rozmezí $\langle 0, 01; 0, 88 \rangle$.

Ovšem, 2-válcová vodárna je stabilní systém a naše regulátory lze použít v celém rozsahu, avšak s horším výkonem, než jaký bychom požadovali.

Závěrem lze tedy říci, že máme-li hodnotit výkon regulátoru na systému, existují poměrně značné rozdíly mezi tím, jestli tento výkon hodnotíme pro změnu reference a nebo počátečních podmínek. Některé parametry odezvy systému s regulátory následují alespoň tvar příslušné δ_{CL} , ale jiné se zdají tyto trendy nenásledovat. Dále se mění různé parametry s ohledem na příslušný regulátor, tedy nelze na základě těchto dat a δ_{CL} určit chování regulátoru. Dále je nutno poznamenat, že závisí na striktnosti hodnocení systému s regulátorem. Kupříkladu PD regulátor drží dobu ustálení velmi blízko 20 s, je tedy otázkou, jestli má smysl ho přesto vyřadit jako nevyhovující.

Nakonec ještě podotkněme, že na tomto systému bylo jasné patrné, že spojením dvou systémů se jejich nelinearita „nesčítá“, ale může vytvořit systém podstatně více nelineární.

Kapitola 5

Inverzní kyvadlo

Předmětem této kapitoly je klasický modelový systém pro řízení - inverzní kyvadlo. Systém je nejprve popsán a stručně uveden. Dále je stanovena jeho nelinearita již dříve použitými metrikami δ_v , δ_{OL} , a δ_{CL} . Následuje generování odezv a nakonec jejich porovnání s vypočtenými mírami.

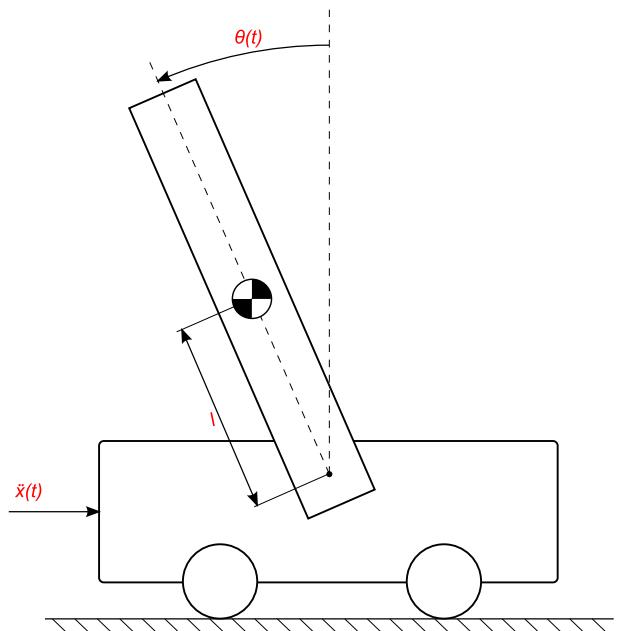
5.1 Popis systému

Inverzní kyvadlo je systém druhého rádu, kde vstupem je akcelerace vozíku a výstupem je úhel natočení kyvadla. Nelineární diferenciální rovnice popisující systém je

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{3g}{4l} \sin \theta(t) + \frac{3}{4l} \cos(\theta(t)) u(t) \quad (5.1)$$

kde $\theta(t)$ [rad] je úhel natočení kyvadla, $u(t)$ [m s^{-2}] je zrychlení vozíku, $l = 0,25\text{ m}$ je polovina délky kyvadla, $m = 0,3\text{ kg}$ je hmotnost kyvadla, a $g = 9,82\text{ m s}^{-2}$ je gravitační zrychlení (Qian et al., 2013).

Kyvadlo bude stabilizováno v horní poloze, tedy pro $\theta = 0$, přičemž rozsah úhlů, které budou uvažovány, bude $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Opět mějme na paměti, že saturace není postižena v používaných metrikách, tedy



Obrázek 5.1: Inverzní kyvadlo

nebude brána v potaz.

Položením levé strany rovnice 5.1 rovné nule, což platí pro ustálený stav, lze vypočítat obecný pracovní bod:

$$u_0 = -g \operatorname{tg} \theta_0. \quad (5.2)$$

Nyní linearizujeme systém v obecném pracovním bodě rozvinutím 5.1 v Taylorovu řadu (pouze první člen):

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(t) &= \left(\frac{3g}{4l} \cos \theta(t) - \frac{3}{4l} u(t) \sin \theta(t) \right) \Big|_{\substack{\theta_0 \\ u_0}} \Delta \theta(t) + \frac{3}{4l} \cos \theta(t) \Big|_{\theta_0} \Delta u(t) \\ &= \left(\frac{3g}{4l} \cos \theta_0 - \frac{3}{4l} u_0 \sin \theta_0 \right) \Delta \theta(t) + \frac{3}{4l} \cos \theta_0 \Delta u(t). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Na rovnici 5.3 pak aplikujeme Laplaceovu transformaci a vyjádříme přenos:

$$\begin{aligned} s^2 \Theta(s) &= \left(\frac{3g}{4l} \cos \theta_0 - \frac{3}{4l} u_0 \sin \theta_0 \right) \Theta(s) + \frac{3}{4l} \cos \theta_0 U(s), \\ \frac{\Theta(s)}{U(s)} &= \frac{3 \cos \theta_0}{4ls^2 + 3u_0 \sin \theta_0 - g \cos \theta_0}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

do kterého ještě dosadíme pracovní bod 5.2. Přenosová funkce linearizovaná v obecném pracovním bodě je pak:

$$H(s) = \frac{3 \cos \theta_0}{4ls^2 - 3g [\operatorname{tg}(\theta_0) \sin(\theta_0) + \cos \theta_0]}. \quad (5.5)$$

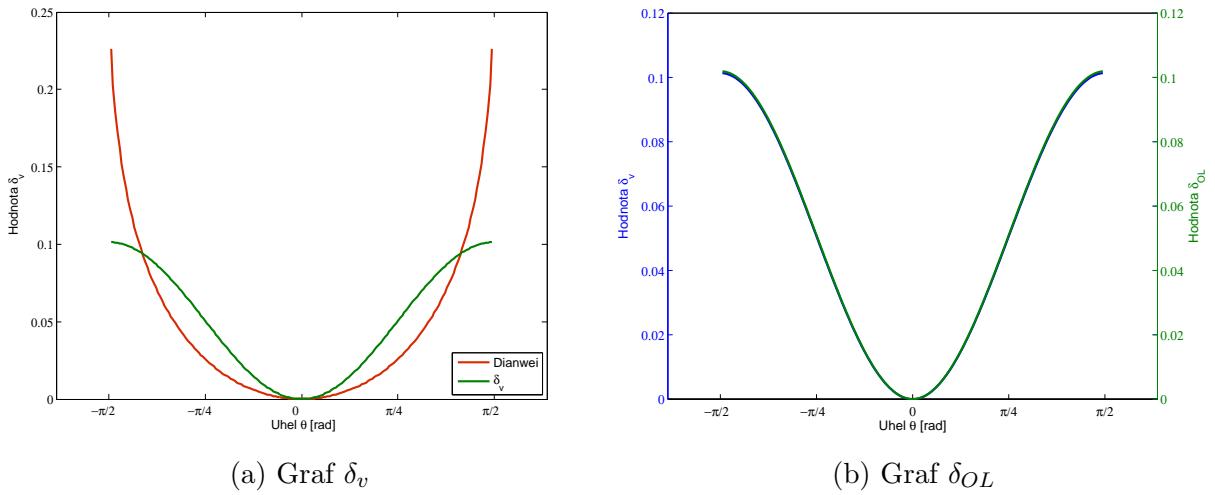
Dosadíme-li do rovnice 5.5 horní pracovní bod, tedy $\theta = 0$ rad, pak je přenosová funkce v bodě P_0 následující:

$$H_{P0}(s) = \frac{3}{s^2 - 29,43}. \quad (5.6)$$

5.2 Výpočet δ_v

Pomocí připraveného přenosu (5.5) nyní spočítáme Vinnicombovu míru pro inverzní kyvadlo ve všech celých úhlech natočení. Tedy budeme volit pracovní body s krokem 1° . δ_v nabývá hodnot v intervalu přibližně $\langle 0; 0,1 \rangle$ ¹. Na obr. 5.2a lze vidět, že graf dosahuje nejmenší hodnoty v bodě $\theta = 0$ radiánu, tedy v P_0 . Nejvyšší hodnoty jsou na hranicích intervalu $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Ve vodorovné poloze je systém neregulovatelný. Průběh, který je vyznačen červeně, uvádí Qian jako Vinnicombovu míru nelinearity pro inverzní kyvadlo (viz

¹Pro všechny úhly natočení $\theta > |\frac{\pi}{2}|$ má δ_v hodnotu 1.

Obrázek 5.2: Inverzní kyvadlo: δ_v a δ_{OL}

(Qian et al., 2013)). Pro $\theta \in (-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3})$ pak Qian tvrdí, že hodnota δ_v pro tyto systémy je tak nízká, že jsou jsou prakticky stejné a jejich nelinearity je zanedbatelná.

Zde uvedeným přesnějším výpočtem však zjistíme, že Vinnicombova míra dosahuje hodnotu $\delta_v \leq 0,1$ na celém intervalu $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

5.3 Výpočet δ_{OL}

Výpočet δ_{OL} provedeme dle vzorce 2.2. Jak je z obr. 5.2 patrné, graf δ_{OL} je podobný grafu δ_v . Za povšimnutí stojí nejen to, že grafy tvoří prakticky identické křivky, ale i stejné hodnoty, kterých nabývají.

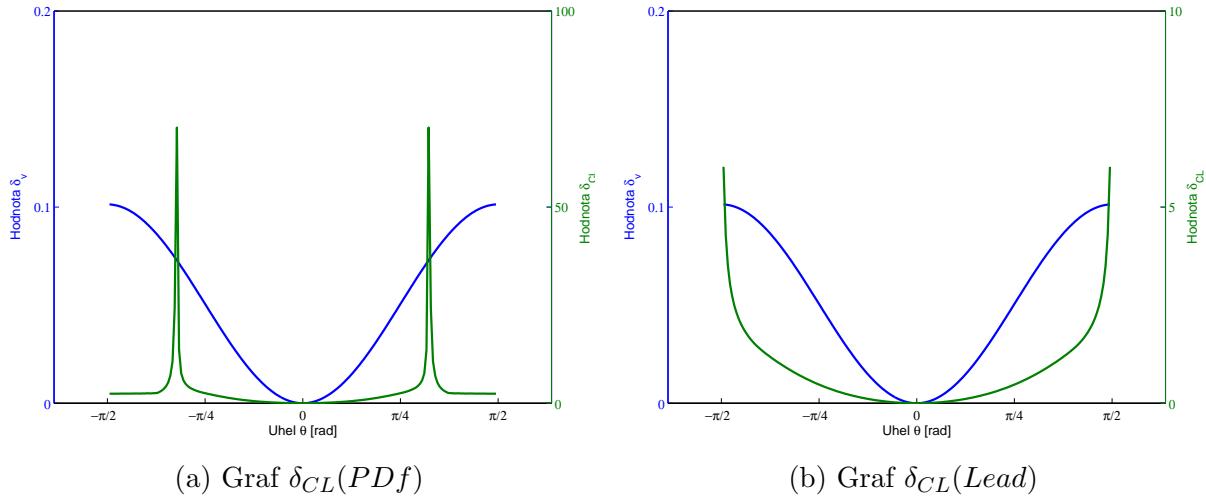
5.4 Návrh regulátorů a výpočet δ_{CL}

Pro inverzní kyvadlo navrhнемe dva regulátory. Prvním bude PD regulátor, po kterém budeme požadovat následující:

$$T_s = 1 \text{ s}; \% OS = 20 \quad \rightarrow \quad \zeta = 0,4559; \omega_0 = 8,7729 \text{ s}^{-1}. \quad (5.7)$$

Návrh provedeme metodou výpočtu charakteristického polynomu. Uvažujme PD regulátor ve tvaru

$$K_{PD} = k_P + k_D s = \frac{q(s)}{p(s)}, \quad (5.8)$$



Obrázek 5.3: Inverzní kyvadlo: $\delta_{CL}(PD)$ a $\delta_{CL}(Lead)$

respektive

$$K_{PDf} = \frac{k_P + k_D s}{\frac{s}{\omega_f} + 1}, \quad (5.9)$$

kde k_P a k_D jsou koeficienty proporcionální a derivační složky regulátoru, $p(s), q(s)$ jsou polynomy, a ω_f je filtrační frekvence. Stejně jako v případě 2-válcové vodárny, i zde je nutné ověřit správnost návrhu PD regulátoru ověřením poloh nul a pólů uzavřené smyčky. Dále uvažujme systém ve tvaru

$$H = \frac{K}{s^2 - p^2} = \frac{b(s)}{a(s)}, \quad (5.10)$$

kde p jsou póly systému, $a(s), b(s)$ jsou polynomy, a K je zesílení systému. Vyjádříme charakteristický polynom ve tvaru $c(s) = a(s)p(s) + b(s)q(s)$ a charakteristický polynom systému 2. řádu:

$$\begin{aligned} c(s) &= (s^2 - p^2)1 + K(k_P + k_D s), \\ c(s) &= s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Srovnáním a úpravou polynomů 5.13 získáme konstanty PD regulátoru

$$k_P = \frac{\omega_0^2 + p^2}{K} = 35,4646, \quad k_D = \frac{2\zeta\omega_0}{K} = 2,6667. \quad (5.12)$$

K regulátoru přidáme filtr na frekvenci ω_f , 4× větší nežli zlomová frekvence PD regulátoru:

$$\omega_f = 53,1968 \text{ s}^{-1}. \quad (5.13)$$

Dosazením 5.13 do 5.9 získáme PDf regulátor.

$$K_{PDf} = \frac{2,6667s + 35,4646}{\frac{s}{53,1968} + 1} \quad (5.14)$$

Ten je však ještě třeba ověřit v uzavřené smyčce. Póly (p) a nuly (z) přenosu uzavžemé smyčky jsou:

$$\begin{aligned} p_1 &= -46,5792, \\ p_{2,3} &= -3,3088 \pm j8,7721, \\ z &= -13,2992. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Tedy pól p_1 je ve vzdálenosti 3,5 násobku vzdálenosti nuly od imaginární osy. Tuto vzdálenost budeme považovat za dostatečnou, tedy návrh za správný. I přes experimenty s úpravou požadavků regulace má regulovaný systém mírně delší dobu ustálení, než byla požadována.

Nyní přistoupíme k návrhu Lead regulátoru. Požadavky na regulaci stanovíme takto:

$$T_s = 1 \text{ s}; \% OS = 5 \rightarrow \zeta = 0,6901; \omega_0 = 5,7962 \text{ s}^{-1}. \quad (5.16)$$

Pro návrh použijeme metodu Geometrického místa kořenů. Vyjdeme z experimentálně stanoveného poměru pólu (p) a nuly (z) takového, že $p = 7z$. Nulu umístíme do polohy -5 v komplexní rovině:

$$K_{Lead} = \frac{s+z}{s+p} = \frac{s+5}{s+35}. \quad (5.17)$$

Přenosovou funkci v tomto tvaru dosadíme do Evansovy rovnice

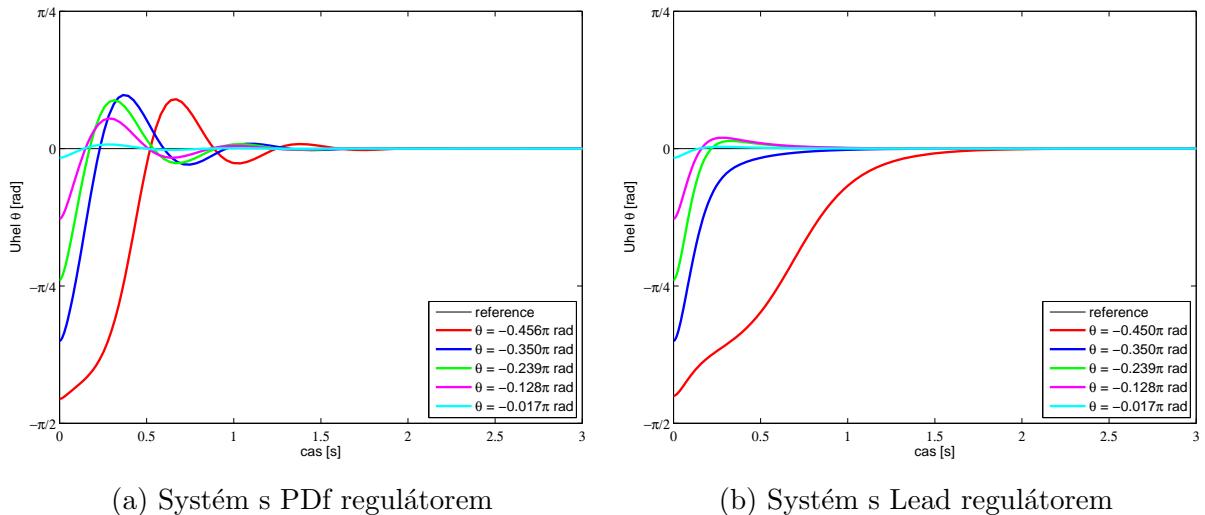
$$1 + KL(s) = 0, \quad (5.18)$$

kde $L(s) = K_{Lead}H_{P0}$ a K je zesílení. Po vypočtení Geometrického místa kořenů nastavíme zesílení K tak, aby vyhovovalo podmínkám návrhu. Výsledné $K = 147,3$ pak zapojíme do regulátoru (vynásobíme jím 5.17) pro obdržení jeho konečného tvaru:

$$K_{Lead} = \frac{147,3s + 736,5}{s + 35}. \quad (5.19)$$

Po zapojení regulátorů do systému získáme obr. 5.3. Z těchto grafů lze vidět, že δ_{CL} vykazuje jisté rozdíly mezi systémy regulovanými PDf a Lead regulátorem.

Graf δ_{CL} systému s PDf regulátorem (obr. 5.3a) nabývá hodnot přibližně v intervalu $\langle 0; 2,5 \rangle$, tedy asi dvacetkrát více, nežli δ_v . Výjimkou jsou body ve vzdálenosti cca 50° –



Obrázek 5.4: Inverzní kyvadlo: změna počátečních podmínek

θ [rad]	δ_v	PDf			Lead		
		δ_{CL}	% OS	T_s [s]	δ_{CL}	% OS	T_s [s]
$-0,456\pi$	0,0994	2,4455	19,7	1,18	-	-	-
$-0,450\pi$	0,0989	-	-	-	2,0259	0	1,49
$-0,350\pi$	0,0805	4,3056	27,8	1,17	1,0085	0	0,72
$-0,239\pi$	0,0471	2,3041	36,9	1,15	0,4301	5,8	0,63
$-0,128\pi$	0,0154	0,5645	43,0	1,14	0,1152	15,5	0,83
$-0,017\pi$	0,0002	0,0087	45,5	1,13	0,0019	19,4	0,88

Tabulka 5.1: Inverzní kyvadlo: změna počátečních podmínek

-60° od pracovního bodu P_0 . Tam charakteristika dosahuje hodnot až 65. V těchto bodech bychom mohli očekávat skokové zhoršení a následné zlepšení regulace.

Graf metriky systému s Lead regulátorem (obr. 5.3b) dosahuje hodnot asi $\langle 0; 6 \rangle$. Kvalita regulace Lead regulátoru by se měla do určité vzdálenosti zhoršovat pozvolna, a při jejím překročení vykázat prudší zhoršení. Vyšší absolutní hodnoty δ_{CL} pro PDf regulátor blízko P_0 však mohou naznačit, že nebude v této oblasti dosahovat kvality Lead regulace.

5.5 Měření odezev

Ověření vypočítaných metrik je třeba provést na odezvách nelineárního systému. Byly uvažovány odezvy na změnu počátečních podmínek za ponechání reference v pracovním bodě.

Odezvy jsou zobrazeny na obr. 5.4. Body počátečních podmínek byly voleny zhruba ekvidistantně tak, aby pokryly celé spektrum výchozích bodů, ze kterých daný regulátor umí systém stabilizovat. Pro oba regulátory byly voleny stejné body kvůli snazšímu porovnání. Rozdíl je pouze v jednom bodě (červený průběh), který vyznačuje poslední bod, který je regulovatelný daným regulátorem. Pro PDf je to 81° a pro Lead regulátor 80° .

Při pohledovém porovnání grafů 5.4a a 5.4b je zřejmé, že Lead regulátor je plynulejší a rychleji konverguje k cílové hodnotě bez větších překmitů než je tomu u PDf regulátoru. Ten reaguje velmi rychle, což vyplývá z kmitavé přibližování k referenční hodnotě. Překmity obou regulátorů se zvyšují pro výchozí pozice směrem k pracovnímu bodu.

V tabulce 5.1, která obsahuje data z průběhů, lze také nahlédnout, že nejkratší doba ustálení Lead regulátoru je pro startovní pozici cca $\frac{\pi}{4}$, od které se zvyšuje na obě strany, zatímco u PD regulátoru je doba ustálení téměř neměnná.

Výrazné hodnoty na charakteristice PDf regulátoru byly prozkoumány, ale nebyla zaznamenána žádná skoková změna kvality regulace.

5.6 Výsledky experimentu

Inverzní kyvadlo, pro které byly navrženy dva regulátory, bylo podrobeno pokusům se změnou počátečních podmínek, které měly za úkol ověřit vypovídající hodnotu vypočítaných metrik δ_{OL} a δ_{CL} .

Systém řízený PDf regulátorem se po počátečním zakmitáním ustálí v pracovnímu bodě s téměř stejnou dobou ustálení T_s pro všechny úhly natočení (ve kterých je schopen regulovat). Pro úhly nad $0,456\pi$ pak regulátor již není schopen udržet systém a kyvadlo prokývne spodem. Toto neodpovídá grafu 5.3a, dle kterého by se dala předpokládat horší schopnost regulace pouze v oblasti špiček grafu. Pokud bereme jako indikátory kvality regulace překmit a dobu ustálení, všimněme si, že jsou tyto charakteristiky spíše horší blíže pracovnímu bodu. To je naprostý opak toho, co bylo očekáváno. Tento jev lze přisoudit prudké reakci PDf.

Kyvadlo s Lead regulátorem vykazuje v grafu 5.4b lepší výsledky než PDf regulátor

ve všech bodech kromě posledního stabilizovatelného (červený průběh). Jsou to kratší doby ustálení i menší překmity. U překmitů se i zde setkáváme s většími hodnotami blíže pracovnímu bodu. Pro dobu ustálení však vidíme, že tato je nejlepší pro výchozí vzdálenost cca $\frac{\pi}{4}$. Tyto charakteristiky také nejsou zcela v souhlasu s metrikou 5.3b.

Kapitola 6

Závěr

Existuje několik metod měření nonlinearity, avšak tyto lze obecně rozdělit na dvě skupiny. Jedna skupina cílí na popis vzdálenosti nelineárního systému od nejbližšího lineárního systému v nějakém prostoru. Druhá skupina porovnává průběh řešení nelineární diferenciální rovnice pomocí diferenciálních metod, například derivací. Do první skupiny patřící Vinnicombova metrika je schopná poskytnout informace o stabilizovatelnosti systému pro všechny regulátory. Oproti tomu metoda měření rozdílu v uzavřené smyčce poskytuje informace o systému s konkrétním regulátorem.

Měření u uzavřené smyčce δ_{CL} nabízí několik výhod i nevýhod:

1. Metrika je jednoduchá na pochopení toho, co vlastně porovnává.
2. Informace o výkonu regulátoru lze interpretovat jen obecně. Přímá vazba na parametry odezvy, jako jsou doba ustálení nebo překmit, je složitá na interpretaci a nelze dobře říci, který parametr se s měnící metrikou bude měnit.
3. Odezvy na počáteční podmínu a na změnu reference poskytují odlišné odezvy a kromě toho, že se některé hodí více pro odlišné aplikace lze říci, že odezva na počáteční podmínu je blíže metrice δ_{CL} , než odezva na změnu reference.
4. Absence škály a v podstatě i škálovatelnosti činí samotnou δ_{CL} numericky nevyužitelnou a tím i neschopnou posoudit nelinearitu systému jako takového, kromě případu porovnávání dvou regulátorů, kde vyšší hodnota odpovídá horsímu regulátoru.

Pro systémy zkoumané v této práci lze stanovit na základě metrik a odezv pracovní oblasti.

V případě 1-válcové vodárny je pracovní oblast kdekoli. Systém je tak jednoduchý a tak blízký lineárnímu, že lze nelinearitu jednoduše zanedbat. Při měření samotnou metrikou δ_{CL} není zřejmé, jak lineární nebo nelineární systém je, je tedy třeba použít δ_v , abychom zjistili, jak veliká nelinearita je.

Pro 2-válcovou vodárnu indikuje δ_v ¹ pracovní oblast mezi cca 0,1 a 0,3 metry. V našem případě toto lze potvrdit víceméně jen pro PD regulátor, který v této oblasti pracuje v téměř navržených parametrech. Toto však již nelze tvrdit u PI regulátoru, který má špatné chování. Metriky δ_{CL} pak indikují, že PI regulátor je horší nežli PD, s čímž lze souhlasit.

Inverzní kyvadlo lze provozovat dle hodnoty δ_v v celé horní polorovině (tedy od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$). Ve vzdálenosti cca $0,45\pi$ však oba regulátory přestávají být schopny regulovat a kyvadlo padá. V celém rozsahu kromě hranic intervalu má lepší výsledky Lead regulátor oproti PD regulátoru. Tomu sice odpovídá nižší absolutní hodnota metriky δ_{CL} , avšak ta již neodpovídá zhoršování parametrů pro vzdálenosti menší než $\frac{\pi}{4}$ od ekvilibria.

Další možnou prací v této oblasti by mohlo být dokázání vazby jednotlivých metrik na konkrétní parametry odezvy systému.

¹Respektive interpretace od Qian.

Literatura

- Bates, Douglas M and Watts, D. G. (1980), ‘Relative curvature measures of nonlinearity’, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* pp. 1–25.
- Beale, E. (1960), ‘Confidence regions in non-linear estimation’, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* pp. 41–88.
- Li, X. R. (2012), Measure of nonlinearity for stochastic systems, in ‘Information Fusion (FUSION), 2012 15th International Conference on’, IEEE, pp. 1073–1080.
- Qian, D., Yi, J. a Tong, S. (2013), ‘Understanding neighborhood of linearization in undergraduate control education [focus on education]’, *Control Systems, IEEE* **33**(4), 54–60.
- ROUBAL, J., HUŠEK, P. a SPOL. (2011), *Regulační technika v příkladech*, BEN - technická literatura. ISBN 978-80-7300-260-2.
- Vinnicombe, G. (1993), ‘Frequency domain uncertainty and the graph topology’, *Automatic Control, IEEE Transactions on* **38**(9), 1371–1383.

Příloha A

Obsah přiloženého CD

Tato práce ve formátu PDF.

- 1-válcová vodárna:

- lineární model,
- nelineární model,
- míra δ_v ,
- míra δ_{OL} ,
- míra δ_{CL} ,
- PI regulátor,
- odezva na změnu reference,
- odezva na změnu počáteční podmínky.

- 2-válcová vodárna:

- lineární model,
- nelineární model,
- míra δ_v ,
- míra δ_{OL} ,
- míra δ_{CL} ,
- PI regulátor,
- PD regulátor,

- odezva na změnu reference,
- odezva na změnu počáteční podmínky.

- Inverzní kyvadlo:

- lineární model,
- nelineární model,
- míra δ_v ,
- míra δ_{OL} ,
- míra δ_{CL} ,
- PD regulátor,
- Lead regulátor,
- odezva na změnu reference,
- odezva na změnu počáteční podmínky.