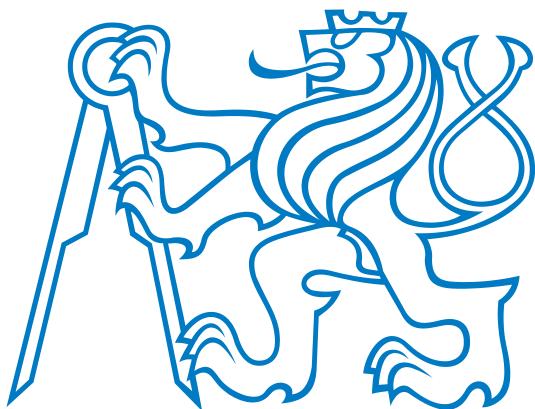


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ



DIPLOMOVÁ PRÁCE

Modelace a optimalizace logistických procesů
v Pivovarech Staropramen, a. s.

Praha, 2009

Michal Dvořák

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne _____

_____ podpis

Poděkování

Dovoluji si tímto poděkovat Ing. Jiřímu Roubalovi, Ph.D. za zajímavé zadání, odborné vedení a cenné rady.

Anotace

Pivovary Staropramen, a. s., jsou kolosem dodávajícím své produkty do celé České republiky i mimo ni. Denně jsou na mnoha výrobních linkách stočeny tisíce hektolitrů piva a stovky různých produktů putují mezi desítkami distribučních center. Efektivita této logistiky je jedním ze základních předpokladů ekonomické úspěšnosti firmy a přitom není dodnes její řízení podpořeno žádným komplexnějším nástrojem založeným na matematickém popisu problému.

Cílem této práce je doplnit případné mezery v modelu logistiky Pivovarů Staropramen, a. s., prezentovaném v předchozí práci [1] a především nabídnout studii možností a přínosu realizace centralizovaného optimalizačního nástroje a to společně s návrhem řešení pomocí matematického programování.

Annotation

The giant corporation Pivovary Staropramen holds significant market share as a beer producer in the Czech Republic. Its production logistics consists of many bottling and keg lines as well as tens of distribution centers. Rich portfolio of about two hundred kinds of products is being delivered every day to customers from all over the republic and significant portion of production come to export. Efficiency of such extensive logistics structure is the main prerequisite for economical prosperity of the company. No sofisticated planning tool based on mathematical description of the problem is used, though.

The goal of this thesis is to complete a model of logistics presented in [1] and above all offer a study of potential and benefits of logistics optimization tool as well as a concept of the actual realization using mathematical programming.

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Katedra řídicí techniky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Michal Dvořák**

Studijní program: Elektrotechnika a informatika (magisterský), strukturovaný
Obor: Kybernetika a měření, blok KM1 - Řídicí technika

Název tématu: **Model logistických procesů v Pivovarech Staropramen**

Pokyny pro vypracování:

1. Vytvořte model logistických procesů zásobování výrobních linek v Pivovarech Staropramen (konkrétní specifikaci problému dodá Staropramen).
modelování skladování (rozvoz ze skladů, svoz z celé republiky)
zásobování výrobních linek (obaly apod.)
obsluha výrobních linek (odvoz hotových výrobků do skladů, k zákazníkům)
2. Ověřte správnost modelu s reálnými daty z Pivovaru Staropramen. Proveďte srovnání s daty z minulosti i přítomnosti.
3. Navrhněte optimalizátor logistiky pro zásobování výrobních linek a zavážení skladů.

Seznam odborné literatury:

Petr Horáček, Systémy a modely, Praha 2000

Web SARI, <http://dce.felk.cvut.cz/sari/>

Jan John, Systémy a řízení, Praha 1999

Franklin, Powell, Emami-Naeini, Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall, 2006

Vedoucí: Ing. Jiří Roubal, Ph.D.

Platnost zadání: do konce letního semestru 2008/09



prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry



doc. Ing. Boris Šimák, CSc.
děkan

V Praze dne 27. 2. 2009

Obsah

Seznam obrázků	xv
Seznam tabulek	xvii
1 Úvod	1
1.1 Struktura podniku a výrobního procesu	2
1.1.1 Výrobní linka	2
1.1.2 Sklad	3
1.1.3 Transport	4
1.2 Postup řešení	4
2 O modelování, řízení a optimalizaci	7
2.1 O modelování	7
2.1.1 Vstupní a výstupní veličiny	9
2.1.2 Stavové veličiny	9
2.1.3 Parametry systému	10
2.2 O optimalizaci	10
3 Model logistiky	11
3.1 Základní ustanovení	11
3.2 Stáčecí linka	12
3.2.1 Vstupní a výstupní veličiny modelu linky	13

3.2.2	Parametry modelu linky	15
3.2.3	Základní vztahy	18
3.2.4	Rozšíření modelu	18
3.3	Distribuční centrum a sklad	29
3.3.1	Vstupní a výstupní veličiny modelu skladu	29
3.3.2	Parametry	31
3.3.3	Další vztahy	32
3.4	Transport	32
3.4.1	Vstupní a výstupní veličiny modelu transportu	32
3.4.2	Parametry	34
3.4.3	Shrnutí	34
3.5	Celkový model	35
3.5.1	Veličiny celkového modelu	35
3.5.2	Shrnutí	37
3.6	Verifikace modelu	38
3.6.1	Verifikace modelu stáčecí linky	38
3.6.2	Vyhodnocení verifikace	40
4	Optimalizátor	43
4.1	Cíl optimalizace	43
4.1.1	Proces plánování	44
4.1.2	Kritérium optimality řízení	46
4.1.3	Přínosy optimalizátoru	48
4.2	Metody optimálního řízení	49
4.2.1	Přesné metody	49
4.2.2	Heuristické metody	51
4.2.3	Vyhodnocení algoritmů	53
4.3	Diskretizace	54

4.3.1	Diskrétní model linky	54
4.3.2	Diskrétní model skladování	55
4.3.3	Diskrétní model transportu	55
4.3.4	Celkový diskrétní model	56
4.4	Softwarové vybavení	58
4.4.1	Nekomerční solvery	59
4.4.2	Placené solvery	59
4.5	Popis problému matematickým programováním	60
4.5.1	Definice proměnných	60
4.5.2	Omezující podmínky	61
4.5.3	Účelová funkce	63
4.6	Vyhodnocení optimalizace	66
4.6.1	Testovací scénář	66
4.6.2	Validita výstupu	73
4.6.3	Rychlosť optimalizace	82
4.6.4	Míra zjednodušení oproti reálnému problému	84
5	Závěrečné vyhodnocení	87
Literatura		92
A Nomenklatura		I
B Obsah přiloženého CD		V

Seznam obrázků

2.1	Blokové schéma stavového popisu systému	8
3.1	Blokové schéma modelu stáčecí linky	13
3.2	Ukázkové průběhy vstupních a výstupních veličin modelu linky	19
3.3	Transformace obdélníkového signálu na signál lichoběžníkový	20
3.4	Alternativní způsob modelace postupného nájezdu a odstavení linky . . .	23
3.5	Příčina vzniku překryvu	24
3.6	Ilustrace transformace vstupního signálu $l(t)$ pro odstranění překryvu .	25
3.7	Srovnání ideálního průběhu výroby při překryvu s modelem.	28
3.8	Schéma integrátoru	29
3.9	Ganttův diagram stáčení pro verifikaci modelu	39
3.10	Histogram odchylky modelu od reality pro jednotlivé výrobky	40
4.1	Schéma plánování	44
4.2	Ganttův diagram produkce při nominálním nastavení	69
4.3	Stavy produktů v DC Most při nominálním nastavení optimalizace . .	71
4.4	Odchylky od požadovaných zásob produktů v DC Most při nom. nastavení	71
4.5	Stavy produktů a obalů v DC Smíchov při nom. nastavení optimalizace .	72
4.6	Ganttův diagram produkce testu č. 2	75
4.7	Stavy produktů v DC Most a jejich odchylky od reference při testu č. 2 .	76
4.8	Ganttův diagram produkce testu č. 3	77
4.9	Pondělní stavy produktů a obalů ve smíchovském skladu při testu č. 3 .	78

4.10	Pondělní stavы produktů a obalů ve smíchovském skladu při testu č. 4	78
4.11	Ganttův diagram produkce testu č. 5	79
4.12	Ganttův diagram produkce testu č. 6	79
4.13	Ganttův diagram produkce testu č. 6 při $c_{\text{pch}} = 0$	80
4.14	Ganttův diagram produkce testu č. 7	80
4.15	Pondělní stavы produktů při testu č. 8	81
4.16	Srovnání úterních stavů obalů v DC Most pro test č. 9 a nom. nastavení	81

Seznam tabulek

3.1	Rozdělení transformace na intervaly	21
3.2	Historie provozu linky	41
4.1	Kapacity skladů testovacího scénáře	67
4.2	Počáteční množství produktů a obalů na skladech	68
4.3	Odběr produktů a obalů z distribučních center	68
4.4	Požadované hladiny zásob v jednotlivých skladech	68
4.5	Koefficienty cenové funkce nominálního nastavení optimalizátoru	69
4.6	Souhrn informací o nominálním nastavení optimalizátoru	70
4.7	Transport ze smíchovského skladu do DC Most v pondělí – nom. nastavení	73
4.8	Hodnoty kritéria nominálního nastavení optimalizátoru	73
4.9	Hodnoty kritéria pro test č. 1	74
4.10	Transport ze smíchovského skladu do DC Most v pondělí pro test č. 3 .	82
4.11	Závislost časové náročnosti výpočtu na tvaru účelové funkce	83
4.12	Závislost časové náročnosti výpočtu na použitém solveru	84
4.13	Závislost časové náročnosti výpočtu na způsobu popisu transportu	85

Kapitola 1

Úvod

Pravděpodobně neexistuje jediný dospělý obyvatel České republiky, kterému by značka Staropramen nic neříkala. Většina si určitě ihned představí orosenou sklenici zlatavého nápoje. A i ti, kteří pivu příliš neholdují, si jistě vybaví hory zelených beden naplněných „lahváčí“ zabírající značnou část příslušného oddělení supermarketu.

To, že Pivovary Staropramen, a. s., již půl desetiletí nepatří nám Čechům, ale belgickému kolosu Inbevu, již tolik známo není. Za povšimnutí také stojí množné číslo v názvu společnosti. Málokdo totiž ví (a málokoho to asi také zajímá), že když si vychutnává pivo značek jako je Braník, Velvet, Kelt, Měšťan, Ostravar nebo dokonce Stella Artois, tak se jedná o pivo stočené na stejné lince jako Staropramen. Přirozeně receptura se do určité míry u každé ze značek liší, ale pivo vaří stejní lidé.

Dalo by se říci, že tato společnost produkuje jediný výrobek - pivo. Avšak od každé značky existuje mnoho variant. Vyrábějí si piva s různou koncentrací mladiny¹, různé tmavosti a v neposlední řadě se stáčejí do různých obalů (lahví a sudů různých velikostí). Při zahrnutí kombinací všech značek a variant jsou druhů výrobků stovky. Některé jsou přirozeně produkovány ve výrazně větších objemech než jiné.

Pivovary Staropramen, a. s., prodávají své výrobky po celé České republice nejen do restaurací, pivnicí a hospod, ale také do hypermarketů i menších obchodů. Dále jde významná část produkce na export. Pro účely distribuce společnost vlastní, nebo si pronajímá, desítky distribučních center.

Vyvstává otázka, jak je tento kolos, dodávající stovky produktů přes desítky distribučních center do všech koutů České republiky a i mimo ni, řízen? Plánování je v tuto chvíli

¹výčepní pivo 8-10% neboli stupňů, ležák 11-12,5%, speciální více než 12,5%

značně decentralizované z hlediska zaměření na různé oblasti výroby a logistiky a není takřka vůbec automatizované. Cílem této práce je nabídnout studii možností realizace centralizovaného optimalizačního nástroje logistiky Pivovaru Staropramen, a. s., společně s návrhem řešení.

1.1 Struktura podniku a výrobního procesu

Přestože v dnešní době je trendem co nejvíce úkonů nechat provádět stroje (to je účelem i této práce), v pivovaru je lidský prvek v určité míře nezbytný - především ve spojení s transportem (řidiči) a skladováním (ještěrkáři). Čím větší podíl lidské práce na výrobním procesu, tím spíš nelze tento proces přesně popsat. To je také jeden z důvodů, proč pro účely modelace a optimalizace pivovaru není třeba ve studiu jednotlivých částí provozu zkoumat jejich podstatu příliš do hloubky, ale postačí vystihnout chování co největších autonomních struktur².

Těmito základními částmi výrobního a distribučního procesu jsou

- výrobní linka,
- sklad (distribuční centrum),
- transport.

1.1.1 Výrobní linka

Srdcem každého pivovaru je přirozeně varna piva. Přesto z hlediska logistiky je zbytečné ji modelovat samostatně. Stačí ji uvažovat jako součást výrobní linky. Výrobní linka však není zcela korektní termín. Pivo jako takové se nevyrábí na lince, ale vaří ve varně. Na lince se naopak stáčí. Přesto pod pojmem výrobní linka bude v této práci myšlena právě varna, stáčecí linka, pasterizační a filtrační kolony a ostatní části výrobního provozu.

K výrobě samotného piva je třeba různých surovin - především jsou to voda, chmel, slad a kvasnice. Touto částí výroby se však ani model, ani optimalizátor v rámci této práce zabývat nebude. Důvodem je odlišný časový horizont plánování závozu potravinářskými

²Tedy rozdělit logistiku na co největší celky, které však ještě fungují nezávisle.

surovinami a snaha o rozdělení problému na menší podproblémy, které by bylo možné řešit samostatně. Tato práce si dává za cíl řešit pouze části provozu úzce související s logistikou.

Filtrace piva

Samotná stáčecí linka potřebuje k provozu pochopitelně pivo ke stáčení a obaly k plnění (sudy, lahve). Tato práce bude předpokládat, že pivo ke stočení bude vždy k dispozici. Takové zjednodušení je možné provést pouze za předpokladu, že bude model obsahovat pouze jedinou stáčecí linku (v tomto případě jedinou sudovou linku na pražském Smíchově). Pokud by bylo zakomponováno linek více, pak by bylo nutné problém filtrace piva uvažovat.

Nápoj se před stočením musí profiltrovat (odstraňují se pevné částice a kvasnice). Přefiltrované pivo se uskladní v kádích a čeká na stočení. Kapacita těchto kádů je však omezená a proto je třeba koordinovat stáčení na různých linkách tak, aby se v ideálním případě na všech stáčelo stejně pivo (třebaže do různých obalů).

1.1.2 Sklad

Skladování je proces mnohem jednodušší než výroba. Z hlediska logistiky však pravděpodobně nejvíce problematický. Sklady mají omezenou kapacitu a to především ten smíchovský u stáčecích linek. Jedním z důležitých faktorů je cena skladování ve smyslu blokace kapitálu. Zdroje takto „uložené“ ve skladech nemohou být použity na další produkci, nákup surovin apod. Ideálním stavem by tedy bylo, kdyby sklady mohly být neustále prázdné. Toho nelze docílit, avšak snahou je co největší přiblížení.

Skladování lze rozdělit na primární a sekundární - primární a sekundární distribuční centra. Částečně mimo toto dělení stojí malé sklady u výrobních linek, které fungují spíše jako překladiště.

Primární distribuční centra slouží pro uskladnění zásob (rezerv) a obalů stažených z trhu. Dále také pro export. Sekundární distribuční centra pak pro přímé zásobování zákazníků. Cílem je zavážet sekundární distribuční centra (DC) přímo od linky, avšak ne vždy se to povede. V takovém případě jsou produkty nejdřív dovezeny do primárního DC a teprve potom dopraveny do cílového DC. Tím však vznikají vícenáklady za dopravu.

1.1.3 Transport

Pivovary Staropramen, a. s., téměř výhradně využívají služeb externích autodopravců. Na každou cestu je tak třeba objednat nákladní vůz s určitým předstihem. Přitom nehraje roli, zda se jedná o cestu jednosměrnou a nebo obousměrnou, kdy se rovnou naloží výrobky nebo obaly na cestu zpět. Autodopravce si využítí kamionu v případě jednosměrné cesty zajistí sám.

Každý druh nákladního vozu má určitý počet paletových míst, přičemž záleží na konkrétní převážené komoditě, jaké její množství jedno paletové místo pojme. Různé druhy obalů a produktů mají různé možnosti vršení palet na sebe z důvodu pevnosti obalů. Maximální naložení se může lišit i u jednotlivých tras - například kolem Smíchova je povoleno jezdit jen automobilům do určité váhy. Zde je tedy možné naložit na vůz mnohem více palet prázdných obalů než hotových produktů téhož typu.

1.2 Postup řešení

Tato sekce shrnuje proces tvorby optimalizátoru do jednotlivých etap, podle kterých budou koncipovány následující kapitoly a stručně je popisuje. Dále zmiňuje přípravné práce tomuto procesu předcházející.

Myšlenka tvorby optimalizátoru logistických procesů v Pivovarech Staropramen, a. s., se zrodila již před několika lety, kdy Ing. Jiří Roubal Ph.D. ve spolupráci s Ing. Jaroslavem Hlavatou z Pivovarů Staropramen, a. s., vypsal bakalářské téma týkající se prozatím pouze modelace. Tehdy vznikla práce postihující základní problematiku [2], kterou jsem se o rok později pokusil rozšířit a doplnit [1]. Před rokem, kdy byly kontakty s Pivovary Staropramen, a. s., opět obnoveny za účelem vývoje optimalizátoru, bylo z důvodu změn v podniku rozhonuto model do určité míry přepracovat. Změny postihly i management podniku, ale naštěstí nikoliv z hlediska vstřícnosti kontaktních osob.

Vývoj lze rodělit do 4 fází:

1. Získání informací o distribučním procesu nutných pro tvorbu modelu.
2. Získání informací o plánovacím procesu potřebných pro tvorbu optimalizátoru.
3. Tvorba a verifikace modelu - kap. 3.

4. Tvorba optimalizátoru - kap. 4.

Informace o distribučním procesu byly z větší části převzaty z původní práce [1]. Byly doplněny o nové poznatky a podle potřeby upraveny pro stávající podobu struktury Pivovarů Staropramen, a. s. Složitější úlohou se ukázalo získání dat potřebných pro verifikaci modelu. Protože je společnost součástí mezinárodní korporace, používá softwarové prostředky společné všem členům skupiny Inbev. Tyto aplikace jsou na míru přizpůsobené interním potřebám, avšak jejich flexibilita je v podstatě nulová. Podnět na úpravu klientské aplikace pro čtení z podnikové databáze byl vstřícně vyslyšen, ale protože správy těchto technologií sídlí po celé Evropě, bylo z časových důvodů výhodnější potřebná data ručně opsat.

V této práci je poprvé představen návrh optimalizačního nástroje a proto hlavním cílem druhé fáze bylo co nejlepší pochopení současného plánovacího procesu. Za tímto účelem bylo sjednáno mnoho schůzek s různými osobami zodpovědnými za tvorbu plánu. Data používaná při ručním plánování jsou v lepším případě přístupná ve formě excelovských tabulek v horším pomocí klienta podnikového informačního systému (SAPu). Bylo proto potřeba vytvořit značné množství skriptů, jejichž jediným úkolem bylo načítat data do vhodnějšího formátu. Pro efektivní využití optimalizačního nástroje bude přirozeně potřeba přímé napojení na databázi. Data a informace využívané pro tvorbu plánů logistiky budou popsány v kap. 4.

Poslední dvě fáze vývoje zpracovávají získané informace. V kap. 3 je nejprve popsána dekompozice struktury logistiky a jednotlivé části modelovány zvlášť, poté je vytvořen celkový model a ten verifikován. Obsahem kap. 4 pak je také popis různých metod optimalizace a výběr té nejvhodnější, dále integrace modelu do optimalizátoru a vyhodnocení optimalizace pomocí různých logistických scénářů. Obsah kap. 2 slouží jako krátký úvod do problematiky modelování, řízení a optimalizace.

Kapitola 2

O modelování, řízení a optimalizaci

Protože základním předpokladem pro úspěšnou komunikaci se zadavatelem bylo vzájemné pochopení ve smyslu správné interpretace různých pojmu, jako např. model, optimálizátor, vstup, výstup apod., bude další sekce věnována stručnému vysvětlení základních pojmu týkajících se modelování.

2.1 O modelování

Pojem model v elektroinženýrské terminologii představuje matematický popis obvykle tvořený množinou diferenciálních či diferenčních rovnic popisujících dynamické chování procesu [3]. Model lze získat pomocí vyjádření fyzikální podstaty procesu, případně zkoumáním odezvy modelovaného systému na vhodné vstupní průběhy. V případě logistiky pivovaru připadá v úvahu spíše fyzikální odvození modelu¹.

Modelováním vytváříme matematické struktury, jejichž cílem je co nejvěrněji simulovat chování nějakého reálného procesu. Speciální podmnožinou matematických modelů jsou modely lineární, tedy takové jejichž stavebními prvky jsou pouze:

- vstupní veličiny,
- výstupní veličiny,

¹Ve spojení s logistikou může slovo „fyzikální“ znít nepatřičně, ale vzhledem k tomu, že fyzika je v podstatě aplikovaná matematika s účelem popisovat rozličné jevy našeho světa, není důvod toto označení považovat za nevalidní.

- stavové veličiny,
- **lineární** diferenciální rovnice prvního řádu,
- výstupní lineární algebraická rovnice.

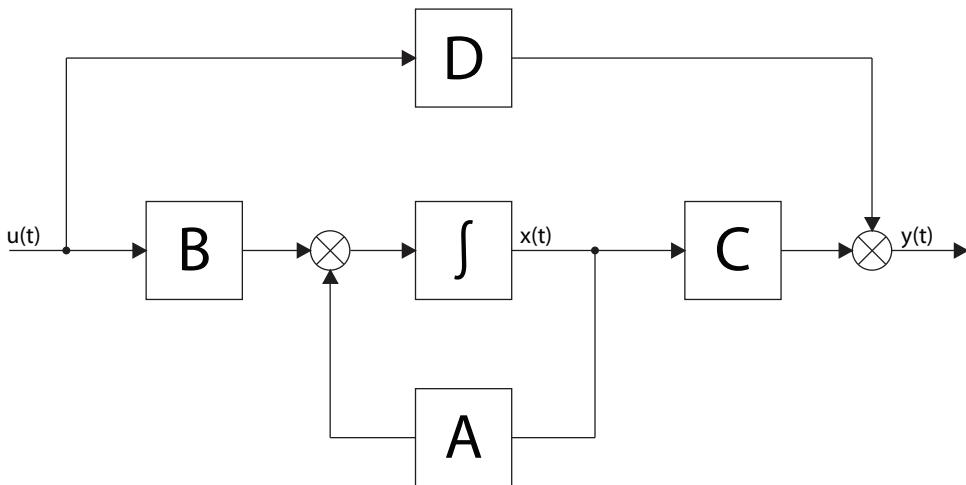
Je možné uvést, že lineární modely popisují lineární procesy v našem světě. Toto tvrzení však narází na fakt, že v našem vesmíru pravděpodobně neexistuje žádný reálný lineární systém (snad jen systém triviální). Ve skutečnosti lineární modely popisují systémy, jejichž chování se k lineárnímu blíží, případně se linearita příliš neprojevuje v žádané pracovní oblasti. Důležitou vlastností lineárních modelů je snazší aplikace řídících systémů.

Typický tvar matematického popisu spojitého² lineárního časově invariantního³ systému je

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (2.2)$$

kde vektory \mathbf{x} , \mathbf{u} a \mathbf{y} jsou stavové, vstupní a výstupní veličiny respektive a matice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} a \mathbf{D} jsou matice systému, řízení a dvě výstupní matice respektive. Význam veličin stavového popisu systému je ilustrován na obr. 2.1.



Obrázek 2.1: Blokové schéma stavového popisu systému

²V tomto úvodu k modelování se pro jednoduchost budeme zabývat pouze spojitými systémy.

³Matice systému jsou konstantní, tj. parametry systému se časem nemění.

2.1.1 Vstupní a výstupní veličiny

Model systému je určen pro pozorování dynamického chování systému, tedy sledování výstupních veličin za určitých hodnot vstupních veličin (jinými slovy odezvy systému na určité vstupy). Vstupní veličinou je funkce akčního zásahu (vnější zásah do systému). Výstupní veličinou může být opět konstanta nebo funkce, její průběh je závislý na vstupních veličinách a stavech systému. Fyzicky je výstupní veličinou taková, kterou je možné měřit.

Příkladem výstupní veličiny může být ujetá vzdálenost automobilem, přičemž vstupem je sešlápnutí plynu.

2.1.2 Stavové veličiny

Stavové veličiny lze vysvětlit pokračováním příkladu automobilu. Na ten působí ve zjednodušení dvě síly

- výkon motoru přenesený přes převodové ústrojí a nápravu na kola,
- odporová síla vzduchu úměrná rychlosti vozidla⁴.

Sešlápnutím pedálu plynu zvýšíme zrychlení automobilu, avšak jak bude narůstat rychlost, zrychlení bude klesat v důsledku odporu vzduchu podle [3]

$$ma(t) = -bv(t) + u(t). \quad (2.3)$$

Přitom a je zrychlení automobilu, m je hmotnost automobilu, b je koeficient aerodynamického odporu vozidla, v je jeho rychlost a u je síla působící na automobil (úměrná sešlápnutí plynu). Vztah (2.3) plyne z druhého Newtonova zákonu - zákonu síly

$$F = ma. \quad (2.4)$$

Rychlosť automobilu bude vnitřním stavem systému a jeho integrací podle času získáme ujetou vzdálenost $x(t)$, tedy výstup systému, který lze snadno měřit. Stavový popis (2.2) takto zjednodušeného modelu má tvar

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= -\frac{b}{m}v(t) + \frac{1}{m}u(t), \\ \dot{x}(t) &= v(t), \\ y(t) &= x(t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

⁴Ve skutečnosti je odpor vzduchu úměrný kvadrátu rychlosti.

kde $u(t)$ je vstupní veličina vyjadřující míru sešlápnutí plynového pedálu a $y(t)$ je výstupní veličina, která se rovná vozem uražené vzdálenosti.

2.1.3 Parametry systému

Příkladem parametru je váha vozu a jeho koeficient aerodynamického odporu v (2.2). Hodnoty parametrů modelu do určité míry ovlivňují jeho chování, avšak nemají vliv na vlastní strukturu modelu. Jedná se obvykle o koeficienty rovnic systému.

2.2 O optimalizaci

V kap. 2.1 byl uveden příklad lineárního modelu (2.5) pohybujícího se automobilu. Na tomto dynamickém systému bude v této sekci osvětlena souvislost pojmů model, řídicí systém a optimalizátor.

Pokud se automobil pohybuje rychlostí v_1 a řidič potřebuje zrychlit na rychlosť v_2 provede to za pomocí plynového pedálu a své zkušenosti s ovládáním vozu. Avšak v lépe vybavených vozech má možnost použít tempomat - řidicí systém (regulátor), který změnu rychlosti provede za něj. Avšak je obvyklé, že na průběh změny rychlosti jsou kladený určité požadavky, například:

- okamžitá spotřeba vozu musí být co nejnižší,
- zrychlení musí proběhnout za co nejkratší dobu,
- zrychlení nesmí překročit míru komfortu,
- zrychlení musí proběhnout co nejplynuleji.

Každý z těchto požadavků lze ohodnotit určitou cenou a sjednotit do celkové kritériální funkce. Je zřejmé, že jednotlivé požadavky jsou často protichůdné. Řidicí systém, který při regulaci zohledňuje hodnotu kritéria (maximalizuje, minimalizuje), můžeme nazývat optimalizátorem.

Kapitola 3

Model logistiky

Jak už bylo uvedeno v úvodní kapitole, problém logistiky Pivovarů Staropramen, a. s., lze dekomponovat do tří podproblémů - výroby, skladování a transportu. Každá z těchto částí lze popsat samostatně a model celé logistiky lze poté zkonztruovat užitím těchto podmodelů.

3.1 Základní ustanovení

Model zahrnuje m_p výrobků a m_c obalů. Většina veličin modelu bude tedy vektorová ve tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_{m_p}(t) \\ c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_{m_c}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

kde p_i a c_i značí veličinu (množství, tok apod.) příslušející i -tému výrobku a obalu respektive. Sjednocení produktů a obalů do jednoho vektoru o délce $m = m_p + m_c$ je výhodné z hlediska množství proměnných a přehlednosti modelu. U transportu a skladování totiž neexistuje takový rozdíl v zacházení mezi obaly a produkty, jako u linky, kde by rozdelení

smysl mělo, ale není nutné.

Další otázkou jsou jednotky množství produktů a obalů, se kterými bude model pracovat.

Nabízí se tyto možnosti:

- kus - ks,
- paleta - PAL,
- hektolitr - hl.

Každá z těchto jednotek má své výhody v určitých oblastech modelu. Počítání po kusech je vhodné zejména pro výrobu - pracovní rychlosť linky je udávána v obalech za hodinu a produkty i obaly na lince fyzicky vystupují po jednotlivých kusech. Nevýhodou naopak jsou velké rozdíly faktického množství nápoje mezi jednotlivými výrobky (např. padesátilitrový sud je ekvivalentem sta lahví). Tato jednotka také nic neříká o velikosti místa zabraného ve skladě.

Paleta je oproti kusu výhodnější z hlediska skladování a transportu. Tyto dvě oblasti logistiky počítají s paletovými místy. Problémem ovšem je, že na jedno paletové místo lze různé výrobky vršit různě (je dán maximální počet pater). Paleta jako jednotka tedy dává rámcový přehled, kolik místa na skladě daná jednotka zabere, ovšem stále ne přesně.

Použitím hektolitru jako jednotky nezískáme informaci ani o potřebném skladovacím prostoru, ani o rychlosti výroby. Výhodou počítání s hektolity je přesné definovaní množství výrobků. Z tohoto důvodu se také jedná o jednotku, se kterou pracují v Pivovarech Stropotramen, a. s.

Přirozeně je možné také tyto jednotky kombinovat a v případě potřeby přepočítávat. Ve skutečnosti to bude nutné, neboť zadavatel požaduje informace o množstvích v hektolitrech. Protože z hlediska modelování se nejvhodnější jeví počítání po kusech, bude třeba na vstupu a na výstupu modelu přepočítávat.

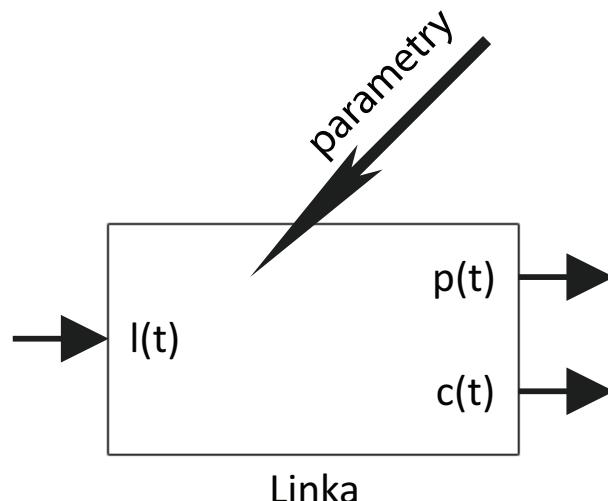
3.2 Stáčecí linka

Stáčecí linky používané v pivovarech se liší nejen svými parametry, jako jsou kapacita, dopravní zpoždení, případně doba náběhu, ale také svým účelem. Existují dva hlavní typy

linek a to jsou linky sudové (kegové) a linky lahvové. Tento model se bude nejprve zabývat pouze sudovými linkami, avšak z pohledu logistiky mezi těmito typy není principiální rozdíl, liší se spíše v parametrech. V následujícím textu tedy bude pod slovem linka vždy míněna kegová, avšak většinu poznatků lze aplikovat na lahvovou linku také.

Linka je zásobována ze dvou zdrojů - pivem z tanků a obaly ze skladu. Tento model předpokládá, že pivo ke stočení je vždy k dispozici. Stačí proto, když model postihne pouze toky produktů a obalů mezi linkou a skladem.

Linka produkující určitý výrobek odebírá z přilehlého skladu příslušné obaly a suroviny. Model podle obr. 3.1 má jednu vstupní veličinu, dvě výstupní a několik parametrů.



Obrázek 3.1: Blokové schéma modelu stáčecí linky

3.2.1 Vstupní a výstupní veličiny modelu linky

Výrobní linka má jednu vstupní veličinu, která určuje zda je linka v daný časový okamžik pro určitý výrobek zapnuta. Výstupní veličinou je tok produktů z linky a tok obalů na linku (podle (3.1) v jednom vektoru). V následujících odstavcích budou vstupní a výstupní veličiny rozebrány.

Výrobní vektor

Aktuální výrobní vektor $\mathbf{l}(t)$ je podle (3.1) tvaru

$$\mathbf{l}(t) = \begin{bmatrix} l_1(t) \\ l_2(t) \\ \vdots \\ l_{m_p}(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

kde m_p je počet produktů, které model postihuje. Vektor má m prvků, z toho m_c nul, neboť obaly nelze na lince produkovat. Hodnota $\mathbf{l}_i(t)$ udává, zda linka stáčí výrobek s indexem i , přičemž $\mathbf{l}_i(t) = \{0; 1\}$ (hodnota 1 značí produkci příslušného výrobku, hodnota 0 opak) a platí podmínka, že se smí vyrábět pouze jeden produkt v daný okamžik, tedy

$$\sum_{i=1}^{m_p} \mathbf{l}_i(t) \leq 1. \quad (3.3)$$

Tok výrobků a obalů

Tato výstupní veličina lze rozdělit do dvou částí - vektor toku výrobků z linky $\mathbf{p}(t)$ o rozložení m_p a vektor toku obalů $\mathbf{c}(t)$ na linku o rozložení m_c :

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_{m_p}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_{m_c}(t) \end{bmatrix}.$$

Tok výrobků a obalů $\mathbf{s}_l(t)$ o rozložení m pak má tvar

$$\mathbf{s}_l(t) = \begin{bmatrix} s_{l_1}(t) \\ s_{l_2}(t) \\ \vdots \\ s_{l_m}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{c}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Vektor $\mathbf{s}_l(t)$ vyjadřuje okamžitou spotřebu obalů a okamžitou produkci výrobků v $\frac{\text{ks}}{\text{h}}$. Hodnoty vektoru $\mathbf{p}(t)$ jsou proto nezáporné, naopak hodnoty vektoru $\mathbf{c}(t)$ jsou nekladné. Opět platí podmínka, že smí být produkován pouze jeden výrobek v daný okamžik.

3.2.2 Parametry modelu linky

Parametry modelu linky lze rozdělit na externí a interní. Ty externí plynou z reálných parametrů systému a jsou to

- matice receptury,
- nominální kapacita linky,
- efektivita linky,
- dopravní zpoždění linky,
- doba náběhu a odstavení linky,
- produkční ztráty.

Interním parametrem je doba překryvu výroby a plyně z vnitřní struktury modelu, tedy způsobu popisu systému.

Matice receptury

Je třeba definovat, jaké obaly se spotřebovávají při produkci určitého výrobku. Toto udává matice receptury \mathbf{R}_E o rozměru $m \times m$ definovaná

$$\mathbf{R}_E = \begin{bmatrix} r_{E_{11}} & r_{E_{12}} & \cdots & r_{E_{1m}} \\ r_{E_{21}} & r_{E_{22}} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ r_{E_{m1}} & & & r_{E_{mm}} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Každý řádek i matice \mathbf{R}_E udává v jednotlivých sloupcích kolik kusů j -tého obalu je na jeden kus i -tého výrobku třeba. Platí podmínky o nekladnosti prvků matice a o nulovosti prvků příslušejících spotřebě produktů, tedy:

$$\begin{aligned} r_{E_{ij}} &\leq 0, \\ r_{E_{ik}} &= 0 \quad , \quad k = \{0, 1, \dots, m_p\}. \end{aligned}$$

Nominální kapacita

Každá linka má určitou maximální kapacitu, tedy množství obalů za hodinu, které je za ideálních podmínek schopna naplnit. Protože pro každý výrobek může být kapacita linky různá, je definována matice nominálních kapacit o rozměru $m \times m$

$$\mathbf{C}_{\text{nom}} = \begin{bmatrix} c_{\text{nom}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{\text{nom}_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & c_{\text{nom}_m} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

což je diagonální matice a hodnota prvku c_{nom_i} přísluší nominální kapacitě linky při produkci i -tého výrobcu a obalu. Kapacity příslušející obalům jsou ovšem nulové, platí tedy

$$c_{\text{nom}_k} = 0, \quad k = \{m_p, m_p + 1, m_p + 2, \dots, m_p + m_c\}.$$

Potřeba diagonality pramení z nutnosti násobitelnosti výrobním vektorem.

Efektivita

Maximální kapacity nelze dosáhnout, proto se definuje kapacita efektivní. Ta v poměrných hodnotách udává, na kolik se kapacita linky blíží nominální hodnotě. Veličina zahrnuje pravděpodobnost neplánovaných odstávek z důvodu technické poruchy, zaseknutého obalu, lidské chyby apod. Definuje se podobně jako nominální kapacita ve formě diagonální matice (opět z důvodů násobitelnosti) o rozměru $m \times m$

$$\mathbf{C}_{\text{ef}} = \begin{bmatrix} c_{\text{ef}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{\text{ef}_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & c_{\text{ef}_m} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Hodnota prvku c_{ef_i} přísluší efektivní kapacitě linky při produkci i -tého výrobcu. Kapacity příslušející obalům by měly být nulové¹, platí tedy

$$c_{\text{ef}_k} = 0, \quad k = \{m_p, m_p + 1, m_p + 2, \dots, m_p + m_c\}.$$

¹Není to však nutné, pokud jsou nulové příslušné nominální kapacity.

Dopravní zpoždění

Jedná se o časový interval udávaný v hodinách od naložení obalu na pás linky po odebrání hotového výrobku. Dá se předpokládat, že velikost zpoždění je stejná pro všechny produkty. Platí

$$T_d > 0.$$

Doba náběhu a odstavení

Vlastností sudové linky je pozvolný náběh způsobený postupným najízděním jednotlivých plnicích ramen. Obdobně probíhá odstavení linky. Plnicí ramena nabíhají stejným způsobem bez ohledu na plněný obal, lze tedy opět tento parametr prohlásit za skalár značený T_n s vlastností

$$T_n > 0.$$

Produkční ztráty

Při výrobě dochází k opotřebení obalů, palet apod. V matematickém popisu jsou tyto ztráty vyjádřeny pomocí matice ztrát \mathbf{W} , která má tvar

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & w_m \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Hodnota prvku w_i je poměrná hodnota ztrát při výrobě i -tého výrobku. Platí tedy

$$0 \leq w_i < 1.$$

Matice ztrát popisuje frekvenci jevu, kdy při spotřebování obalu nedojde k produkci.

Doba překryvu výroby

Obal stráví na lince řádově půl hodiny. Je proto možné při změně výroby z produktu p_1 na produkt p_2 začít zavážet linku obaly potřebnými pro stáčení produktu p_2 ještě

před opuštěním linky posledním kusem výrobku p_1 . Doba překryvu T_o určuje, jak dlouho budou na lince dva druhy obalů (ať už naplněné, či prázdné).

3.2.3 Základní vztahy

Nejjednodušším způsobem lze linku popsat jako násobičku. Vstupní signál je vždy binární, tedy vektor obdélníkových průběhů, přičemž prvky vektoru nabývají hodnot 0 nebo 1. Ukázka vstupního průběhu $\mathbf{l}(t)$ pro tři výrobky je na obr. 3.2(a). Výstupní signál $\mathbf{s}_l(t)$ získáme podle vztahu

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{C}_{\text{nom}} \mathbf{C}_{\text{ef}} (\mathbf{I} - \mathbf{W}) \mathbf{l}(t - T_d) \quad (3.9)$$

pro vektor produktů a

$$\mathbf{c}(t) = -\mathbf{R}_E^T \mathbf{C}_{\text{nom}} \mathbf{C}_{\text{ef}} \mathbf{l}(t) \quad (3.10)$$

pro vektor obalů. Spojením těchto dvou výrazů získáme

$$\mathbf{s}_l(t) = \mathbf{L} \begin{bmatrix} \mathbf{l}(t - T_d) \\ \mathbf{l}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

kde matice \mathbf{L} je definována

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\text{nom}} \mathbf{C}_{\text{ef}} (\mathbf{I} - \mathbf{W}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_E^T \mathbf{C}_{\text{nom}} \mathbf{C}_{\text{ef}} \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

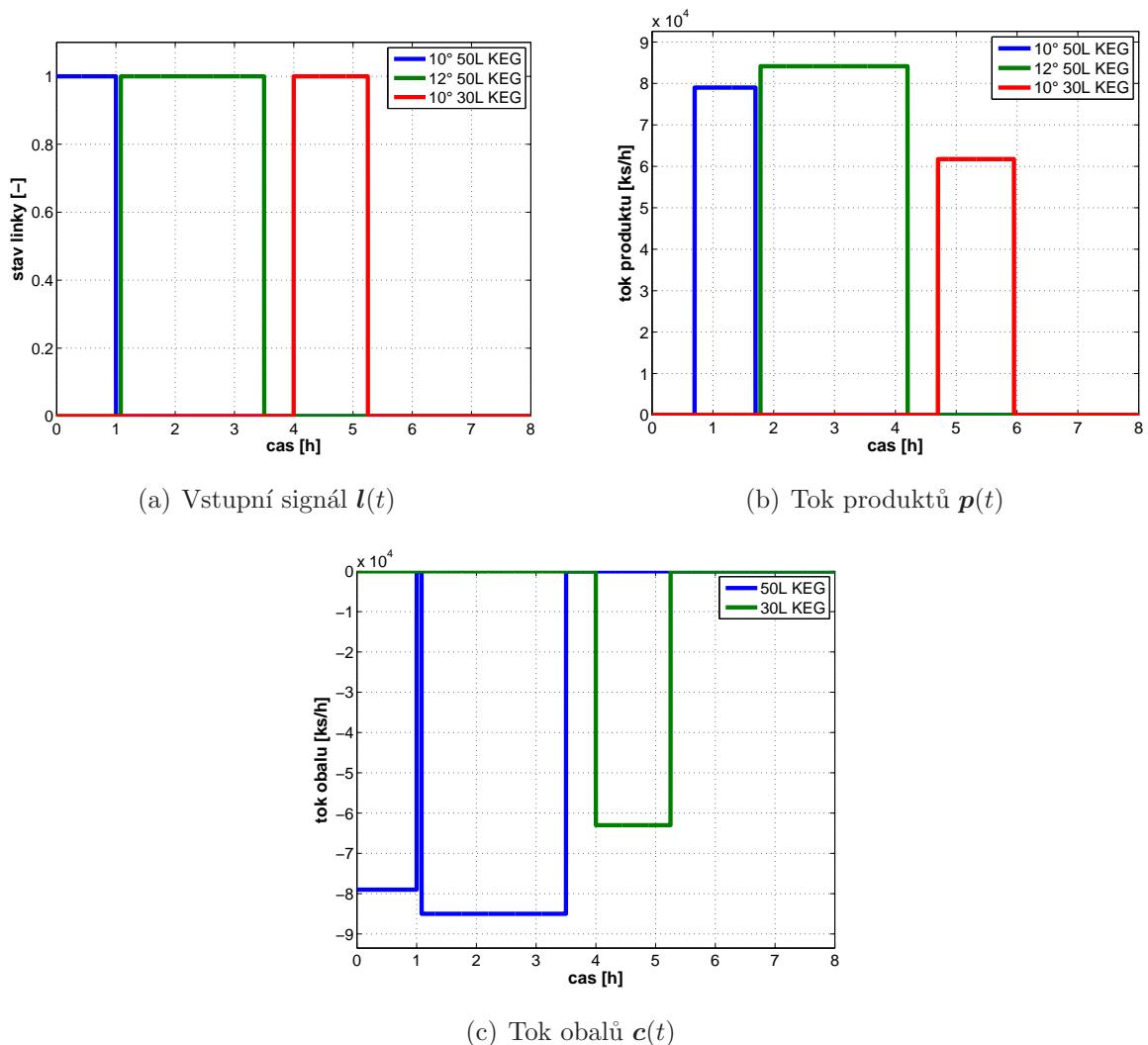
kde \mathbf{I} je jednotková matice a $\mathbf{0}$ je nulová matice příslušných dimenzí.

Výstupní tok produktů a obalů $\mathbf{p}(t)$ má opět obdélníkový charakter a liší se od $\mathbf{l}(t)$ amplitudou a zpožděním, což je ukázáno na obr. 3.2(b).

Tyto vztahy popisují základní model výrobní linky. Pokud bychom chtěli zahrnout i složitější aspekty chování linky, jako náběžné a sestupné hrany při rozjezdu a odstavení linky, nebo snížení efektivity při změnách výroby (změna obalu nebo výrobku), museli bychom model výrazně rozšířit. Možnosti takového rozšíření budou uvedeny v následující sekci.

3.2.4 Rozšíření modelu

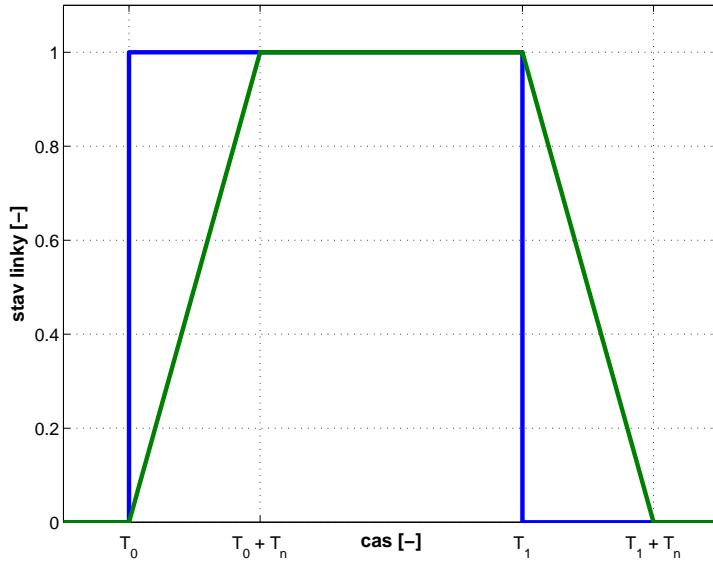
Náběh linky neproběhne okamžitě, ale efektivita se zvyšuje postupně. Pozvolnou náběžnou a sestupnou hranu lze simulovat transformací obdélníkového signálu na lichoběžníkový, nebo systémem druhého řádu.



Obrázek 3.2: Ukázkové průběhy vstupních a výstupních veličin modelu linky

Aproximace lichoběžníkem

Vztahy (3.9) a (3.10) je třeba upravit tak, aby náběžné a sestupné hrany obdélníkového průběhu byly pozvolné. Cílem je signál $r(t)$ transformovat do signálu $z(t)$ přibližně lichoběžníkového, což je znázorněno na obr. 3.3.



Obrázek 3.3: Transformace obdélníkového signálu na signál lichoběžníkový

Náběžnou hranu lichoběžníku $z(t)$ lze získat integrací obdélníkového signálu $r(t)$, čímž bychom ovšem získali neklesající funkci. Je třeba, aby platilo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) \quad (3.13)$$

a

$$\int_0^\infty r(t) dt = \int_0^\infty z(t) dt. \quad (3.14)$$

Těmto podmínkám vyhovuje transformace

$$\dot{z}(t) = r(t) - r(t - T_n). \quad (3.15)$$

Pokud bychom splnění podmínek (3.13) a (3.14) chtěli dokázat, je možné to snadno provést rozdělením $z(t)$ a $r(t)$ na intervaly, viz tab. 3.1.

Z posledního řádku tab. 3.1 vyplývá platnost (3.13). Druhou podmíncu (3.14) ověříme

Tabulka 3.1: Rozdělení transformace na intervaly

interval	vztahy
$t = \langle 0, T_0 \rangle$	$r(t) = 0$ $\dot{z}(t) = \frac{1}{T_n} r(t) - \frac{1}{T_n} r(t - T_n)$ $z(t) = z_0 = 0$
$t = (T_0, T_0 + T_n)$	$r(t) = 1$ $\dot{z}(t) = \frac{1}{T_n}$ $z(t) = \frac{1}{T_n} \int d(t - T_0) + z(T_0) = \frac{t - T_0}{T_n}$
$t = (T_0 + T_n, T_1)$	$r(t) = 1$ $\dot{z}(t) = \frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_n} = 0$ $z(t) = z(T_0 + T_n) = \frac{T_0 + T_n - T_0}{T_n} = 1$
$t = (T_1, T_1 + T_n)$	$r(t) = 0$ $\dot{z}(t) = -\frac{1}{T_n}$ $z(t) = -\frac{1}{T_n} \int d(t - T_1) + z(T_1) = 1 - \frac{t - T_1}{T_n}$
$t = (T_1 + T_n, \infty)$	$r(t) = 0$ $\dot{z}(t) = 0$ $z(t) = z(T_1 + T_n) = 1 + \frac{T_1 + T_n - T_1}{T_n} = 0$

integrováním $z(t)$ a $r(t)$ přes jednotlivé intervaly

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r(t) dt &= \int_{T_0}^{T_0+T_n} dt + \int_{T_0+T_n}^{T_1} dt = T_1 - T_0 \\ \int_0^\infty z(t) dt &= \int_{T_0}^{T_0+T_n} \frac{t - T_0}{T_n} dt + \int_{T_0+T_n}^{T_1} dt + \int_{T_1}^{T_1+T_n} \frac{t - T_1}{T_n} dt = T_1 - T_0\end{aligned}$$

Tuto transformaci lze aplikovat na vstupní veličinu modelu $\mathbf{l}(t)$ tak, že platí

$$\mathbf{l}_z(t) = \mathbf{z}(t), \quad (3.16)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \frac{1}{T_n} (\mathbf{l}(t) - \mathbf{l}(t - T_n)), \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{0}, \quad (3.17)$$

přičemž T_n je doba náběhu. Pak lze vztahy (3.9) a (3.10) zapsat následujícím způsobem:

$$\mathbf{s}_l(t) = \mathbf{L} \left[\begin{array}{c} \mathbf{l}_z(t - T_d) \\ \mathbf{l}_z(t) \end{array} \right].$$

Nevýhodou takto definované transformace ovšem je přidání dalšího dopravního zpoždění do modelu.

Aproximace přenosovou funkcí druhého řádu

Další možností je použít pro transformaci vhodný systém druhého řádu s přenosem

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

kde ω_n je přirozená frekvence a ξ je poměrné tlumení nabývající hodnoty mezi 0 a 1. Empirický vzorec pro dobu náběhu t_r systému druhého řádu je

$$t_r \cong \frac{1,8}{\omega_n}.$$

Pro náběh linky za půl hodiny lze tedy zvolit

$$\omega_n = 3,6.$$

Vzhledem k požadavku na nulový překmit musí mít poměrné tlumení ξ hodnotu 1 a přenosová funkce $F(s)$ má po dosazení tvar

$$F(s) = \frac{12,96}{(s + 3,6)^2}.$$

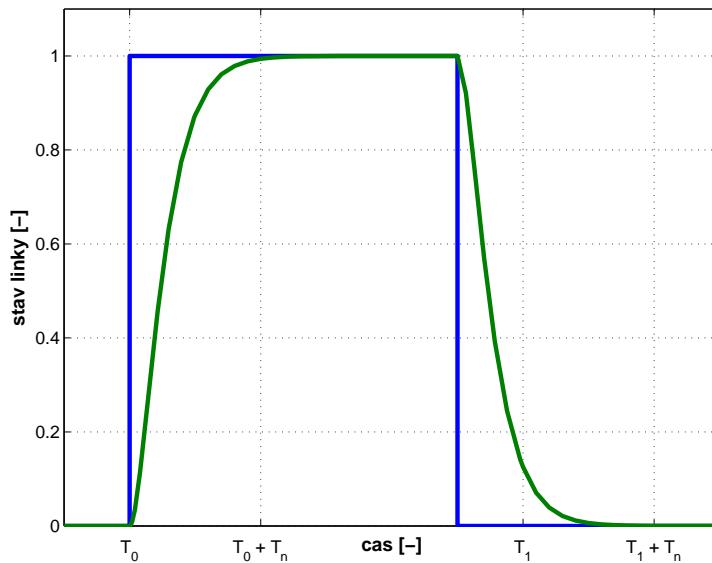
Stavový popis takového systému může být

$$\dot{x}_1(t) = -3,6x_1(t) + x_2(t), \quad (3.18)$$

$$\dot{x}_2(t) = -3,6x_2(t) + 4r(t), \quad (3.19)$$

$$z(t) = 3,24x_1(t). \quad (3.20)$$

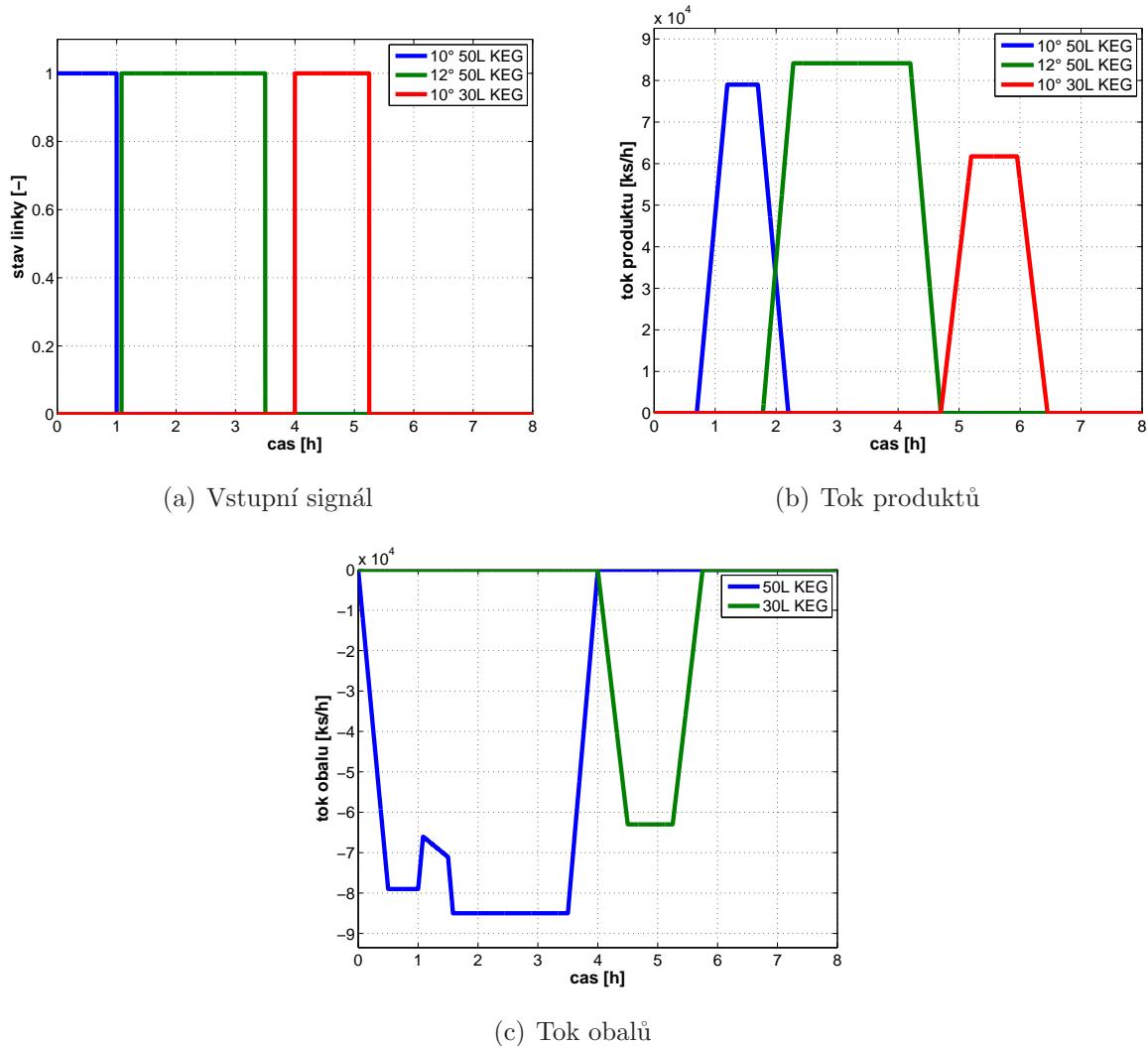
Tímto způsobem transformovaný signál je na obr. 3.4. Je zřejmé, že tvar náběhu a sestupu $z(t)$ odpovídá skutečnosti méně, než v případě transformace lichoběžníkem (3.16). Dalším problémem je, že vhodnou volbou koeficientů (3.18) sice lze simulovat určitou dobu náběhu, ovšem signál $z(t)$ v konečném čase nedosáhne cílové hodnoty 1 při náběhu, ani 0 při sestupu. K témtoto hodnotám se pouze asymptoticky přiblíží v nekonečnu. To by mělo za následek snížení efektivity linky. To by přirozeně šlo korigovat malým navýšením parametru efektivity linky. Velikost této korekce by však musela být zjištěna empiricky.



Obrázek 3.4: Alternativní způsob modelace postupného nájezdu a odstavení linky

Zamezení současné výroby dvou produktů

Transformace popsané v přechozích odstavcích mohou zapříčinit nenulové hodnoty více prvků výstupního vektoru modelu linky současně i při dodržení podmínky zamezející současnou výrobu více produktů (3.3). To nastane v případě, že nájezdová hrana průběhu jednoho výrobku začne v okamžiku, kdy dojezdová hrana jiného výrobku ještě neskončila. Příklad takové situace je na obr. 3.5.



Obrázek 3.5: Příčina vzniku překryvu

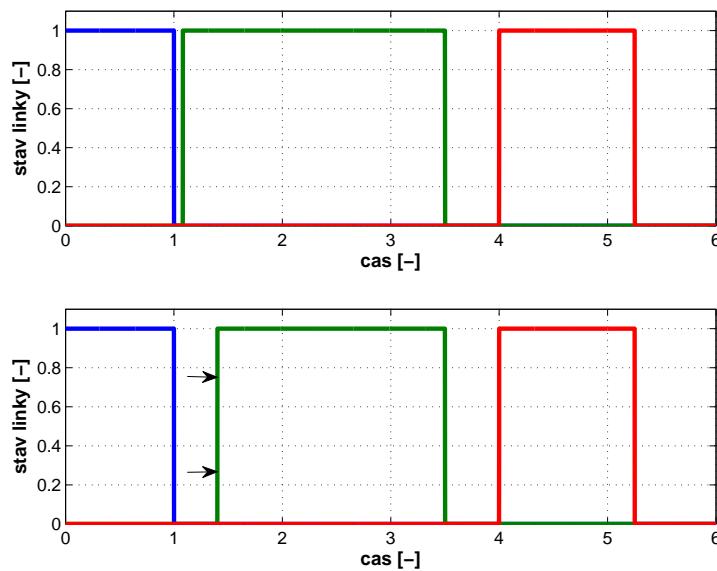
Překryv výroby může být problémem, ale za určitých podmínek jej lze i využít pro simulaci věrohodného chování linky, viz další sekce.

Zamezení překryvu lze docílit další transformací vstupního signálu, která zajistí, že náběh výroby dalšího produktu nastane nejdříve po úplném zastavení produkce předcházející². V reálné situaci by tato transformace odpovídala situaci, kdy obsluha linky pozdrží další zakázku, dokud není dopravní pás zcela vyprázdněn. Přitom se dodrží plánovaný konec stáčení této zakázky, aby nebyly zdržovány další. Dojde tedy ke zkrácení inkriminovaného bloku výroby, pokud je to nutné.

²Ve skutečnosti není třeba zcela zastavit linku, aby bylo možné začít produkovat jiný výrobek. O tomto jevu bude pojednáno dále.

Ilustraci této situace lze vidět na obr. 3.5(a). Podle vstupního signálu mělo být započato stáčení dvanáctistupňového piva v 1 hodinu a 5 minut, zatímco odstavování původní výroby mělo začít přesně v 1 hodinu. To znamená, že pokud odstavování linky trvá 30 minut, pak by 25 minut linka produkovala dva výrobky současně a pokud je dopravní cesta dlouhá 45 minut, pak by 40 minut byly na lince současně výrobky a obaly obou zakázek.

Cílem této transformace vstupního signálu $\mathbf{l}(t)$ je zamezit tomu, aby po výrobě jednoho produktu započala výroba druhého příliš brzy. Jediná možnost, jak toto provést, aniž by hrozila výrazná změna celého plánu, je zkrátit plánovanou dobu následující výroby, viz obr. 3.6.



Obrázek 3.6: Ilustrace transformace vstupního signálu $\mathbf{l}(t)$ pro odstranění překryvu

Slovně lze požadavek na transformaci vyjádřit:

1. Pokud v čase t není produkován žádný výrobek, zůstává průběh $\mathbf{l}(t)$ bez zásahu.
2. Pokud v čase $t - T_d$ nebyl produkován žádný výrobek, zůstává průběh $\mathbf{l}(t)$ bez zásahu.
3. Pokud je v čase t i v čase $t - T_d$ produkován výrobek tentýž, pak zůstává průběh $\mathbf{l}(t)$ bez zásahu.
4. V čase t je produkován výrobek p_i , v čase $t - T_d$ pak výrobek p_j , $i \neq j$. V takovém případě dojde k „pozdržení“ produkce výrobku p_j .

Pozdržení výroby zmíněné ve 4. bodě proběhne nastavením signálu $\mathbf{l}(t)$ na nulový vektor, dokud neuplyne doba T_d od ukončení poslední zakázky. Ve všech ostatních případech zůstane vektor $\mathbf{l}(t)$ beze změn. Této úpravy lze docílit pomocí následující binární operace

$$\alpha(t) \vee \bar{\beta}(t - T_d) \leftrightarrow \gamma(t), \quad (3.21)$$

kde $\alpha(t)$ znací, že v čase t je na lince stejný výrobek jako v čase $t - T_d$ a $\beta(t - T_d)$ má hodnotu 1, pokud v čase $t - T_d$ byl na lince alespoň nějaký výrobek. Hodnoty $\alpha(t)$ a $\beta(t - T_d)$ lze určit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \mathbf{l}^T(t) \mathbf{l}(t - T_d), \\ \beta(t) &= \mathbf{e}_f^T \mathbf{l}(t). \end{aligned}$$

Vektor \mathbf{e}_f má délku m a všechny jeho prvky mají hodnotu 1. Slouží k sečtení prvků vektoru $\mathbf{l}(t)$.

Transformovaný signál $\mathbf{l}_t(t)$ lze odtud vyjádřit

$$\mathbf{l}_t(t) = \gamma(t) \mathbf{l}(t) = [\mathbf{l}^T(t) \mathbf{l}(t - T_d) + (1 - \mathbf{e}_f^T \mathbf{l}(t - T_d))] \mathbf{l}(t). \quad (3.22)$$

Takový způsob úpravy vstupního singálu s sebou přináší do systému značnou nelineariitu. Pokud však konzistence vstupního signálu bude zajištěna jiným způsobem, nebude třeba tuto transformaci provádět. V případě pozorování chování systému je nezbytné, abychom zajistili věrohodné chování modelu. Na druhou stranu optimalizátor bude na základě požadovaných výstupních hodnot určovat optimální vstupní sekvenci a bude přitom možné pomocí vhodně definovaného kritéria optimality zajistit, aby nekonzistentní vstupní signál nebyl optimální. Případně bude možné pomocí vhodně definovaných omezení nekonzistentní vstup zcela vyloučit.

Překryv výroby

V minulých odstavcích byl rozveden způsob, jak upravit vstupní signál, aby se zamezilo výrobě dvou produktů současně. Přestože není fyzicky možné, aby z linky vystupovalo více výrobků v tentýž okamžik, je běžné, že jsou na lince zároveň dvě sady obalů určené k výrobě dvou různých výrobků. Zatímco totiž dobíhá výroba zakázky první, linka se už zaváží obaly určenými pro zakázku následující. Tímto způsobem je díky dlouhým dopravním cestám možné ve výrobě přecházet mezi různými výrobky, aniž by byla mezitím stáčecí aparatura zcela odstavena a tím zvýšit efektivitu linky.

Doba, po kterou je možné, aby na dopravnících linky byly dvě sady obalů je parametrem značeným T_o . Jeho hodnota je přirozeně shora omezena dopravním zpožděním linky, tedy

$$T_o < T_d. \quad (3.23)$$

Parametr T_o lze do modelu zavést mírnou modifikací transformace (3.22), jejíž cílem je právě možnost překryvu eliminovat.

$$\alpha(t) \vee \bar{\beta}(t - T_d + T_o) \leftrightarrow \gamma(t). \quad (3.24)$$

Vztah (3.24) přesně určuje, o kolik poklesne momentální efektivita linky (rychlosť výroby) při přechodu mezi dvěma výrobními zakázkami.

V ideálním případě si lze výrobu s překryvem podle vstupního signálu na obr. 3.7(a) představit jako průběh na obr. 3.7(b). Jeho approximace modelem je na obr. 3.7(c). Zajímají nás především integrály těchto průběhů a jejich srovnání.

Plocha pod průběhy generovanými modelem na obr. 3.7(c) je

$$\int_0^{T_4+T_n} l_{zm} = \int_0^{T_4+T_n} l_{zm_1} + \int_0^{T_4+T_n} l_{zm_2} = T_4 - T_1 - T_d + T_o,$$

neboť podle (3.22) $T_3 = T_2 + T_d - T_o$, přičemž předpokládejme, že $T_3 - T_2 < T_d$. Hodnotu $T_d - T_o$ lze považovat za pokles úhrnu výroby v období T_1 až T_4 v důsledku změny produkovaného výrobku³.

Integrál průběhů na obr. 3.7(b) je

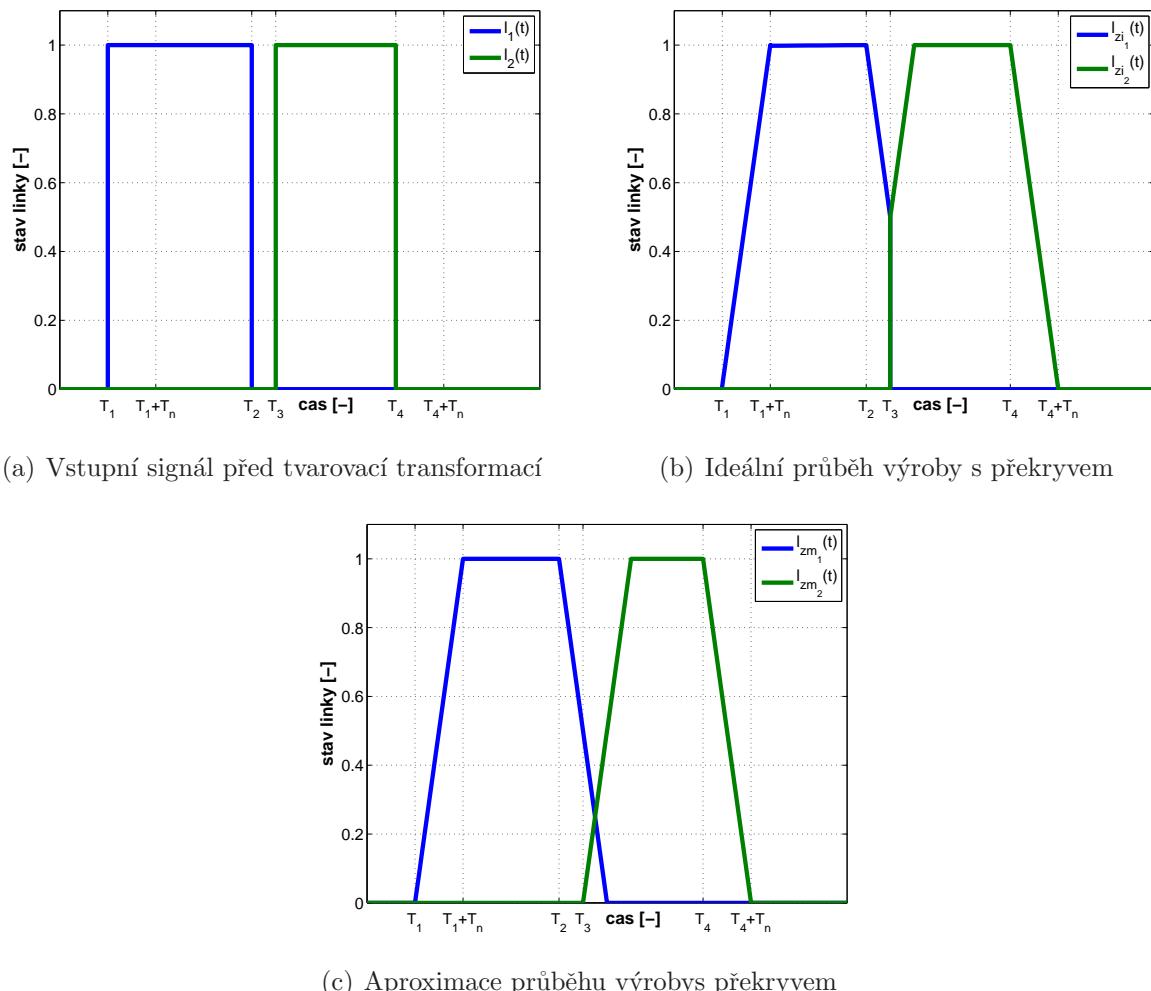
$$\int_0^{T_4+T_n} l_{zi} = \int_0^{T_4+T_n} l_{zi_1} + \int_0^{T_4+T_n} l_{zi_2} = T_4 - T_1 - \frac{(T_d - T_o)^2}{T_n}.$$

Pokles úhrnu výroby se liší od approximace. Je možné však upravit hodnotu parametru modelu T_o tak, aby hodnota poklesu úhrnu výroby odpovídala poklesu podle ideálního průběhu na obr. 3.7(b) s překryvem T'_o :

$$T'_o = T_d - \frac{(T_d - T_o)^2}{T_n}.$$

Zároveň se liší hodnoty integrálů průběhů l_{zi_1} a l_{zm_1} stejně jako l_{zi_2} a l_{zm_2} . Nejedná se však o chyby závisející na délce bloku produkce, ale o chyby paušálního charakteru. V případě více bloků výroby v řadě se chyby navzájem téměř vyruší.

³za předpokladu, že uvažujeme u obou výrobků jednotkovou maximální efektivní kapacitu linky

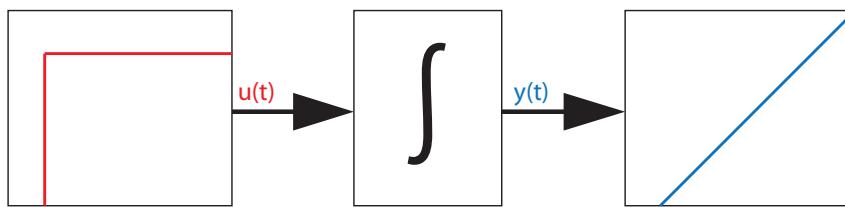


Obrázek 3.7: Srovnání ideálního průběhu výroby při překryvu s modelem.

3.3 Distribuční centrum a sklad

Ve spojení se skladováním používáme dva pojmy - distribuční centrum (DC) a sklad. Rozdíl je v účelu zařízení a jeho velikosti, pro obě ale postačí tentýž model, rozdíl je pouze v hodnotách parametrů. Z hlediska modelování je struktura systému skladu velice jednoduchá, jedná se o integrátor, jehož funkce je znázorněna na obr. 3.8. Výstupní veličina je integrálem vstupní, tedy platí

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t) dt \Rightarrow \dot{y}(t) = x(t), \quad x(0) = x_0.$$



Obrázek 3.8: Schéma integrátoru

3.3.1 Vstupní a výstupní veličiny modelu skladu

Na vstupu skladu jsou následující veličiny:

- tok produktů a obalů z výrobních linek v $\frac{\text{ks}}{\text{h}}$ (jen u skladů přidružených k lince, u ostatních nulový),
- tok produktů a obalů z transportu $\frac{\text{ks}}{\text{h}}$.

Na výstupu pak:

- uskladněné množství v kusech po jednotlivých produktech a obalech,
- uskladněné množství v paletových místech PALP po jednotlivých produktech a obalech,
- uskladněné množství v paletových místech PALP celkem,
- uskladněné množství v paletových místech % ku kapacitě.

Tok obalů a produktů z výrobních linek

U jednoho skladu může být linek více (ve skutečnosti tomu tak opravdu je). Příspěvky toků od každé linky se pak sčítají do celkového vektoru $\mathbf{s}_l(t)$ definovaného

$$\mathbf{s}_l(t) = \sum_{i=1}^p \mathbf{s}_{l_i}(t),$$

kde p je počet linek u daného skladu a $\mathbf{s}_{l_i}(t)$ je tok produktů a obalů z dané linky podle (3.11).

Tok produktů a obalů z transportu

Sklad je obvykle napojen na celou distribuční síť, vede do něj a z něj tedy mnoho tras. Příspěvky transportů po všech trasách je nutno sečíst shodným způsobem jako v případě příspěvků z linky

$$\mathbf{t}(t) = \sum_{i=1}^{r_U} \mathbf{t}_{U_i}(t) - \sum_{i=1}^{r_L} \mathbf{t}_{L_i}(t),$$

kde $\mathbf{t}(t)$ je celkový příspěvek všech transportů, r_U je počet tras vedoucích do příslušného skladu, r_L počet tras vedoucí ze skladu (obvykle $r_U = r_L$), \mathbf{t}_{U_i} a \mathbf{t}_{L_i} jsou příspěvky tras vedoucích do skladu a ze skladu respektive.

Uskladněné množství

Všechny části modelu interně pracují s jednotkou ks. Uskladněné množství v příslušném skladě je značeno $\mathbf{s}(t)$ a je definováno

$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_m(t) \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

kde $s_i(t)$ značí množství produktu nebo obalu s indexem i na skladě. Pro přepočet této veličiny do jednotky PALP je třeba vektor $\mathbf{s}(t)$ přenásobit vhodnou transformační maticí

$$\mathbf{s}_{PALP}(t) = \mathbf{T}_{PALP}\mathbf{s}(t).$$

Matrice \mathbf{T}_{PALP} je podrobněji rozebrána níže. Skalární veličinu celkového zaplnění skladu $s_{\text{PALPc}}(t)$ získáme prostým sečtením prvků vektoru $\mathbf{s}_{\text{PALP}}(t)$, tedy

$$s_{\text{PALPc}}(t) = \mathbf{e}_f \mathbf{s}_{\text{PALP}}(t),$$

přičemž \mathbf{e}_f je jednotkový řádkový vektor $[1 \ 1 \ \dots \ 1]$. Procentuální zaplnění skladu $s_r(t)$ se pak určí porovnáním s kapacitou skladu \mathbf{C}_s (parametr popsaný níže).

3.3.2 Parametry

Parametry modelu skladu jsou

- kapacita skladu,
- transformační matice $ks \rightarrow \text{PALP}$.

Transformační matice

Jak už bylo uvedeno, různé výrobky a obaly zabírají na jeden ks rozdílný prostor ve skladu. Je tedy třeba provést přepočet z jednotky jednoho kusu na paletové místo. K tomuto účelu slouží transformační matice

$$\mathbf{T}_{\text{PALP}} = \begin{bmatrix} t_{\text{PALP}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_{\text{PALP}_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & t_{\text{PALP}_m} \end{bmatrix},$$

hodnota t_{PALP_i} určuje kolik paletových míst zabírá jeden kus výrobku nebo obalu (nebo spíše jakou část paletového místa zabírá).

Kapacita skladu

Základní jednotkou skladování je paletové místo. Proto i kapacita každého skladu je udána v této jednotce. Kapacita skladu je značena C_s .

3.3.3 Další vztahy

Stavová rovnice pro jeden sklad s přilehlou linkou je

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{s}_l(t) + \mathbf{t}(t), \quad \mathbf{s}(0) = \mathbf{s}_0, \quad (3.26)$$

kde $\mathbf{s}_l(t)$ a $\mathbf{t}(t)$ jsou vstupní veličiny definované výše a \mathbf{s}_0 je počáteční stav na příslušném skladě.

3.4 Transport

Principem transportu je naložení objektů a po určitém čase potřebném na dopravu vyložení na jiném místě. Tomu odpovídá jednotkový přenos s dopravním spožděním. V distribuční síti exsituje mnoho tras, v této sekci bude popsána trasa jedna.

3.4.1 Vstupní a výstupní veličiny modelu transportu

Intuitivně lze určit, že vstupní veličinou do transportu je vektor nakládaných objektů (výrobků a obalů) a výstupní veličinou pak vektor vykládaných objektů. Tyto veličiny jsou v modelu definovány obdobně.

Vstupní veličinou je

- vektor toku transportovaných objektů

a výstupními veličinami jsou

- vektor toku nakládaných objektů,
- vektor toku vykládaných objektů.

Vektor toku transportovaných objektů

Hodnota každého prvku z vektoru toku transportovaných objektů $\mathbf{t}(t)$ udává, kolik kusů tohoto výrobku nebo obalu za čas T_1 je transportováno v čase t . Hodnota T_1 odpovídá

době nakládky (popsáno níže), vektor $\mathbf{t}(t)$ má tedy tvar

$$\mathbf{t}(t) = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{m_p} \\ t_{m_p+1} \\ t_{m_p+2} \\ \vdots \\ t_{m_p+m_c} \end{bmatrix} = \frac{1}{T_l} \begin{bmatrix} t_{a_1} \\ t_{a_2} \\ \vdots \\ t_{a_{(m_p+m_c)}} \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

kde t_{a_i} je množství produktu nebo obalu s indexem i naloženého na nákladní vůz. Je zřejmé, že, aby bylo naskladněno opravdu množství t_{a_i} , musí délka obdélníku příslušející jednomu transportu být právě T_l . Pokud by probíhalo ve stejně době více transportů, tak se průběhy t_i jednoduše sečtou.

Vektor toku nakládaných objektů

Vektor toku nakládání $\mathbf{t}_L(t)$ je simultání s vektorem toku transportovaných objektů (3.27), jenom z formálních důvodů je zaveden vztah

$$\mathbf{t}_L(t) = \mathbf{t}(t).$$

Vektor toku vykládaných objektů

Vykládání je časově opožděno za nakládáním o čas T_{td} , který je dán časovou vzdáleností skladů na příslušné trase. Pro vektor toku vykládaných objektů $\mathbf{t}_U(t)$ tedy platí

$$\mathbf{t}_U(t) = \mathbf{t}(t - T_{td}).$$

3.4.2 Parametry

Parametry modelu transportu jsou

- vzdálenosti mezi sklady,
- doba nakládky.

Vzdálenosti skladů

Matice \mathbf{D} definuje hodinovou vzdálenost jednotlivých skladů od sebe a má tvar

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ d_{n1} & & & d_{nn} \end{bmatrix},$$

kde n je počet skladů a prvek d_{ij} určuje vzdálenost skladu s indexem j od skladu s indexem i .

Doba nakládky

Naložení kamionu neproběhne okamžitě, ale trvá několik desítek minut, během kterých postupně ubývá objektů ze skladu. Stejně je definováno vyložení nákladního vozu. Přestože nelze předpokládat, že každý kamion bude naložen (vyložen) stejně rychle, ať už z technických či personálních důvodů, model počítá s jedinou hodnotou. Přirozeně naložení poloprázdného kamionu trvá kratší dobu, než naložení plně. Protože však snahou je využívat kamiony vždy nejfektivněji, není třeba počítat s částečným naložením. Doba nakládky je značena T_n .

3.4.3 Shrnutí

Model transportu nemá žádné stavové veličiny. Výstupní veličiny jsou přímo dány vstupní veličinou. Rovnice modelu určené v textu výše jsou tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_L(t) &= \mathbf{t}(t), \\ \mathbf{t}_U(t) &= \mathbf{t}(t - T_{td}). \end{aligned} \tag{3.28}$$

3.5 Celkový model

V předchozích sekcích byly popsány modely jednotlivých prvků logistiky Pivovarů Staropramen, a. s. V této sekci budou tyto modely použity k tvorbě celkového modelu logistického procesu, který bude obsahovat n skladů, p linek a n_t tras.

3.5.1 Veličiny celkového modelu

Model každého prvku je popsán pomocí vektorů obsahujících veličiny příslušné jednotlivým produktům a obalům. Protože celkový model bude jistě obsahovat více skladů, tras a linek, je třeba jím příslušné vektorové veličiny vhodně usporádat. Z hlediska přehlednosti je nejvhodnější maticový popis obsahující

- matici skladování,
- matici výroby,
- matici transportu,
- matici příslušnosti linek,
- matici směrování.

Matice skladování

Popisuje okamžité množství kusů výrobků a obalů na skladech. Její tvar je

$$\mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T(t) \\ \mathbf{s}_2^T(t) \\ \vdots \\ \mathbf{s}_n^T(t) \end{bmatrix},$$

kde n je počet skladů a $\mathbf{s}_i(t)$ je vektor zaplnění skladu i podle (3.25).

Matice výroby

Obdobně jako matice skladování se matice výroby $\mathbf{L}(t)$ skládá z řádků tvořených transponovanými toky výrobků a obalů z jednotlivých linek podle (3.4)

$$\mathbf{L}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{l_1}^T(t) \\ \mathbf{s}_{l_2}^T(t) \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{l_p}^T(t) \end{bmatrix}.$$

Hodnota p udává počet výrobních linek.

Matice transportu

Jedná se o dvě matice odvozené z vektorů transportu $\mathbf{t}_L(t)$ a $\mathbf{t}_U(t)$ stejným způsobem jako matice skladování a transportu, tedy

$$\mathbf{T}_L(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{L1}^T(t) \\ \mathbf{t}_{L2}^T(t) \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{Ln_t}^T(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_U(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{U1}^T(t) \\ \mathbf{t}_{U2}^T(t) \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{Un_t}^T(t) \end{bmatrix},$$

kde n_t je počet tras.

Matice $\mathbf{S}(t)$, $\mathbf{L}(t)$, $\mathbf{T}_L(t)$ a $\mathbf{T}_U(t)$ mají shodně počet sloupců rovný počtu produktů a obalů m .

Matice příslušnosti linek

K přiřazení linek a jejich produkci jednotlivým skladům slouží matice \mathbf{P} ve tvaru

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1p} \\ p_{21} & p_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ p_{n1} & & & p_{np} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Prvek p_{ij} určuje zda linka j přísluší skladu i . Platí

$$p_{ij} = \{0; 1\}.$$

Také je zřejmé, že v každém sloupci by se měla vyskytovat pouze jediná nenulová hodnota, jinak by jedna linka příslušela více skladům, tedy

$$\sum_i p_{ij} \leq 1.$$

Matice směrování

K určení odkud kam vedou jednotlivé trasy slouží matice směrování \mathbf{R} ve tvaru

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n_t} \\ r_{21} & r_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ r_{n1} & & & r_{nn_t} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

a platí

$$r_{ij} = \{-1; 0; 1\},$$

přičemž hodnota -1 značí, že ze skladu i vede trasa j a hodnota 1 znamená, že ve skladu i trasa j končí. Je přirozené, že platí

$$\sum_i r_{ij} = 0,$$

neboť každá trasa má jeden začátek a jeden cíl. Pro potřeby modelu je nutné definovat matici \mathbf{R}_L , která je tvořena pouze nekladnými prvky matice \mathbf{R} (ostatní jsou nulové) a \mathbf{R}_U obsahující pouze nezáporné prvky matice \mathbf{R} . Platí tedy

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_L + \mathbf{R}_U.$$

Matice \mathbf{P} a \mathbf{R} mají shodně počet řádků rovný počtu skladů n .

3.5.2 Shrnutí

Vztah určující chování celkového modelu má tvar

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{PL}(t) + \mathbf{R}_L \mathbf{T}_L(t) + \mathbf{R}_U \mathbf{T}_U(t). \quad (3.31)$$

3.6 Verifikace modelu

V této sekci bude provedeno ověření modelu za pomocí skutečných historických dat. Protože veškerá konkrétní čísla týkající se provozu logistiky Pivovarů Staropramen, a. s., jsou považována za citlivé informace, bude v této práci dán přednost procentuálnímu vyjádření odchylek, případně budou data vhodným způsobem⁴ pozměněna.

Protože monitorovací nástroje používané zadavatelem neumožňují export dat vhodných pro verifikaci modelu, bylo nutné hodnoty opisovat ručně. Z toho důvodu je dat bohužel velice omezené množství - postihují jeden výrobní týden. Jedná se pouze o historii provozu výrobní linky. K verifikaci modelů skladů a transportů data nejsou k dispozici, avšak vzhledem k povaze těchto systémů není verifikace nutná⁵.

3.6.1 Verifikace modelu stáčecí linky

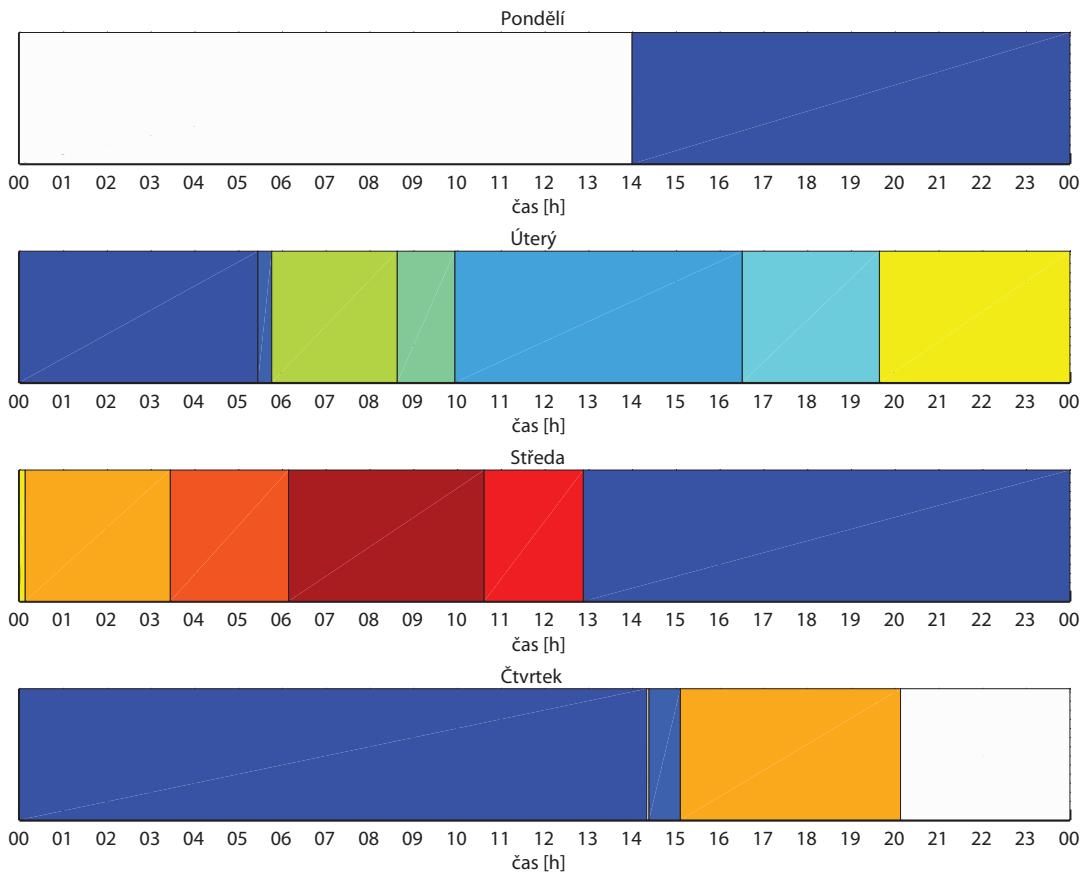
K dispozici jsou data obsahující průběh týdenní produkce kegové linky. Zahrnují následující informace:

- časové intervaly stáčení určitých výrobků,
- nájezd a dojezd linky,
- plánované odstávky (sanitace),
- okamžiky změn výrobků a obalů na lince,
- celkově stočené množství od každého výrobku za den,
- okamžiky neplánovaných odstávek a poruch linky.

Data mohou být vyjádřena ve formě Ganttova diagramu na obr. 3.9, kde každá barva představuje odlišný stáčený produkt (případně sanitaci). Jména produktů nejsou uvedena, protože průběh stáčení spadá mezi citlivé informace. Stejným způsobem budou v další kapitole zobrazeny plány stáčení při testování optimalizátoru.

⁴Úprava nesmí mít vliv na chování systému, tj. násobení konstantou, odečetní konstanty apod.

⁵Jedná se o integrátor v případě skladu a zpožďovací linku v případě transportu, systémy jsou tedy takřka triviální.



Obrázek 3.9: Ganttské diagramy pro čtyřdenní období

První informací, kterou lze z dat získat je efektivita linky

$$e = \frac{t_{ON} - t_F}{t_{ON}} \cdot 100,$$

kde e je efektivita linky v procentech vůči maximální, t_{ON} je doba chodu linky a t_F součet dob, po kterých byla linka v poruše za sledovaný časový interval.

Obdobným způsobem lze snadno určit nominální a efektivní kapacitu linky:

$$c_{ef} = \frac{n_p}{t_p}, \quad c_{nom} = 100 \cdot \frac{c_{ef}}{e},$$

přičemž c_{ef} je efektivní kapacita linky v $\frac{\text{ks}}{\text{h}}$, n_p je počet stočených kusů výrobků za čas t_p a c_{nom} je nominální kapacita linky.

Po nastavení modelu podle získaných hodnot je možné určit

- odchylku sumy produkce jednotlivých výrobků zvlášť za sledované období,

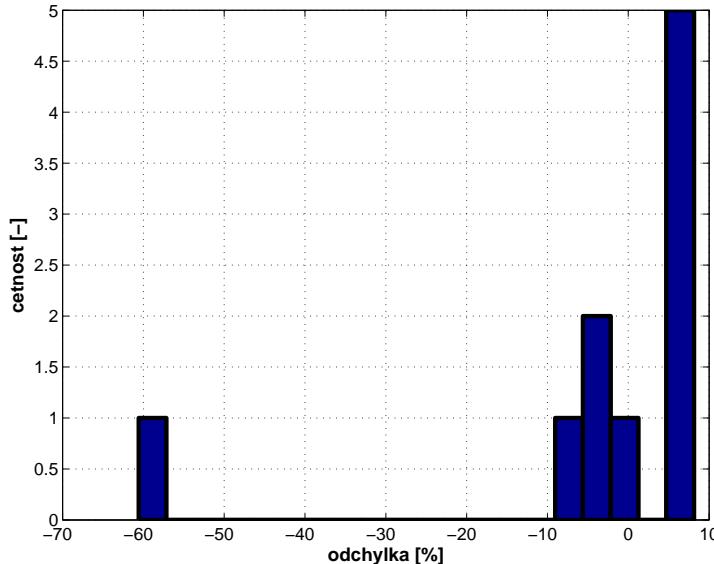
2. odchylku sumy veškeré produkce za sledované období.

Odchylka sumy veškeré produkce má hodnotu

$$d_f = \frac{\sum_{n_b}^i r_i^D t_i^D - \sum_{n_b}^i r_i^M t_i^M}{\sum_{n_b}^i r_i^D t_i^D} = 1\%, \quad (3.32)$$

kde n_b je počet výrobních bloků (řádků tab. 3.2), r_i^D a r_i^M značí rychlosť produkcie (efektívnu kapacitu) ve výrobním bloku i historických dat a modelu respektívne, t_i^D a t_i^M značí dĺžku výrobného bloku i z historických dat a modelu respektívne.

Odchylka sumy produkcie u jednotlivých výrobkov lze nejlépe zobrazit pomocí histogramu na obr. 3.10.



Obrázek 3.10: Histogram odchylky modelu od reality pro jednotlivé výrobky

3.6.2 Vyhodnocení verifikace

Pro dôkladnou verifikaci by bolo potreba mnohem viac dat, avšak už z tohto vzorku je zrejmé, že efektivita linky v prubehu týdne značne kolísá a to až o desítky percent. Je možné, že väčší soubor dat by toto zjištění pouze podporil. Jedným z dôvodov udržovania vysoké hladiny zásob na skladech je právě možnosť, že požadované množstvá nebude na distribuční centrum dodané včas. To môže nastat z mnoha príčin, mezi ktoré patrí i porucha

Tabulka 3.2: Historie provozu linky

den	začátek	konec	ič. ^a	produkce [ks/h]	odch. ^b [%]
po.	14:01	23:59	1	220	-17
út.	0:00	5:27	1	299	12
út.	5:28	5:46	2	100	-62
út.	5:47	8:38	6	260	-2
út.	8:39	9:57	5	306	15
út.	9:58	16:31	3	302	13
út.	16:32	19:39	4	300	12
út.	19:40	23:59	7	300	12
st.	0:00	0:08	7	302	13
st.	0:09	3:27	8	278	4
st.	3:28	6:09	9	300	12
st.	10:38	12:53	10	282	6
st.	12:54	23:59	1	260	-3
čt.	0:00	14:20	1	289	8
čt.	14:21	15:06	2	209	-21
čt.	15:07	20:08	8	259	-2

^aIdentifikační číslo produktu^bOdchylka od průměrné hodnoty produkce v procentech

linky. Protože poruchy lze approximovat pouze pravděpodobnostně, je nutné se spokojit s prostou průměrnou hodnotou efektivity linky.

Nízká odchylka sumy veškeré produkce (3.32) je nevyhnutelným důsledkem výpočtu efektivní kapacity z dat, pomocí kterých je model verifikován. Teoreticky by měla být nulová, její procentní hodnota plyne spíše z numerické nepřesnosti výpočtů. Odchylky jednotlivých produktů až na jedinou výjimku nepřekročí 10%. Přestože se tento výsledek nedá považovat za vynikající, dá se předpokládat, že na větším datovém souboru by se podařilo dosáhnout odchylky do určité míry nižší. Zaznamenaná odchylka kolem 60% lze přisoudit spíše chybě v záznamu. Odpovídá třetímu řádku hodnot tab. 3.2, kde se vyskytuje nezvykle krátký výrobní blok. U delších bloků jsou odchylky výrazně nižší.

Kapitola 4

Optimalizátor

V následujícím textu bude navržen způsob tvorby nástroje optimalizujícího plánování logistických procesů Pivovarů Staropramen, a. s. K tomuto účelu bude využit model uvedený v předchozí kapitole. Zásadní úlohou předcházející samotné optimalizaci je navržení kritérií optimality – tedy, zjednodušeně řečeno, určení co je optimální a co nikoliv. Tímto problémem se bude zabývat kap. 4.1.2.

V dalších sekcích budou navrženy metody optimalizace a poté posouzeny z hlediska vhodnosti k řešení tohoto problému. Nakonec budou výsledky plánování vyhodnoceny v kap. 4.6. K vysvětlení základních principů a pojmu řízení a optimalizace byla věnována kap. 2.2.

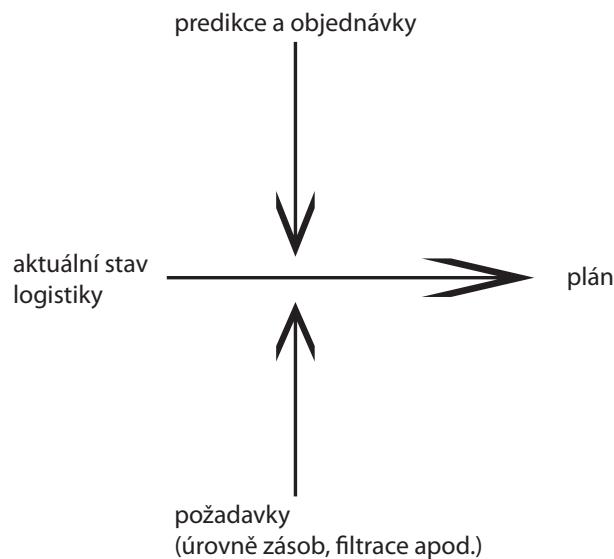
4.1 Cíl optimalizace

V této sekci bude vysvětlen problém plánování logistiky Pivovarů Staropramen, a. s. Budou uvedena kritéria hodnocení optimality plánu a představeny informační zdroje plánování.

Základním problémem současného plánovacího procesu je decentralizovanost mezi různá oddělení (stáčení, vaření, transport apod.). Rozdělení zodpovědnosti je přirozené vzhledem k rozsahu problému, celkové optimálnosti logistiky to ovšem neprospívá. Cílem této práce je navrhnut optimalizátor, který by slučoval plánování alespoň několika klíčových prvků logistiky současně (stáčení, skladování, transport).

4.1.1 Proces plánování

Plánování lze zjednodušeně popsat pomocí schématu na obr. 4.1. Data potřebná k vý-



Obrázek 4.1: Schéma plánování

tvoření plánu jsou

1. počáteční stav logistiky,
 - zásoby produktů na skladech,
 - množství dostupných obalů,
2. vstupní data,
 - predikce prodeje,
 - zadané objednávky,
3. požadavky a omezení,
 - přímé nakládky,
 - ideální hladina zásob,
 - filtrace piva,
 - požadavky technického rázu,
 - kapacity skladů.

Počáteční stav logistiky Plánuje se vždy na několik dnů dopředu. Počáteční stav logistiky představuje data obsahující aktuální skladové zásoby produktů a obalů v jednotlivých distribučních centrech. Především v sezóně je jedním z nejvíce omezujících faktorů množství obalů k dispozici pro stáčení. Může se proto stát, že přestože by bylo efektivnější stáčet výrobek v jednom bloku, musí se výroba rozdělit do několika dní, aby se linka stačila zavést příslušnými obaly. Zákazníci si často obaly drží delší dobu, což může způsobit nedostatek pro potřeby stáčení. Vracení obalů je predikováno a nelze příliš ovlivnit. Je tedy třeba se spoléhat na predikci a zásoby. V případě nedostatku lze provést revizi plánu.

Predikce prodeje Základem pro tvorbu predikce jsou historická data, ale zohledňují se i poměrně aktuální faktory, jako jsou například plánovaná zdražení (zákazníci nakupují dopředu zásoby před nárůstem ceny) apod. Předpověď je výstupem softwarového nástroje a je zatížena určitou nepřesností. Nejistota předpovědi je snižována skutečně přijatými objednávkami (pokud je objednávka přijata s dostatečným předstihem).

Zadané objednávky Objednávky mohou, ale nemusí, být přijaty s předstihem. V případě, že nejsou, je požadavek vykryt zásobou.

Přímé nakládky Z hlediska minimalizace vícenákladů za dopravu je optimální odvážet od linky zboží přímo na distribuční centrum, kterému je určeno. Jinak by se musely výrobky nejprve převézt do jednoho z primárních distribučních center v blízkosti linky a poté teprve odeslat na místo určení. Tento problém je podpořen decentralizací plánovacího procesu a zásadním omezením je malá kapacita skladu u linky.

Ideální hladina zásob Aby bylo možné vykryt nepřesnosti předpovědi prodeje, je třeba udržovat určitou rezervu zboží. Velikost zásob kolísá jak v důsledku jejich využívání, tak v důsledku plánování zásob, při kterém jsou zohledněny dopady hromadění kapitálu na ukazatele hospodařené společnosti. Udržují se zásoby jak hotových výrobků, tak prázdných obalů, přičemž nastavení profilu hladiny zásob se liší mezi druhy produktů a obalů i mezi distribučními centry.

Požadavky technického rázu Existují speciální požadavky na plán – např. určitým výrobkem se nesmí začínat ani končit blok výroby, nebo umístění sanitace linky.

Filtrace piva Je potřeba také zohlednit proces filtrace piva, kdy je nutné koordinovat stáčení mezi linkami z důvodu omezených filtračních kapacit.

4.1.2 Kritérium optimality řízení

Kritérium optimality řízení, neboli také účelová funkce, popisuje, jak vyhodnotit kvalitu řízení nebo, v našem případě, plánu logistiky. V této sekci bude slovně popsáno, jakým způsobem je možné posuzovat optimalitu navrženého plánu. Jedná se o plánování logistických procesů komerčního podniku za účelem minimalizace nákladů¹, přičemž každá úloha, provedená na cestě od prázdného obalu ležícího ve skladu až k dodání hotového produktu zákazníkovi, něco stojí. Někdy lze peněžní hodnotu úkonů určit poměrně snadno, jindy pouze odhadovat. Kvalita optimalizace je přitom ve stejné míře závislá na přesnosti nastavení cen jako na přesnosti modelu. Je tedy třeba věnovat tomuto problému zvýšenou pozornost a intenzivní spolupráci se zadavatelem.

Hodnocení kvality stáčení

Provoz linky je pravděpodobně nejdražším procesem logistiky. To, co nařizují objednávky a predikce, se ale stočit musí – otázkou zůstává kdy. Plán se tvoří na jeden týden a může se stát, že některé požadavky bude levnější pokrýt ze zásob a nechat stočení až na další týden. Při stáčení lze hodnotit

- celkovou dobu stáčení,
- počet nájezdů (a výjezdů) linky,
- počet změn v produkci lince (přestavění na jiné výrobky).

Hodnocení kvality skladování

Nepřímo úměrně kapacitě skladu lze hodnotit cenu za uskladněné množství. Oproti tomu však je dáno, jaké množství má být na skladě jako rezervní zásoba. Co tedy hodnotit? Odchylku od požadované hladiny zásoby nebo absolutní množství na skladě? Obojí, neboť

¹Častou úlohou v této třídě problémů bývá maximalizace zisku. Rozsah modelu však neumožňuje nijak ovlivnit zisk, neboť ten je jasně daný z predikcí a objednávek, které jsou vstupem modelu.

u některých skladů je cílem mít okamžité zaplnění co nejmenší (ideálně nulové), například u linek, kde jsou skladы velice malé.

V distribučních centrech však je třeba uvažovat odchylku od požadovaných rezerv. Absolutní hodnoty těchto rezerv se však produkt od produktu liší i řádově a pokud by byla odchylka hodnocena za jednotku, pak by byla jasně preferována minimalizace odchylky od požadované hladiny zásob produktu s největšími objemy. Je proto třeba uvažovat odchylky relativní. U skladů s nulovou cílovou rezervou však relativní odchylka určit nelze (dělení nulou). Je proto nutné hodnotit následující stavy:

- relativní odchylka od požadované hladiny zásob,
- absolutní hodnota uskladněného množství u skladů (případně produktů) s nulovou požadovanou rezervou.

Hodnocení kvality transportu

Transportní společnosti se platí za kilometr, je proto nutné hodnotit každou trasu zvláště. Stejně tak možné naplnění transportu na různých trasách se může měnit (například limity na váhu vozu v Praze). Každý transport má tak svou hodnotu a celkové náklady jsou dány jejich počtem. Dalším kritériem hodnocení kvality transportu je míra využití nákladového vozu, kdy s každým nezaplněným místem vznikají ztráty dané skutečnosti, že se platí za celý vůz.

Shrnutí kritérií

Je opět třeba zdůraznit, jaký vliv mají hodnoty ocenění na výsledný plán. Pokud například bude cena odchylky uskladněného množství určitého výrobku od požadované hladiny zásob příliš nízká oproti ceně za výrobu, pak bude vždy výhodnější nechat produkci na další týden (dokud nedojde k vyčerpání zásob). Oproti tomu, pokud bude cena za odchylku příliš vysoká, pak se bude optimalizátor snažit dorovnat hodnotu na požadovanou úroveň za každou cenu a to i za cenu časté změny produkce na lince.

Některé z vypsaných kritérií mohou být do určité míry nadbytečné. Příkladem může být celková doba stáčení, která jasně plyne z množství, které je nutné stočit. Je sice možné odložit stáčení na další týden, ale pokud by to bylo výhodné z hlediska doby stáčení, pak by tato operace naopak zvýšila dobu stáčení dalšího týdne a v delším horizontu by

nedošlo k úspoře. Lze také polemizovat, zda je nutné hodnotit využití nákladového prostoru automobilů. Protože je zároveň minimalizováno množství provedených transportů, je zřejmé, že už to samotné nutí optimalizátor plnit nákladní vozy co nejvíce.

4.1.3 Přínosy optimalizátoru

Potřeba komplexního optimalizačního plánovacího nástroje je dána především rozsahem problému, který je v podstatě nemožné plně pojmut bez softwarového vybavení. Přestože nástroje pro určité části plánovacího procesu existují, jsou z hlediska pokrytí problému lokálního charakteru. Cílem této práce je navrhnout optimalizátor pokrývající co největší část logistiky (s možností dalšího rozšíření) a pracující jako návodní systém pro plánovače. Není přirozeně možné očekávat, že plánování by se rázem zcela automatizovalo, vždy bude potřeba kvalifikovaný pracovník schopný vhodně přizpůsobit vstup optimalizátoru aktuálnímu stavu a vybrat jeden z možných plánů a ten v případě potřeby dopravit. Výhodou bude eliminace či redukce zbytečných úkonů spojených s plánováním (jako je ruční vyhodnocení skladových zásob, tvorba tabulek, koordinace s ostatními odděleními apod.) a především již několikrát zmíněná větší centralizace procesu a s tím související možnost dosažení výhodnějšího plánu z ekonomického hlediska pramenící z

- nižšího počtu transportů,
- možnosti preferovat transporty v době mimo špičku (důležité zejména v Praze),
- snížení objemu kapitálu drženém ve formě uskladněných výrobků,
- potřeby menších skladovacích prostor,
- efektivnější využití pracovní doby zaměstnanci,
- pohotovější tvorby revizí plánu v případě potřeby.

Především z důvodu omezení mohutnosti dopravy lze očekávat i tyto pozitivní efekty:

- odlehčení životnímu prostředí,
- zlepšení dopravní situace v Praze (a jiných velkých městech).

4.2 Metody optimálního řízení

Cílem této práce je optimální řízení logistiky, s pouhým řízením se nelze spokojit. Množina použitelných metod se omezuje na ty umožňující shrnout požadavky na řízení do kritéria kvality řízení. Dalším požadavkem na algoritmus je dle definice výrobního vektoru (3.2) v kap. 3.2 podpora nespojitých proměnných.

Některé metody optimálního řízení lze aplikovat pouze na statické systémy - tedy takové, u nichž se nevyskytuje čas jako nezávislá proměnná [4]. Dynamické systémy lze do formy řešitelné statickými optimalizačními metodami převést diskretizací.

4.2.1 Přesné metody

Přesnými metodami rozumíme takové algoritmy a výpočty, jejichž výsledkem je optimální řešení, pokud existuje. Problémem těchto metod často bývá časová náročnost a přestože doba výpočtu je konečná, může být extrémně dlouhá.

Výčtové metody

Nejjednodušší metodou je hledání optima ve výčtu všech přípustných řešení a prosté vybrání toho s nejnižší (nejvyšší) hodnotou kriteriální funkce. Počet řešení je konečný, ale extrémě vysoký. Proto je tato metoda vhodná pouze pro malé problémy s omezeným počtem diskrétních proměnných.

Ke každé kombinaci celočíselných proměnných se vyřeší úloha obsahující již jen spojité proměnné například pomocí simplexové metody [5].

Matematické programování

Metody hledání extrémů funkcí více proměnných, které podléhají různým omezením, nazýváme matematickým programováním a mají tvar [6]

$$\begin{aligned} & \text{minimalizuj } f_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \subset \mathbf{R}^n \\ & \text{za omezení } f_i(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}_i, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde \mathbf{x} je vektor optimalizačních proměnných o délce n , f_0 je kriteriální funkce a f_i jsou omezující podmínky.

Pokud jsou omezující podmínky i kritérium lineární, tedy pro f_0, \dots, f_m platí

$$f_i(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f_i(\mathbf{x}) + \beta f_i(\mathbf{y}),$$

pak je tento optimalizační problém nazýván **lineárním programováním**. V případě kvadratické kriteriální funkce v podobě

$$f_0 = \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{f}^T \mathbf{x} + c \quad (4.2)$$

nazýváme problém **kvadratickým programováním**. Třída úloh pro jejíž kriteriální funkci a omezující podmínky platí nerovnost

$$f_i(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \leq \alpha f_i(\mathbf{x}) + \beta f_i(\mathbf{y}) \quad (4.3)$$

se nazývá **konvexní programování**. Je zřejmé, že třída úloh kvadratického programování je podmnožinou třídy konvexního programování a lineární programování zase speciálním případem kvadratického programování (pro $\mathbf{H} = 0$).

Existuje velké množství metod pro výpočet různých tříd matematického programování. Velice efektivně lze řešit problémy lineárního a kvadratického programování pomocí metod schopných pracovat v polynomiálním čase. Pokud ovšem všechny proměnné nejsou spojité, pak se problém stává NP-těžkým - není znám polynomiální algoritmus [5] - a je třeba při výpočtu kombinovat několik metod (například simplexovou metodu a metodu větví a mezi). V následujících odstavcích budou některé základní metody stručně popsány.

Dantzigova simplexová metoda Tato metoda je schopná velice rychle řešit problémy lineárního programování. Prostor přípustných řešení má tvar n -rozměrného polytopu, který je v prostoru \mathbb{R}^n vymezen omezujícími podmínkami. Optimální řešení se přitom nachází na jednom z vrcholů, které představují bazické řešení [7]. Zjednodušeně řečeno přechází simplexová metoda po hranách polytopu mezi vrcholy, dokud nenajde optimální řešení. Protože ale počet vrcholů polytopu je exponenciálně závislý na počtu proměnných a omezujících podmínek, nejedná se o algoritmus s polynomiální rychlostí. Přesto však ve většině případů konverguje velice rychle, neboť nemusí vyzkoušet všechna bazická řešení.

Metoda větví a mezi Metoda je schopná řešit úlohy smíšeného lineárního programování. Pokud problém obsahuje pouze binární a spojité proměnné, pak algoritmus spočívá ve větvení problému do stromu, kde uzly představují podproblémy s hodnotami

dosazenými za určité binární proměnné a listy stromu problém obsahující již jen spojité proměnné. Optimální hodnotu kriteriální funkce podproblémů v listech již lze poměrně rychle dopočítat například pomocí simplexové metody.

Během větvení se zároveň určují odhady mezních hodnot kriteriální funkce problému v každém uzlu. V listech je hodnota kriteriální funkce již přesně známa. V každém kroku se porovnávají meze uzlů a vyřazují se takové, ze kterých již nemohou vzejít řešení s vyšší hodnotou účelové funkce, než je současná spodní mez.

Metody sečných nadrovin Metody sečných nadrovin jsou skupinou algoritmů, založených na opakovaném řešení úlohy LP. Výpočet je prováděn iterativně, tak že v každém kroku je přidána další omezující podmínka zužující oblast přípustných řešení. Každá nová omezující podmínka musí splňovat tyto vlastnosti:

- optimální řešení nalezené pomocí LP se stane nepřípustným,
- žádné celočíselné řešení přípustné v předchozím kroku se nesmí stát nepřípustným.

Nové omezení splňující tyto vlastnosti je přidáno v každé iteraci. Vzniklý ILP problém je vždy znova řešen jako úloha LP. Proces je opakován, dokud není nalezeno přípustné celočíselné řešení. Konvergence takového algoritmu potom závisí na způsobu přidávání omezujících podmínek. Mezi nejznámější metody patří Dantzigovi řezy a Gomoryho řezy [5].

4.2.2 Heuristické metody

Metody využívající hrubých odhadů založených na empirických informacích se nazývají heuristické. Jejich cílem není dojít k optimálnímu řešení, ale za rozumnou dobu nalézt řešení přípustné, které se optimálnímu alespoň přibližuje. Často bývají tyto algoritmy používány pro získání výchozího řešení pro přesné metody, címž mohou výrazně ušetřit výpočetní čas. Jejich výhodou je schopnost pracovat s velice komplikovanými kriteriálními funkcemi a menší vliv způsobu formulace problému na rychlosť výpočtu.

Heuristické algoritmy jsou často určeny pro jeden konkrétní problém, existuje však skupina heuristik použitelných pro širší skupinu úloh, jako jsou *Genetické algoritmy*, *Simulované žilhání* a *Tabu prohledávání* [8] nazývané meta-heuristikami.

Genetické algoritmy

Genetické algoritmy jsou metody založené na abstraktním modelu evoluční teorie. Základní myšlenkou je udržování populace kandidátů na optimální řešení, která se postupně vyvíjí (obsahuje čím dál víc kvalitní jedince) díky selektivnímu výběru jedinců ke křížení (tvorbě nových řešení). Jde o prohledávání prostoru všech řešení na základě generování nových řešení z množiny více řešení a ne podle vlastností jednoho jako u většiny algoritmů.

Algoritmus je následující [8]:

1. Vygeneruj počáteční populaci (genotyp).
2. Ohodnoť každého jedince v populaci.
3. Vyber dvojici jedinců pro křížení.
4. Vytvářej potomky, dokud nebude hotova nová generace.
5. Nahrad současnou populaci nově vytvořenou a částí původní.
6. Pokud není splněno zastavovací kritérium, pokračuj krokem 2.

Aby bylo možné provádět křížení jedinců, musí mít chromozóm vhodnou strukturu (poddobající se skutečnému). Vhodné je například binární pole hodnot. Stejně tak vlastní procedura křížení musí být definována na míru problému.

Simulované žíhání

Algoritmus je založen na analogii s procesem žíhání oceli, ve kterém k pomalému rovnomořnému ohřevu materiálu a opětovnému pozvolnému ochlazení za účelem snížení tvrdosti (ocel je poté vhodná k orábění za studena). Pokud by se materiál zchladil příliš rychle, mohlo by dojít k vytvoření nedokonalé krystalické mřížky.

Algoritmus se dá shrnout do následujících bodů [8]:

1. Vygeneruj počáteční řešení S . Nastav počáteční teplotu T .
2. Zvol S' tak, aby se nacházelo v sousedství S a urči změnu Δ v energetické hladině (kriteriální funkci).

3. Pokud je Δ záporné nahrad' S za S' . Pokud je Δ kladné, akceptuj řešení S' s pravděpodobností, že pro náhodné číslo δ v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ platí $\delta < e^{(-\frac{\Delta}{T})}$.
4. Aktualizuj hodnotu teploty T na základě požadovaného průběhu chlazení, skutečnosti, zda došlo ke zlepšení apod.

Tabu prohledávání

Jedná se o lokální prohledávání obohacené o strategii modifikování okolí aktuálního stavu takovým způsobem, abychom zamezili návratu do původního stavu. To je provedeno ukládáním atributů (vlastností stavu), které byly změněny v určitém časovém horizontu do paměti a přiřazením statusu tabu-aktivní. Řešení, která obsahují hodnotu atributu z tabu-active seznamu, jsou tabu a neprohledávají se. Tyto stavy však nelze zakázat natrvalo, mohly by vést k optimálnímu řešení. Po čase se tedy povolí - aspirace [8].

4.2.3 Vyhodnocení algoritmů

Účelem optimalizačního nástroje je tvorba plánu na týden dopředu. Přestože je možné podle okamžité situace v průběhu týdne plán upravovat, v ideálním případě se plán nemění a na konci jeho působnosti se vytvoří plán na další období. Nejedná se proto o problém dynamického řízení s pohyblivým časovým horizontem², ale spíše o statické rozvrhování, kdy se jednou určený plán již příliš neupravuje (v podstatě se jedná o řízení bez zpětné vazby). Všechny metody uvedené v předchozí sekci jsou vhodné pro úlohu statického rozvrhování (lze je teoreticky použít i pro dynamické řízení).

Deterministické metody uvedené v kap. 4.2.1 nabízejí schopnost určit optimální řešení nebo alespoň vzdálenost výsledného řešení od optima, avšak nalezení použitelného řešení může trvat neúnosně dlouhou dobu, která je exponenciálně úměrná rozsahu problému. Oproti tomu heuristiky slibují výsledek za mnohem kratší dobu, ovšem není zaručena kvalita řešení a dokonce ani to, že bude nějaké nalezeno.

Otzáka zní, zda je potřeba optimální řešení, nebo se lze spokojit s řešením suboptimálním, které by přinejmenším bylo vhodným základem, na kterém by mohlo stavět plánovací

²Rídící systém v takovém případě určí optimální průběhy vstupních veličin na určitém časovém horizontu a po uplynutí určité doby (kratší než je doba horizontu) je řídící sekvence přepočítána opět na daný horizont.

oddělení. Odpověď půjde snadno odvodit z peněžní částky skrývající se pod jednoprocentní odchylkou řešení od optima.

Faktem je, že tento problém je pravděpodobně příliš rozsáhlý pro použití čistě deterministických metod. Je nutné kombinovat tento přístup s heuristickými metodami. Existuje množství softwarových nástrojů určených právě pro řešení problémů popsaných matematickým programováním, které v sobě kombinují (nejen) metody popsané v textu výše – takzvané *solvers*. Ty které jsou schopné řešit smíšené problémy (neobsahující pouze spojité proměnné) jsou obvykle založeny na metodě větví a mezí kombinované se složitými heuristickými postupy prořezávání a simplexovou metodou pro řešení čistě lineárních podproblémů.

Pro řešení optimalizace logistiky Pivovarů Staropramen, a. s., bude použit popis problému pomocí matematického programování (smíšeného lineárního) a k výpočtu optima bude použit vhodný solver kombinující více optimalizačních postupů. Protože model systému vytvořený v kap. 3 je dynamický, je třeba nejprve provést diskretizaci, která umožní každému stavu, vstupu a výstupu v každém časovém kroku přiřadit vlastní proměnnou. Tím vznikne statický model.

4.3 Diskretizace

Matematický popis dynamického modelu logistiky (3.31) je uveden v kap. 3.5.2. Diskretizací bude tento model převeden na systém diskrétních událostí, kde místo nezávislé spojité proměnné času t bude vystupovat proměnná diskrétních hodnot k a popis obecného spojitého lineárního časově invariantního systému (2.2) bude transformován do

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k), \end{aligned} \tag{4.4}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_{k_0} \in \mathbb{R}^n$ a $k \geq k_0$ [9].

4.3.1 Diskrétní model linky

Diskrétní model linky bude odvozen ze základního dynamického modelu (3.11). Nebude tedy zahrnuta žádná approximace nájezdu a odstavení linky a to z důvodu komplikace

již tak rozsáhlého modelu. Navíc ze studia historických týdenních plánů stáčení plyne, že najetí a tedy i odstavení linky proběhne za celý týden pouze jednou (pokud nedojde k mimořádné situaci). Lze tedy tvrdit, že approximace nájezdu linky nemusí být nezbytně do diskrétního popisu zahrnuta.

Protože v modelu linky nevystupují žádné stavové proměnné, lze jednoduše provést diskretizaci nahrazením časové proměnné t za diskrétní proměnnou k s výhradou, že je nutné dát pozor na jednotky. Všechny veličiny vztažené k času, tedy například výroba v $\frac{\text{ks}}{\text{h}}$, musí být převedeny na hodnoty vztažené k délce vzorku (vzorkovací periody), tedy například $\frac{\text{ks}}{T_{\text{vz}}}$. Diskretizovaný model linky má potom tvar

$$\mathbf{s}_l(k) = \frac{1}{T_{\text{vz}}} \mathbf{L} \begin{bmatrix} \mathbf{l}(k - T_d) \\ \mathbf{l}(k) \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

kde matice \mathbf{L} má shodný tvar jako ve spojitém případě (3.12), T_d je dopravní zpoždění linky zaokrouhlené na nejbližší násobek délky vzorku a T_{vz} je vzorkovací perioda, tedy délka vzorku.

4.3.2 Diskrétní model skladování

Spojitý model skladu integruje toky produktů a obalů na vstupu, jedná se tedy o integrátor. V diskrétní rovině integrátoru odpovídá sumátor, jehož stavová rovnice má tvar

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k), \quad (4.6)$$

kde $\mathbf{x}(k)$ je stavová veličina (představující nasčítanou hodnotu) a $\mathbf{u}(k)$ je vstupní veličina, která se sčítá. Stavovou rovnici integrátoru modelu skladu (3.26) je tedy nutné upravit do tvaru

$$\mathbf{s}(k+1) = \mathbf{s}(k) + \mathbf{s}_l(k) + \mathbf{t}(k), \quad \mathbf{s}(0) = \mathbf{s}_0, \quad (4.7)$$

kde $\mathbf{s}(k)$ je zaplnění skladu ve vzorku k , $\mathbf{s}_l(k)$ je tok produktů a obalů z linky, $\mathbf{t}(k)$ je tok produktů a obalů z transportu.

4.3.3 Diskrétní model transportu

Model transportu ve spojité formě funguje na principu zpožďovací linky (3.28). Vstupní veličina odpovídá obdélníku o délce doby nakládky T_l a amplituda rychlosti nakládání,

tedy $\frac{M}{T_l}$, kde M je množství k naložení. Doba nakládání by se při diskretizaci musela upravit tak, aby byla dělitelná délkou vzorku. To by však u hodnoty T_l nižší nebo obdobné T_{vz} (což bude pravděpodobně platit) vedlo k definici $T_l = T_{vz}$. Diskrétní model je tedy definován se zanedbáním doby nakládky T_l následovně

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_L(k) &= \mathbf{t}(k), \\ \mathbf{t}_U(k) &= \mathbf{t}(k - T_{td}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Vektory $\mathbf{t}_L(k)$, $\mathbf{t}_U(k)$ a $\mathbf{t}(k)$ jsou definovány shodně se spojitými protějšky, dopravní zpoždění (délka trasy) T_{td} musí být násobkem T_{vz} . Hodnota jednotlivých prvků vektoru $\mathbf{t}_L(k)$ a $\mathbf{t}_U(k)$ pak přímo definuje kolik produktů a obalů bude ve vzorku k na nákladní vůz naloženo a z vozu vyloženo respektive.

4.3.4 Celkový diskrétní model

Matice skladování $\mathbf{S}(t)$, matice výroby $\mathbf{L}(t)$ a matice transportu $\mathbf{T}(t)$ vystupující ve spojitém celkovém modelu logistiky (3.31) jsou funkce času. Diskretizací jejich průběh navzorkujeme H vzorky s periodou T_{vz} . Matice $\mathbf{S}(k)$ je pak stav skladů ve vzorku k a popis celého diskrétního stavového prostoru skladování pro horizont H je dán maticí \mathbf{S} definovanou

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(1) \\ \mathbf{S}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{S}(H) \end{bmatrix}.$$

Shodným způsobem je definována i matice \mathbf{T} popisující průběh transportu

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(1) \\ \mathbf{T}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{T}(H) \end{bmatrix}$$

a matice \mathcal{L} , která vyjadřuje průběh stavu linky v celém horizontu

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}(1) \\ \mathbf{L}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{L}(H) \end{bmatrix}.$$

Statický model chování logistického procesu pak může být popsán

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 - \mathbf{P}_D C_D \mathcal{L} R_E + \mathbf{P}_{Dd} C_D \mathcal{L} (\mathbf{E} - \mathbf{W}) + \mathbf{R}_D \mathcal{L}, \quad (4.9)$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice. Matice \mathcal{S}_0 o rozměrech $n \cdot H \times m$, kde n je počet skladů v modelu, m počet produktů a obalů a H je časový horizont, je počáteční podmínkou stavu skladování a je definována

$$\mathcal{S}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(0) \\ \mathbf{S}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{S}(0) \end{bmatrix},$$

matice \mathbf{P}_D vyjadřuje přiřazení linek ke skladům a má tvar

$$\mathbf{P}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{P} & \mathbf{P} & \cdots & 0 \\ \mathbf{P} & \mathbf{P} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P} & \mathbf{P} & \cdots & \mathbf{P} \end{bmatrix},$$

přičemž submatice \mathbf{P} o rozměru $n \times p$, kde p je počet linek, je matice příslušnosti linek (3.29) definována v kap. 3.5. Obdobně matice \mathbf{P}_{Dd} o rozměru $n \times p$ je matice příslušnosti produkce linek a udává dopravní zpoždění linek

$$\mathbf{P}_{Dd} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{P}_{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{P}_{-1} + \mathbf{P}_{-2} & \mathbf{P}_{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{-1} + \cdots + \mathbf{P}_{-H+1} & \mathbf{P}_{-1} + \cdots + \mathbf{P}_{-H+2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Submatice P_{-i} je nulovou maticí, pokud žádná linka nemá hodnotu dopravního zpoždění³ $T_d = i$. Sloupec j submatice P_{-i} se rovná sloupci j matice \mathbf{P} , pokud pro linku příslušející sloupci j platí $T_d = i$.

Čtvercová matice kapacit linek \mathbf{C}_D s rozměry $p \cdot H \times p \cdot H$ je blokově diagonální matice tvaru

$$\mathbf{C}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\text{nom}} \mathbf{C}_{\text{ef}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{\text{nom}} \mathbf{C}_{\text{ef}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{C}_{\text{nom}} \mathbf{C}_{\text{ef}} \end{bmatrix},$$

submatice na diagonále jsou tvořeny součinem matic nominálních (3.6) a efektivních (3.7) kapacit linek definovaných v kap. 3.2, kde je také popsán tvar matice receptury \mathbf{R}_E (3.5) a matice produkčních ztrát \mathbf{W} (3.8).

Matice \mathbf{R}_D má rozměr $n \cdot H \times n_t \cdot H$, kde n_t je počet tras, a tvar

$$\mathbf{R}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_L & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{R}_L + \mathbf{R}_{U-1} & \mathbf{R}_L & \cdots & 0 \\ \mathbf{R}_L + \mathbf{R}_{U-1} + \mathbf{R}_{U-2} & \mathbf{R}_{U-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_L + \mathbf{R}_{U-1} + \cdots + \mathbf{R}_{U-H+1} & \mathbf{R}_{U-1} + \cdots + \mathbf{R}_{U-H+2} & \cdots & \mathbf{R}_L \end{bmatrix}.$$

Submatice \mathbf{R}_L odpovídá nekladné části matice směřování (3.30) uvedené v kap. 3.2. Submatice \mathbf{R}_{U-i} je, obdobně jako P_{-i} , nulová, pokud neexistuje trasa s časovou vzdáleností $T_{td} = i$. Pokud existuje trasa j , jejíž vzdálenost $T_{td} = i$, pak j -tý sloupec matice \mathbf{R}_{U-i} odpovídá j -tému sloupci nezáporné části matice směřování (3.30) \mathbf{R}_U definované v kap. 3.2, ostatní prvky submatice jsou nulové.

4.4 Softwarové vybavení

K vývoji optimalizátoru bylo použito prostředí MATLAB určené primárně pro technické a matematické programování. Nabízí zejména výtečnou podporu práce s vektory a maticemi, snadné prezentování výsledků (grafy, export do excelu apod.) a především pro toto prostředí existuje mnoho softwarových nástrojů určených pro optimalizaci. Jedním

³zaokrouhlenou na násobek délky vzorku

z nich je toolbox YALMIP [10]. Jedná se o nástavbu MATLABu určenou pro definice a řešení rozsáhlých optimalizačních problémů. Důležité je, že je zdarma a nesmí být distribuován jako část komerčního produktu (avšak je možné jej použít jako vývojový nástroj). YALMIP integruje i značné množství triků, mimo jiné pro aplikaci nelineárních funkcí typu *max*, *abs*, *ceil* na proměnné problému, při zachování linearity (obvykle za cenu přidaných proměnných).

Přestože je MATLAB dodáván se základními LP⁴ a QP⁵ solvery, pro řešení takto rozsáhlé úlohy nejsou dostatečné výkonné. Pro řešení problému, kterým se zabývá tato práce, je třeba solveru schopného pracovat se smíšeným lineárním či kvadratickým problémem (MILP, MIQP resp., obsahuje i celočíselné proměnné). Základním parametrem, podle kterého lze tyto solvery rozlišovat, je zda jsou zdarma nebo komerční.

4.4.1 Nekomerční solvery

LPSOLVE Základní solver schopný řešit MILP problémy s plnou podporou v prostředí YALMIP. Bohužel jeho výkon u problémů s vyšším množstvím celočíselných proměnných je zcela nedostačující.

GLPK Poměrně schopný solver s podporou celočíselných proměnných. Opět je plně podporován prostředím YALMIP. Nevýhodou je nemožnost nastavení limitu odchylky od optimu. Často postačuje řešení s odchylkou několika procent (zejména pro účely testování) a konvergence se ke konci prohledávání obvykle značně zpomalí. Jeho výkon je průměrný.

SCIP Jedná se o jeden z nejvýkonnějších nekomerčních solverů. Není interně podporován prostředím YALMIP, dokáže však importovat jím definovaný problém a řešení poté opět exportovat.

4.4.2 Placené solvery

CPLEX Měl jsem možnost vyzkoušet jediný komerční solver a to CPLEX. Licenci vlastní Katedra řídicí techniky ČVUT FEL. Jedná se o jeden z nejvýkonnějších solverů

⁴lineární programování

⁵kvadratické programování

na trhu. Je schopný řešit problémy kvadratického programování řádově větších rozměrů, než jeho nekomerční protějšky a za mnohem kratší čas. Nevýhodou je jeho poměrně vysoká cena, která je však při využití potenciálu vzhledem k možnostem úspor rychle navrácena.

4.5 Popis problému matematickým programováním

V této sekci bude vytvořen popis problému za pomoci matematického programování (4.1) a to konkrétně lineárního případu (4.2), který může být definován

$$\begin{aligned} & \text{minimalizuj } \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \\ & \text{za omezení } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ & \quad \mathbf{A}_{\text{eq}}\mathbf{x}_{\text{eq}} = \mathbf{b}_{\text{eq}}, \\ & \quad \mathbf{x}_i \subset \mathbb{Z}, \forall i \in \mathcal{X}_I, \\ & \quad \mathbf{x}_j \subset \mathbb{R}, \forall j \in \mathcal{X}_C, \end{aligned} \tag{4.10}$$

kde \mathcal{X}_I je množina celočíselných proměnných a \mathcal{X}_C je množina spojitých proměnných. V následujících odstavcích budou nejprve rozebrány omezující podmínky problému, tedy matice \mathbf{A} a \mathbf{A}_{eq} a poté navržena konkrétní podoba účelové funkce - vektor \mathbf{c} .

4.5.1 Definice proměnných

Existují tři druhy proměnných, které je možné použít při řešení problému smíšeného lineárního programování

- spojité,
- celočíselné,
- binární.

Binární proměnné jsou speciálním případem celočíselných, kdy proměnná smí nabývat pouze hodnot $\{0, 1\}$. Příkladem takových proměnných v tomto problému je výrobní matice \mathcal{L} . Stav linky má vlastnost, že buď pracuje na plný dosažitelný výkon, nebo stojí.

Není proto možné jej popisovat spojitou proměnnou, protože by se mohlo stát, že optimalizátor by navrhl chod linky například s třetinovou efektivitou, což v reálné situaci není výhodné (nelineární spotřební charakteristika linky) a často ani možné.

Nepríjemným následkem použití binárních proměnných je razantní komplikace problému a prodloužení doby potřebné na řešení. Proto je potřeba je zavádět pouze v případech, kdy je to nezbytně nutné. Naštěstí větší část problému lze popsát spojitymi proměnnými.

4.5.2 Omezující podmínky

Tyto podmínky vymezují oblast přípustných řešení problému - hledá se minimální hodnota kriteriální funkce při splnění určitých podmínek, které jsou dány především modelem systému. Primární omezující podmínkou tedy je

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 - \mathbf{P} \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{R}_E + \mathbf{P}_d \mathbf{C} \mathbf{L} (\mathbf{E} - \mathbf{W}) + \mathbf{R} \mathbf{L} + \mathbf{I} \mathbf{C}_M, \quad (4.11)$$

což není nic jiného, než vztah vyjadřující chování celkového statického (diskretizovaného) modelu logistiky (4.9) navíc se členem $\mathbf{I} \mathbf{C}_M$ umožňujícím simulovat průběžný odběr produktů z distribučních center (a návrat obalů). Matice \mathbf{I} je bloková integrační matice o rozměru $n \cdot H \times n \cdot H$ ve tvaru

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{E} & \mathbf{E} & \cdots & 0 \\ \mathbf{E} & \mathbf{E} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E} & \mathbf{E} & \cdots & \mathbf{E} \end{bmatrix},$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice o rozměru $n \times n$. Člen \mathbf{C}_M pak určuje spotřebu produktů a počet vrácených obalů v každém kroku do každého skladu

$$\mathbf{C}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_M(1) \\ \mathbf{C}_M(2) \\ \vdots \\ \mathbf{C}_M(H) \end{bmatrix}$$

a submatice $\mathbf{C}_M(k)$ s rozměry $n \times m$, kde m je počet produktů a obalů, určuje spotřebu v k -tému kroku.

Přirozeným požadavkem je nezápornost všech proměnných, neboť nelze produkovat ani transportovat záporné množství a přestože se ve skladovacích výkazech občas vyskytne záporná hodnota množství na skladě, jedná se pouze o administrativní chybu. Platí tedy

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{S}} &\geq 0, \\ \boldsymbol{\mathcal{T}} &\geq 0,\end{aligned}\tag{4.12}$$

význam nerovností přitom je, že žádný prvek matic nesmí být záporný. V následujících odstavcích bude porovnání matice se skalární hodnotou znamenat, že daná podmínka platí pro každý prvek matice zvlášť. Pro matici výroby $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ není nutné podmínu nezápornosti explicitně vyjadřovat, neboť plyne z binární povahy proměnných produkčních vektorů. Požadavek na možnost výroby pouze jednoho produktu současně však implicitně splněn není a musí být definován

$$\sum_j \boldsymbol{\mathcal{L}} \leq 1,$$

což je výraz shrnující podmínky pro jednotlivé výrobní vektory (3.3) uvedené v kap. 3.2.

Výraz (4.12) definuje spodní omezení pro hodnoty stavů skladů, horní omezení pak plyne z kapacit skladů a lze vyjádřit

$$\begin{aligned}\sum_j \boldsymbol{\mathcal{S}}_{ij} &\leq c_r, \quad i = (k-1)n + r, \\ k &= 1, 2, \dots, H,\end{aligned}$$

kde n je počet skladů, r je index skladu, c_r je kapacita skladu r a H délka horizontu. Dalším základním omezením je zamezení výroby obalů. Pokud by byl nenulový prvek výrobního vektoru odpovídající produkci obalu, pak by ve skladu přibývaly obaly, aniž by cokoliv ubývalo. To by se optimalizátoru jistě jevilo obzvláště výhodné. Musí tedy platit

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ij} = 0, \quad \forall i; \quad j \in \mathcal{C}_o, \tag{4.13}$$

kde \mathcal{C}_o je množina všech obalů.

Horní omezení hodnot matice transportu $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ je dáno kapacitou nákladních vozů, což při rozdílné kapacitě na různých trasách lze vyjádřit

$$\begin{aligned}\sum_j \boldsymbol{\mathcal{T}}_{ij} &\leq c_{Tr}, \quad i = (k-1)n_t + r, \\ k &= 1, 2, \dots, H,\end{aligned}$$

kde obdobně jako u omezení skladových kapacit je n_t počet tras, r je index trasy, c_{Tr} je kapacita nákladního vozu na trase r a H délka horizontu. Abychom zcela zamezili

transportům s neefektivním využitím nákladového prostoru, je možné definovat binární proměnné t_b tak, aby platilo

$$t_{\min} \mathbf{t}_b \leq \sum_j \mathcal{T}_{ij} \leq t_{\max} \mathbf{t}_b, \quad (4.14)$$

kde t_{\min} a t_{\max} je minimální a maximální přípustné naložení respektive. Je zřejmé, že vektor binárních proměnných \mathbf{t}_b má délku $n_t \cdot H$ a vyjadřuje, zda na dané trase v daném kroku došlo k transportu. Takto definované omezení zároveň předpokládá, že v jednom kroku dojde maximálně k jednomu transportu, což je vzhledem k velikosti nákladového prostoru vozů a délce periody vzorkování (mezi čtvrt hodinou až hodinou) dostatečné.

Cílem posledního omezení je zamezení nelogického transportu obalů ze skladu linky a naopak dovoz produktů k lince. Tento jev může nastat například, když při transportu k lince není dostatek obalů k naplnění nákladního vozu. Optimalizátor by se pak mohl rozhodnout⁶, že je výhodnější doplnit prázdné místo produktem, než vyslat neefektivně zaplněný vůz. Pro zakaz dovozu produktů na linku lze omezení formulovat jako

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{ij} = 0, \quad i &= (k-1)n_t + r_i; \quad j \in \mathcal{P}_p, \\ k &= 1, 2, \dots, H, \end{aligned} \quad (4.15)$$

kde r_i jsou indexy tras, které končí ve skladu s linkou a \mathcal{P}_p je množina produktů. Shodným způsobem je definováno omezení pro transport obalů od linky

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{ij} = 0, \quad i &= (k-1)n_t + r_o; \quad j \in \mathcal{C}_o, \\ k &= 1, 2, \dots, H. \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.5.3 Účelová funkce

Omezující podmínky problému jsou jasně dané jeho podstatou a strukturou. U účelové funkce tomu tak není a přestože je do určité míry možné ji vytvořit intuitivně, zdaleka nevšechny aspekty hodnocení kvality plánu jdou pojmut takto jednoduše a často je třeba využít empirických znalostí.

V kap. 4.1.2 byly vysvěleny základní ukazatele, podle kterých je možné hodnotit plán logistiky. V této sekci bude těmto bodům navržen odpovídající matematický zápis.

⁶pokud bude aplikována penalizace nezaplněných transportů

Kritérium kvality stáčení

Nejintuitivnějším požadavkem na provoz linky je, aby byla v chodu co nejméně, v takovém případě minimalizujeme kritérium

$$J_p = c_p \sum_i \sum_j \mathcal{L},$$

kde c_p je cena za produkci za dobu jednoho kroku. Jak bylo ovšem uvedeno v kap. 4.1.2, užitečnost tohoto kritéria je diskutovatelná. Požadavek na co nejnižší výrobu je totiž implicitně obsažen v dalších kritériích, týkajících se především skladování.

Vyhodnocení počtu nájezdů pro jedinou linku⁷ je možné za pomocí následujícího výrazu

$$J_{pst} = \frac{1}{2} c_{pst} \left(\sum_i \left| \mathbf{D} \sum_j \mathcal{L}_{ij} \right| + \sum_j \mathcal{L}_{1j} \right),$$

přičemž c_{pst} je cena za nájezd (a výjezd) linky⁸ a \mathbf{D} je diferenční matici rozměru $H \times H$ (pro jednu linku) tvaru

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obdobným způsobem je určena i celková cena za změny v produkci

$$J_{pch} = \frac{1}{2} c_{pch} \sum_i \sum_j |\mathbf{D} \mathcal{L}_{ij}|.$$

⁷Pokud by bylo uvažováno linek více, musel by se výraz náležitě upravit, aby se diferenčnice určovala vždy z průběhu na jedné lince.

⁸Ve výrazu se dělí dvěmi, neboť se v součtu započítá jak nájezd tak výjezd. Účel posledního člena rovnice je započítání i prvního vzorku.

Kritérium kvality skladování

Účelem je držet uskladněné množství co nejblíže požadované hladině zásob. Nejjednodušším způsobem je penalizovat absolutní odchylku od reference, tedy

$$J_{\text{absres}} = c_{\text{absres}} \sum_i \sum_j |\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{\text{ref}}|,$$

kde c_{absres} je cena za jednotkovou odchylku. Jak bylo uvedeno v kap. 4.1.2, tento způsob není příliš vhodný. Lepší je penalizovat relativní odchylku, pokud není reference nulová, u té je hodnocení absolutní odchylky nutné. Celková hodnota všech relativních odchylek je určena

$$J_{\text{res}} = c_{\text{res}} \sum_i \sum_j |\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{\text{ref}}| \div \mathbf{S}_{\text{ref}},$$

přičemž \div značí dělení matic po prvcích a každý prvek matice \mathbf{S}_{ref} musí být nenulový.

Protože oba zmíněné způsoby určení celkové ceny odchylky od reference jsou poměrně restriktivní – penalizují i běžné kolísání zaplněnosti skladu způsobené například nakládáním a vykládáním – byla navržena metoda využívající průměrování přes určitý časový úsek. Cena za odchylku přes jeden časový úsek se určí

$$J_{\text{res}_a} = c_{\text{res}} \frac{l_{\text{ma}}}{i_{\text{ma}}} \sum_i \sum_j |\Sigma_a^T \mathbf{S} - \mathbf{S}_{\text{ref}}| \div \mathbf{S}_{\text{ref}}, \quad (4.17)$$

musí přitom opět platit nenulovost prvků matice \mathbf{S}_{ref} . Parametry l_{ma} a i_{ma} jsou délka průměrovacího okna a interval průměrování respektive a Σ je sčítací matice o rozměru $n \cdot H \times n$ a je definována

$$\Sigma_a = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \\ \vdots \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

kde $\mathbf{0}$ a \mathbf{E} jsou nulové a jednotková matice respektive o rozměru $n \times n$, index a označuje, o který součet se jedná. Sčítací matice Σ_a je nenulová pouze v intervalu řádků j

$$j \in < a \cdot i_{\text{ma}} \cdot n + 1; a \cdot i_{\text{ma}} \cdot n + l_{\text{ma}} >,$$

kde je vyplňena jednotkovými maticemi, které vytvářejí průměrovací okno.

Kritérium kvality transportu

Dopravu lze hodnotit poměrně jednoduše pomocí součtu počtu transportů. Zda byl v určitém vzorku transport po dané trase proveden, je dán vektorem \mathbf{t}_b (4.14). Celková cena za dopravu se tedy určí

$$J_{\text{tr}} = c_{\text{tr}} \sum_i \mathbf{t}_{b_i}.$$

V tomto výrazu je implicitně obsažen i požadavek na co nejvyšší využití nákladového prostoru.

4.6 Vyhodnocení optimalizace

Účinnost optimalizace může být hodnocena z mnoha hledisek. Lze ji posuzovat zejména podle následujících kvalitativních a kvantitativních kritérií:

- validita výstupu,
- rychlosť optimalizace,
- míra zjednodušení oproti reálnému problému.

V následujících odstavcích budou předvedeny a vyhodnoceny ukázky výstupních dat optimalizátoru, k čemuž poslouží testovací scénář prezentovaný v následující sekci.

4.6.1 Testovací scénář

Aby bylo možné jednoznačně vyhodnotit validitu výsledků optimalizace, je nutné omezit problém natolik, aby nebylo obtížné se v něm orientovat⁹. Lze očekávat, že pokud se výstupní plán bude shodovat s očekáváním v kvantitativně jednodušším problému, bude optimalizace rozáhlejsích problémů stejně úspěšná.

⁹Pro řešení rozsáhlých problémů je také třeba neúměrně více výpočetního času. Velké množství testů by v takové konfiguraci trvalo přespříliš dlouho.

Problém

Základní údaje Délka časového horizontu je nastavena na 2 dny při vzorkování po jedné hodině, což je ideální kompromis mezi složitostí problému, informační hodnotou testů a rychlostí výpočtu. Budou prezentovány i testy na delších scénářích, zejména za účelem vyhodnocení časové náročnosti optimalizace.

Produkty a obaly Scénář zahrnuje dva základní obaly a tři produkty, které v produkci zadavatele zaujímají přední místa v objemu produkce.

Produkty	Obaly
<ul style="list-style-type: none"> • 10° 50L KEG • 10° 30L KEG • 12° 30L KEG 	<ul style="list-style-type: none"> • 50L KEG • 30L KEG

Sklady Scénář zahrnuje 2 skladů pojmenované Smíchov a Most, které jsou od sebe vzdálené necelé 2 hodiny jízdy. Sklady mají nastavené určité kapacity uvedené v tab. 4.1, počáteční naskladněné množství produktů a obalů, viz tab. 4.2, a predikce prodeje produktů a návratu obalů za hodinu (vzorek) udané v tab. 4.3. Požadovaná hladina zásob je uvedena v tab. 4.4.

Data týkající se predikce průběhu vrácení obalů od zákazníků nejsou k dispozici. V rámci optimalizace se proto zavádí průběžný navrat obalů o objemech shodných s predikcí prodeje. Je tedy zaručeno, že obalů bude dostatek.

Tabulka 4.1: Kapacity skladů testovacího scénáře

Sklad	kapacita [ks]
Smíchov	15000
Most	25000

Linka Jediná linka je umístěna u smíchovského skladu, kam není podle omezení (4.16) a (4.15)) možné vozit produkty a nelze z něj odvážet obaly. Kapacita linky je 500 sudů za hodinu s efektivitou 86%, což je hodnota určená při verifikaci modelu linky (3.6.1). Dopravní zpoždění linky je nastaveno na 45 minut.

Tabulka 4.2: Počáteční množství produktů a obalů na skladech

Sklad	10° 50L KEG ^a	10° 30L KEG	12° 50L KEG	30L KEG	50L KEG
Smíchov	0	0	0	0	0
Most	10000	4000	4000	600	2100

^aVšechny hodnoty jsou uvedeny v kusech.

Tabulka 4.3: Odběr produktů a obalů z distribučních center

Sklad	10° 50L KEG ^a	10° 30L KEG	12° 50L KEG	30L KEG	50L KEG
Smíchov	0	0	0	0	0
Most	83	42	33	-42 ^b	-117

^aVšechny hodnoty jsou uvedeny v kusech.

^bZáporné hodnoty znamenají přísun do skladu.

Transport Je aplikováno omezení, že v každý časový vzorek smí být proveden pouze jeden transport. Kapacita nákladního vozu je omezena na 1000 kusů produktů nebo obalů.

Nominální nastavení optimalizátoru

Nominální nastavení kriteriální funkce a parametrů optimalizace je zvolené základní nastavení, ke kterému se budou vztahovat výsledky testů. Jejich účelem bude určit vliv změn koeficientů cenové funkce a parametrů optimalizace na podobu optimálního¹⁰ plánu. Nominální nastavení rozhodně nemusí být ideální, avšak plán na něm založený je validní.

Nastavené hodnoty cenové funkce jsou uvedeny v tab. 4.5. Další informace o nastavení optimalizátoru jsou v tab. 4.6.

¹⁰Lze hovořit pouze o optimalitě vzhledem k určitému nastavení cenové funkce.

Tabulka 4.4: Požadované hladiny zásob v jednotlivých skladech

Sklad	10° 50L KEG ^a	10° 30L KEG	12° 50L KEG	30L KEG	50L KEG
Smíchov	0	0	0	0	0
Most	10000	5000	4000	0	0

^aVšechny hodnoty jsou uvedeny v kusech.

Tabulka 4.5: Koeficienty cenové funkce nominálního nastavení optimálizátoru

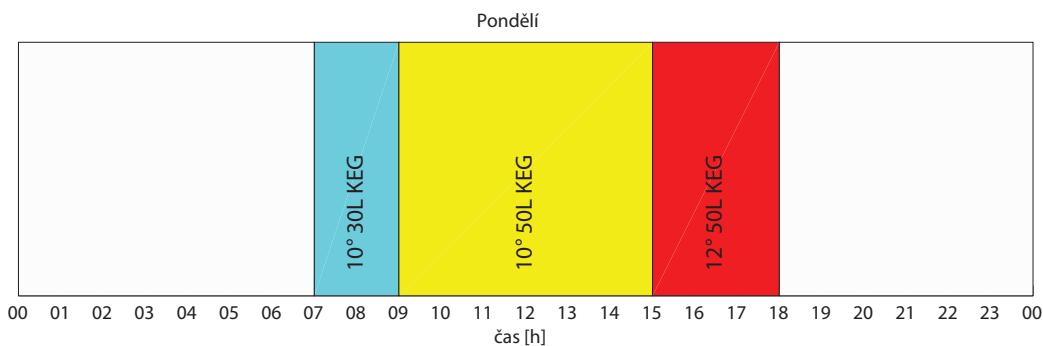
Koeficient	Hodnota	Popis
c_{pst}	100000	Cena za nájezd a výjezd linky ^a
c_{pch}	50000	Cena za změnu produktu nebo obalu na lince ^b
c_{res}	30000	Cena za 1% odchylky od referenční hladiny zásob
c_{tr}	40000	Cena za provedený transport
x_{absres}	10000	Koeficient udávající kolik kusů absolutní odchylky stojí stejně jako jedno procento relativní

^aZapočítává se jak nájezd, tak výjezd, efektivně má tato cena tedy dvojnásobnou hodnotu.

^bZapočítává se jak začátek bloku, tak konec bloku, efektivně má tato cena tedy dvojnásobnou hodnotu.

Výstup optimalizace s nominálním nastavením

V tab. 4.3 je zadáno, jaké množství produktů si zákazník odebere každou hodinu ze skladů, zároveň existuje požadavek (uvedený v tab. 4.4) na udržení určité hladiny zásob na skladech, což je zajistěno produkcí nových výrobků – stáčením na lince – a jejich transportem na místa určení. Avšak výroba i transport stojí určité peníze, které jsou dány hodnotami v tab. 4.5.



Obrázek 4.2: Gantttův diagram produkce při nominálním nastavení

Požadujeme, aby výroba byla co nejplynulejší, tzn. s co nejmenším počtem nájezdů a změn v produkci. To je při tomto nastavení cenové funkce, jak lze pozorovat na Ganttově diagramu na obr. 4.2, zcela uspokojeno. Protichůdným požadavkem však jsou co nejmenší odchylky od referenční hladiny zásob – aby byla v každém okamžiku odchylka minimální, bylo by třeba, aby výroba naopak střídala stáčené produkty co nejčastěji. K umírnění

Tabulka 4.6: Souhrn informací o nominálním nastavení optimalizátoru

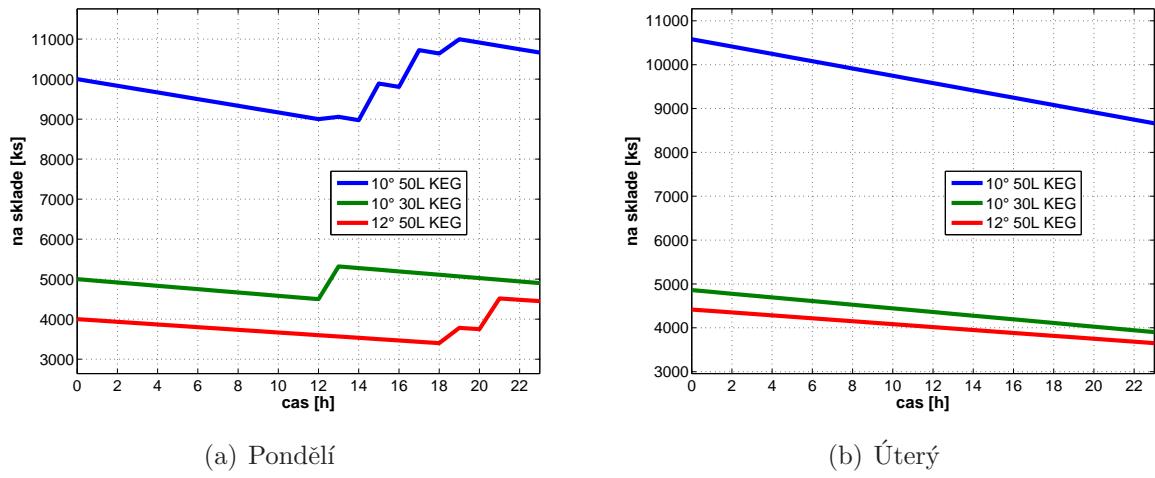
Horizont [h]	48
Krok [h]	1
Použitý solver	SCIP
Maximální povolená odchylka od optima ^a [%]	10
Doba potřebná pro vyřešení problému [min]	7,3
Počet proměnných	1712
Počet binárních proměnných	582
Maximální povolené naložení vozu	800
Minimální povolené naložení vozu	1000
Délka pruměrovacího okna odchylek od reference [h]	24
Interval průměrování odchylek od reference [h]	12

^aLépe procentuální odchylka hodnoty kritéria primární úlohy od hodnoty kritéria duální úlohy.

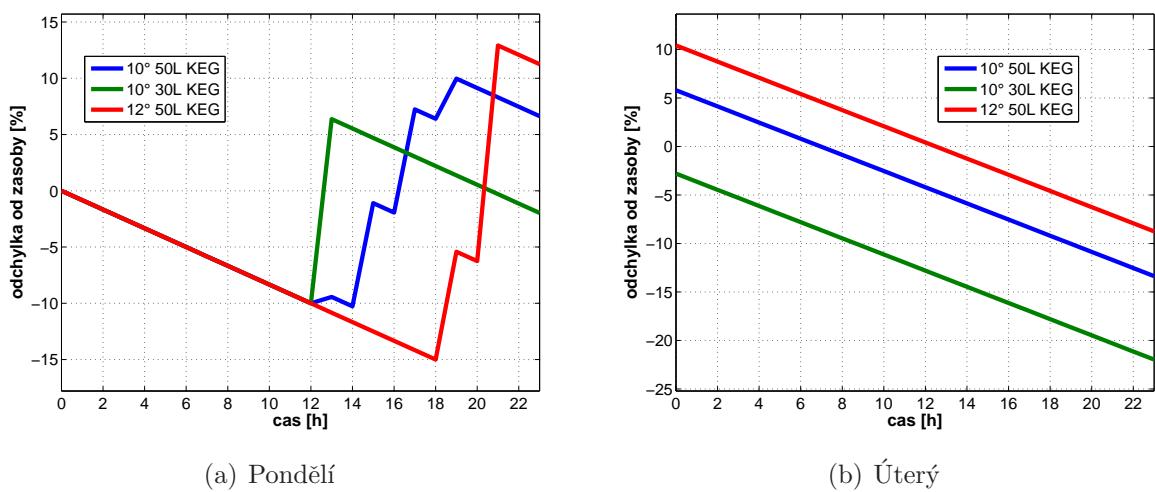
této protichůdnosti slouží způsob počítání odchylek od reference za užití průměrovacího okna (4.17). To zajišťuje, že optimální je rovnoměrné kolísání množství produktů na skladě kolem referenční hodnoty, jak lze vidět na obr. 4.3(a). Druhý den (obr. 4.3(b)) optimalizace nechává na konci horizontu klesnout množství produktů pod referenční hladinu více, neboť výroba by již příliš zvedla cenu plánu.

Odchylky od požadovaných zásob produktů lze pozorovat na obr. 4.4(a) a obr. 4.4(b). Hodnoty se po většinu horizontu drží v rozmezí 15%, pouze na konci horizontů se vyšplhají až ke 20%. Najízdět linku v té době by již bylo příliš drahé a prodloužení bloku produkce pro vykrytí této odchylky by způsobilo zvýšení přebytků na skladech v průběhu horizontu a další náklady s transportem.

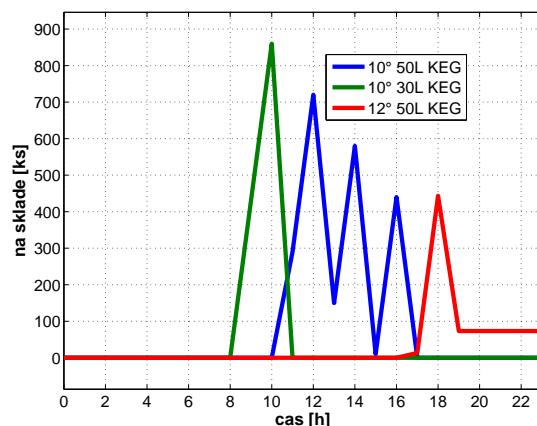
Podle tab. 4.4 je dán důraz na udržování zaplněnosti smíchovského skladu s linkou na co nejnižší úrovni a to s ohledem na produkty i obaly. Pohledem na obr. 4.5 je možné ověřit, že tomu tak skutečně je. Na obr. 4.5(a) lze jasně pozorovat, že právě stočené produkty se okamžitě odváží na místo určení, což zobrazuje i tab. 4.7. Druhý den, kdy už výroba neprobíhá, zůstává na skladě zbytkové množství produktů a obalů (obr. 4.5(b) a obr. 4.5(d)), což je způsobeno nemožností stočit za hodinu menší množství než 430 sudů (dáno kapacitou a efektivitou linky v tab. 4.1), protože nejmenším časovým úsekem je právě jedna hodina. Průběh na obr. 4.5(d) ukazuje, že dovezené obaly se bezodkladně spotřebují a nezabírají tak zbytečně skladovací prostory.



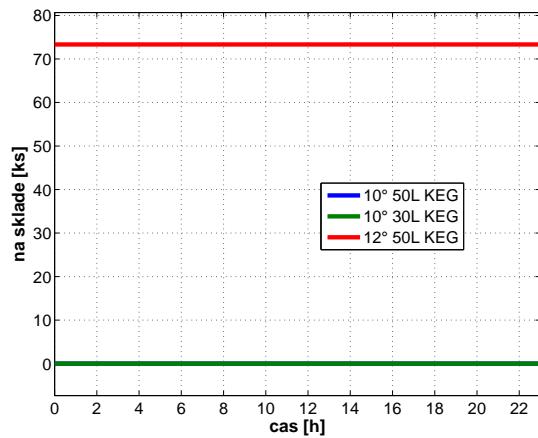
Obrázek 4.3: Stavy produktů v DC Most při nominálním nastavení optimalizace



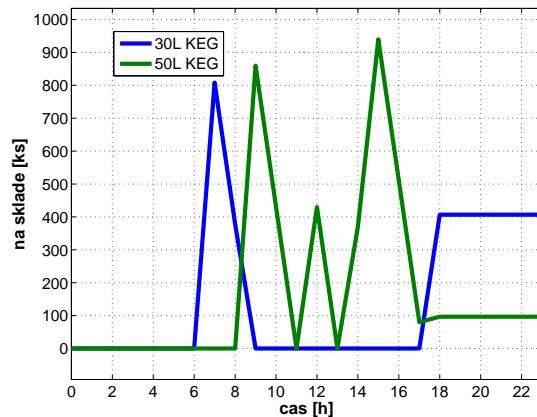
Obrázek 4.4: Odchylky od požadovaných zásob produktů v DC Most při nom. nastavení



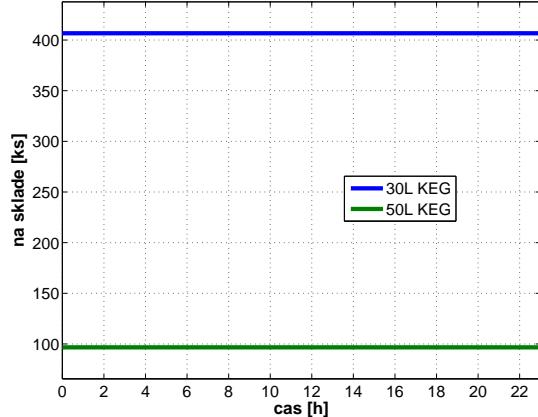
(a) Pondělí – produkty



(b) Úterý – produkty



(c) Pondělí – obaly



(d) Úterý – obaly

Obrázek 4.5: Stavy produktů a obalů v DC Smíchov při nom. nastavení optimalizace

Tabulka 4.7: Transport ze smíchovského skladu do DC Most v pondělí – nom. nastavení

Čas ^a	10° 50L ^b	10° 30L ^c	12° 50L ^d	30L KEG ^e	50L KEG ^f	Celk. ^g
M 10:00	140	860	0	0	0	1000
M 12:00	1000	0	0	0	0	1000
M 14:00	1000	0	0	0	0	1000
M 16:00	440	0	417	0	0	857
M 18:00	0	0	800	0	0	800
Celk.	2580	860	1217	0	0	4657

^aČas provedení transportu

^bMnožství naložených padesátilitrových sudů naplněných 10° pivem v kusech

^cMnožství naložených třicetilitrových sudů naplněných 10° pivem v kusech

^dMnožství naložených padesátilitrových sudů naplněných 12° pivem v kusech

^eMnožství naložených prázdných třicetilitrových sudů v kusech

^fMnožství naložených prázdných padesátilitrových sudů v kusech

^gCelkové naložené množství v kusech

Pro úplnost jsou v tab. 4.8 uvedeny výsledné hodnoty kritérií. Je zde například velice dobře vidět, že pokud by měla být zmíněná odchylka od reference na konci horizontu kompenzována další výrobou, zvedla by se hodnota kritérií J_{pch} a J_{pst} penalizujících změny na lince mnohem více, než by mohla klesnou hodnota J_{res} penalizující odchylku od požadované hladiny zásob.

Tabulka 4.8: Hodnoty kritéria nominálního nastavení optimalizátoru

Koeficient	Hodnota	Popis
J_{pst}	200000	Cena za všechny nájezdy a výjezdy linky
J_{pch}	300000	Cena za všechny změny obalů a produktů na lince
J_{res}	397215	Cena za odchylky od referenční hladiny zásob
J_{tr}	440000	Cena za všechny provedené transporty
J	1337215	Celková hodnota kritéria

4.6.2 Validita výstupu

Pod tímto širokým pojmem se skrývá nejen otázka, zda model korektně postihuje reálný proces, ale také zda soubor omezujících podmínek je správně definován a je vyčerpávající.

Pokud totiž chybí nějaké na první pohled nepříliš zřejmé omezení (například zákaz odvozu obalů od linky), tak nehledě na bezchybný model dává optimalizátor nelogické výsledky.

Jedním z nejdůležitějších předpokladů pro validní výstup optimalizačního nástroje je však dobře sestavená účelová funkce. V této otázce je třeba úzce spolupracovat se zadavatelem. Některá cenová ohodnocení však jdou určit jiným způsobem než empiricky jen velice obtížně (například cena odchylky od reference). V takovém případě nezbývá než provést rozsáhlý soubor testů a ten vyhodnotit.

V následujících odstavcích bude vyhodnocen vliv hodnot různých nastavení optimalizátoru na validitu výstupního plánu. Jako reference bude použito nominálního nastavení definovaného v předchozí sekci a v každém testu bude pozměněna pouze jedna hodnota z tab. 4.5. Protože pro zobrazení všech dat není v této práci místo a ani by to nepřispělo k přehlednosti textu, budou vždy zobrazena data, která budou co nejrelevantnějším způsobem ilustrovat vliv daného parametru na chování optimalizátoru.

Test č. 1	$c_{\text{res}} = 10000$
------------------	--------------------------

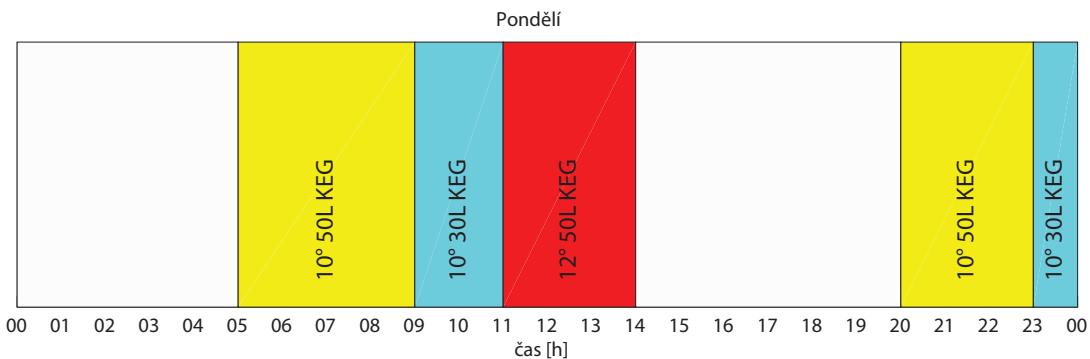
Pokud hodnocení odchylky od reference bude mít hodnotu 10000 (namísto 30000 v nominálním nastavení), pak lze očekávat razantní změny ve výsledném plánu oproti nominálnímu řešení. U stejného plánu, jako byl vytvořen při nominálním nastavení optimalizátoru, by totiž celková hodnota kritéria penalizujícího všechny odchylky od reference byla třikrát nižší než v tab. 4.8, tedy 132405. Výroba a transport by se tak jevily mnohem dražší. V tab. 4.9 jsou uvedeny hodnoty optimálního řešení (maximální odchylka 10% od optima) pro $c_{\text{res}} = 10000$. Je zřejmé, že neproběhl jediný transport a linka po celou dobu horizontu stála. Přesto je celková hodnota kritéria nižší než v případě nominálního nastavení cenových koeficientů kriteriální funkce v tab. 4.5. Je jasné, že cena za odchylku $c_{\text{res}} = 10000$ je příliš nízká.

Tabulka 4.9: Hodnoty kritéria pro test č. 1

Koeficient	Hodnota	Popis
J_{pst}	0	Cena za všechny nájezdy a výjezdy linky
J_{pch}	0	Cena za všechny změny obalů a produktů na lince
J_{res}	457350	Cena za odchylky od referenční hladiny zásob
J_{tr}	0	Cena za všechny provedené transporty
J	457350	Celková hodnota kritéria

Test č. 2	$c_{\text{res}} = 150000$
------------------	---------------------------

V tomto testu bude naopak hodnota cenového koeficientu c_{res} oproti nominální hodnotě značně navýšena. Tlak na co nejnižší hodnotu rozdílu od reference již převažuje snahu o plynulou výrobu, což je zřetelné na obr. 4.6. Na obr. 4.7 je patrná snaha optimalizátoru o nastavení průběhů zaplnění tak, aby průměrná hodnota okna (24 hodin) byla co nejnižší. Toho docílil kladnou odchylkou na počátku okna, která se postupně snižuje, až na konci okna je záporná, což je nejlépe vidět na obr. 4.7(d).



Obrázek 4.6: Gantův diagram produkce testu č. 2

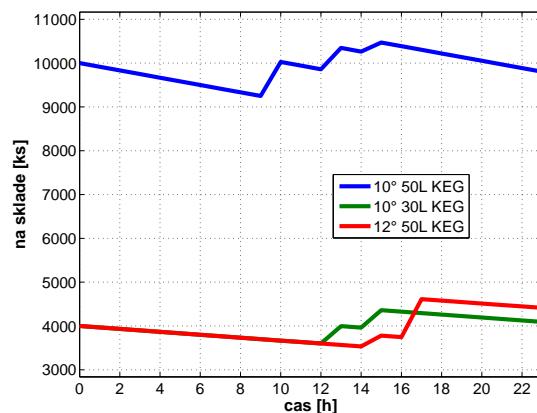
Test č. 3	$x_{\text{absres}} = 1000$
------------------	----------------------------

Hodnota x_{absres} udává míru penalizace absolutních odchylek¹¹. Hodnota 1000 značí, že pokud bude naskladněno 1000 kusů výrobku, jehož zásoba v daném skladu má být nulová, pak se cena takové odchylky bude rovnat ceně za jedno procento u relativních odchylek. Čím nižší tedy hodnota x_{absres} je, tím vyšší je cena za absolutní odchylku. Tomu odpovídá nesoustavná výroba na obr. 4.8 i nižší průběh zaplnění smíchovského skladu na obr. 4.9 v porovnání s průběhy nominálního nastavení (na obr. 4.5).

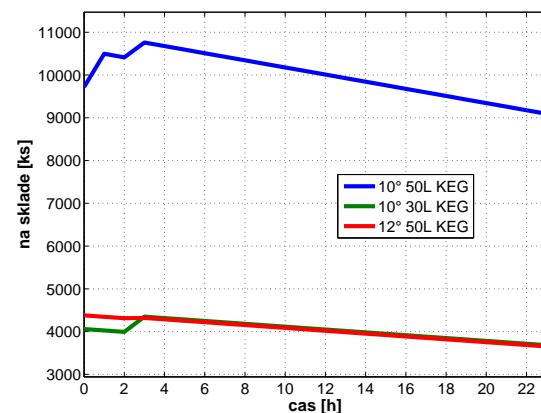
Test č. 4	$x_{\text{absres}} = 14000$
------------------	-----------------------------

Pokud bude oproti testu č. 3 hodnota x_{absres} zvýšena, zmenší se důraz na omezování absolutních odchylek při zachování ceny relativních odchylek. Vliv je možné pozorovat na obr. 4.10, kde zejména z obr. 4.10(a) je patrné, že optimalizátor již povolí určité čekání stočeného zboží na odvoz. U vyšších hodnot x_{absres} již je z hlediska cenové funkce levnější

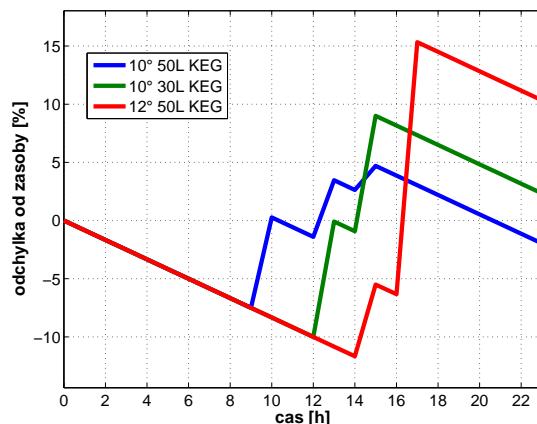
¹¹odchylek vztažených k nulové referenci



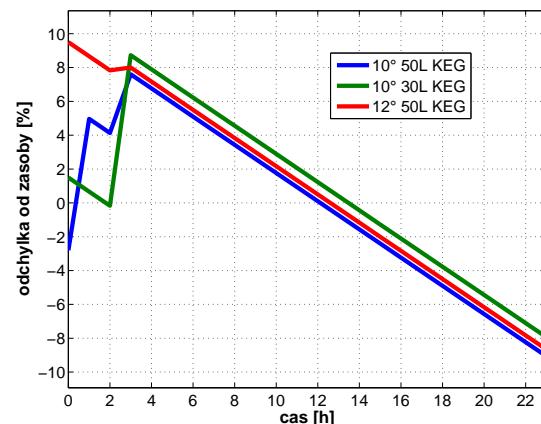
(a) Pondělí – produkty



(b) Úterý – produkty

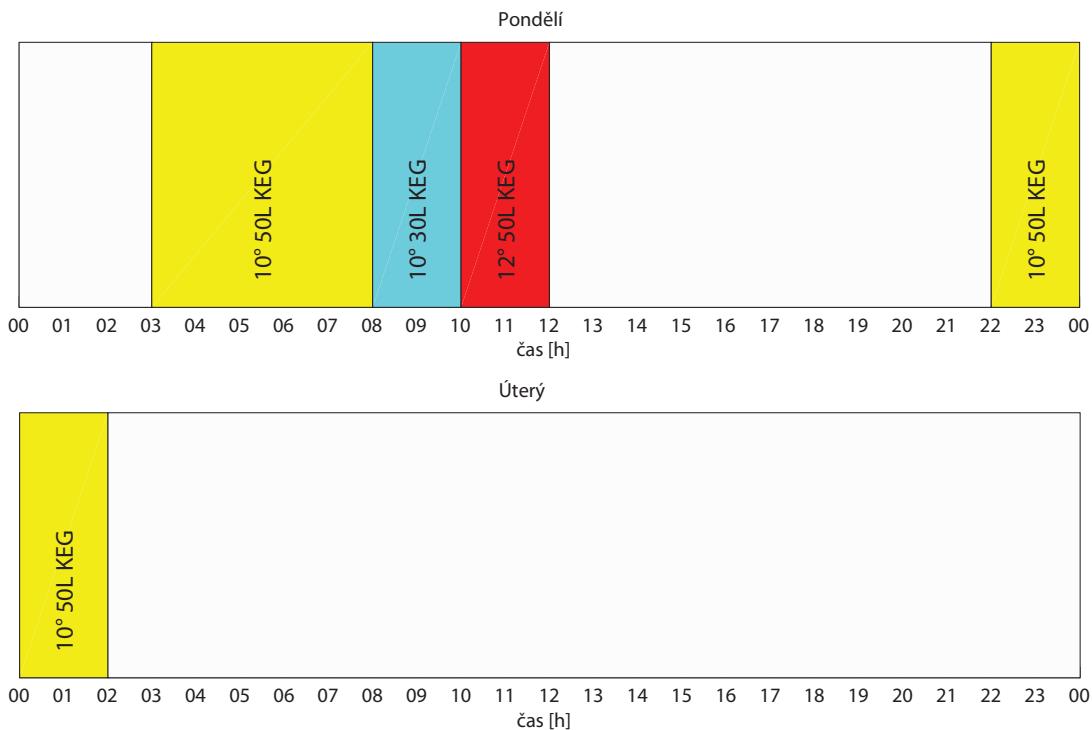


(c) Pondělí – odchylky produktů



(d) Úterý – odchylky produktů

Obrázek 4.7: Stavy produktů v DC Most a jejich odchylky od reference
při testu č. 2



Obrázek 4.8: Gantův diagram produkce testu č. 3

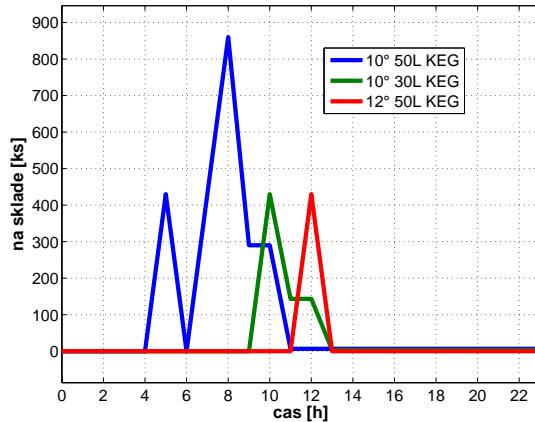
nevyrábět a netransportovat. To, že k tomuto dochází při hodnotě tak blízké nominální, může napovídat, že nominální hodnota je příliš vysoká.

Test č. 5	$c_{\text{pch}} = 5000$
------------------	-------------------------

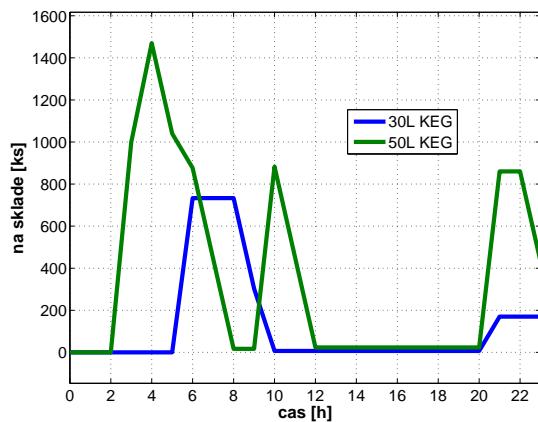
Vliv tohoto koeficientu je jasně demonstrován na obr. 4.11. Chod linky je sice nepřetržitý, ale dochází k častým změnám stáčeného produktu, což pomáhá lépe vykrývat odchylky od referenční hladiny zásob. Přílišná hodnota koeficientu c_{pch} by naopak vyústila v omezení produkce, protože podobně jako v testu č. 1, by byla vzhledem k ceně za sledování reference příliš drahá.

Test č. 6	$c_{\text{pst}} = 0$
------------------	----------------------

Při nulové penalizaci počtu nájezdů a výjezdů linky se nejvíce projeví vliv koeficientu c_{pst} – viz obr. 4.12. Výrobních bloků je stejně jako v nominálním nastavení, protože penalizace změn na lince je stále aplikována. Pokud by i hodnota c_{pch} byla nulová, pak by optimální výrobní proces vypadal jako na obr. 4.13.

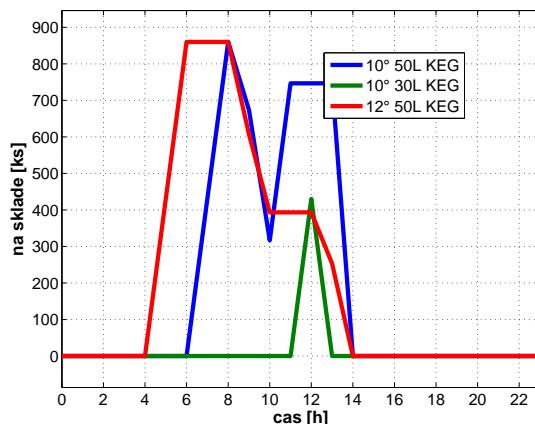


(a) Pondělí – produkty

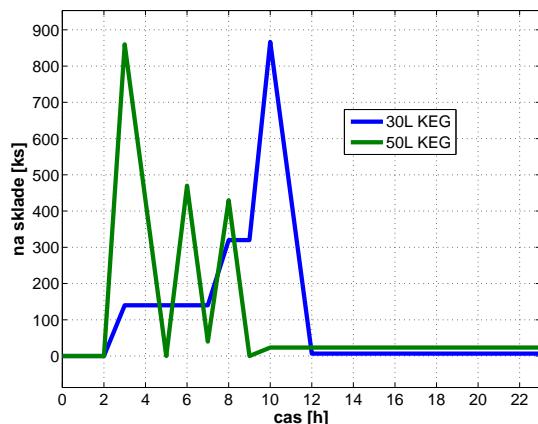


(b) Pondělí – obaly

Obrázek 4.9: Pondělní stavy produktů a obalů ve smíchovském skladu při testu č. 3

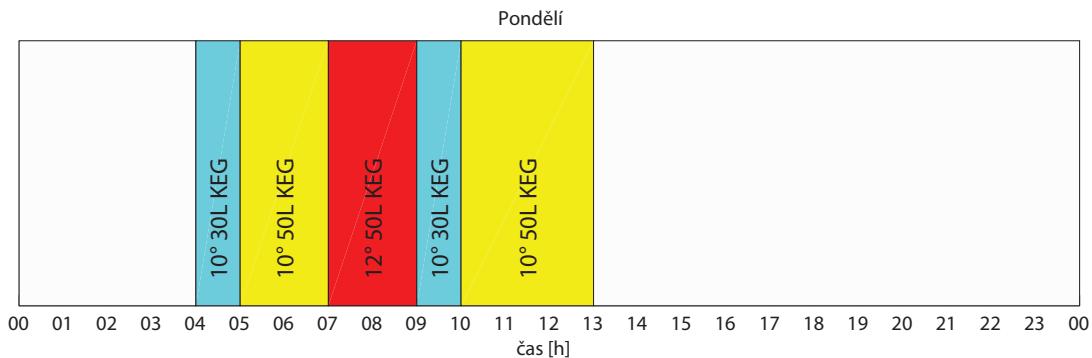


(a) Pondělí – produkty

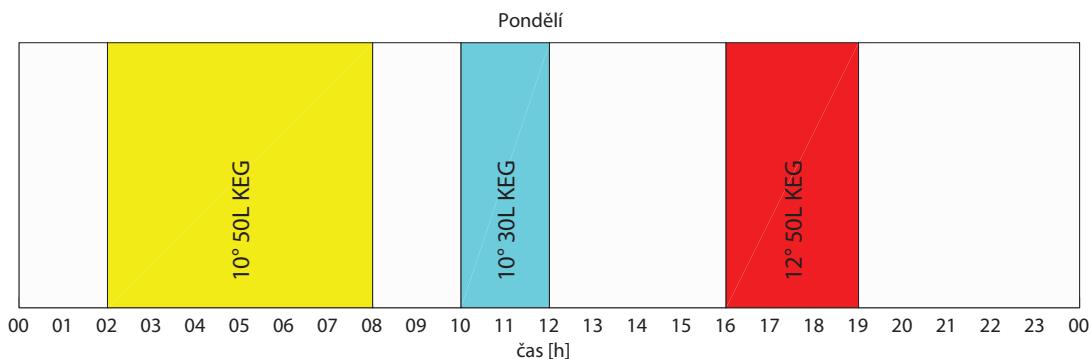


(b) Pondělí – obaly

Obrázek 4.10: Pondělní stavy produktů a obalů ve smíchovském skladu při testu č. 4



Obrázek 4.11: Gantttův diagram produkce testu č. 5



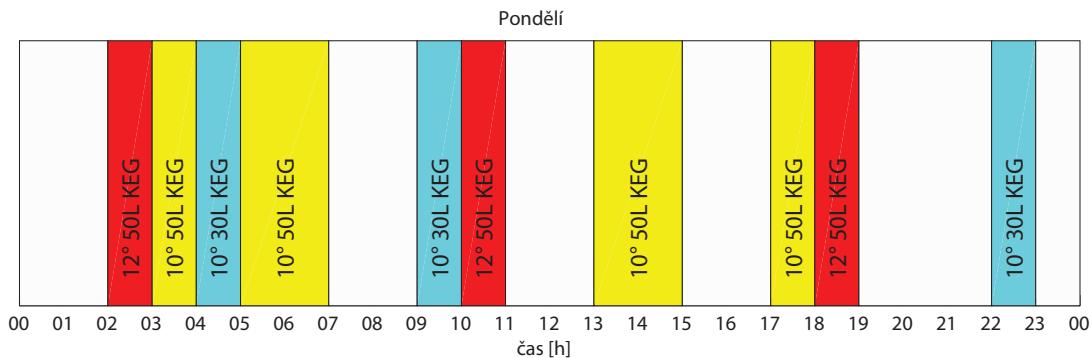
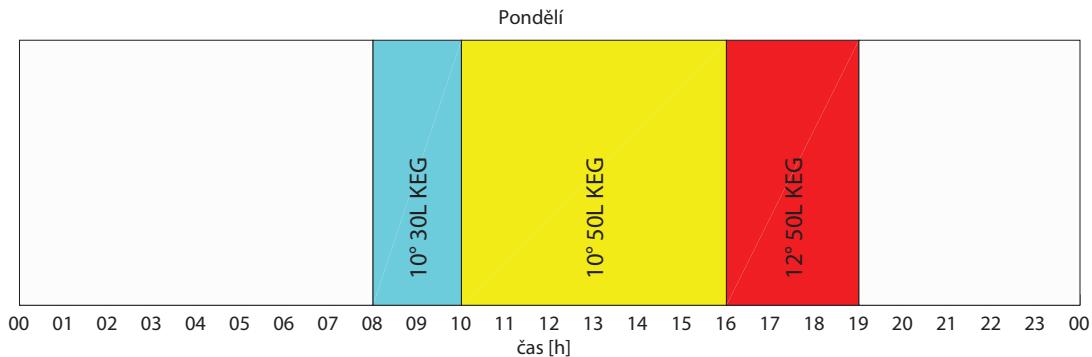
Obrázek 4.12: Gantttův diagram produkce testu č. 6

Test č. 7	$t_{\min} = 1000 = t_{\max}$
------------------	------------------------------

Nucené naplnění všech transportů se může projevit jak ve výrobě prodloužením produkce, aby byl dostatek zboží k naplnění nákladního vozu, tak ve vlastním počtu transportů, kdy je možné, že určitý transport vůbec neproběhne z důvodu nedostatku komodit k naložení. To lze pozorovat při porovnání obr. 4.14 a tab. 4.10 s výstupem při nominálním nastavení (obr. 4.2 a tab. 4.7).

Test č. 8	$l_{\text{ma}} = 1, i_{\text{ma}} = 1$
------------------	--

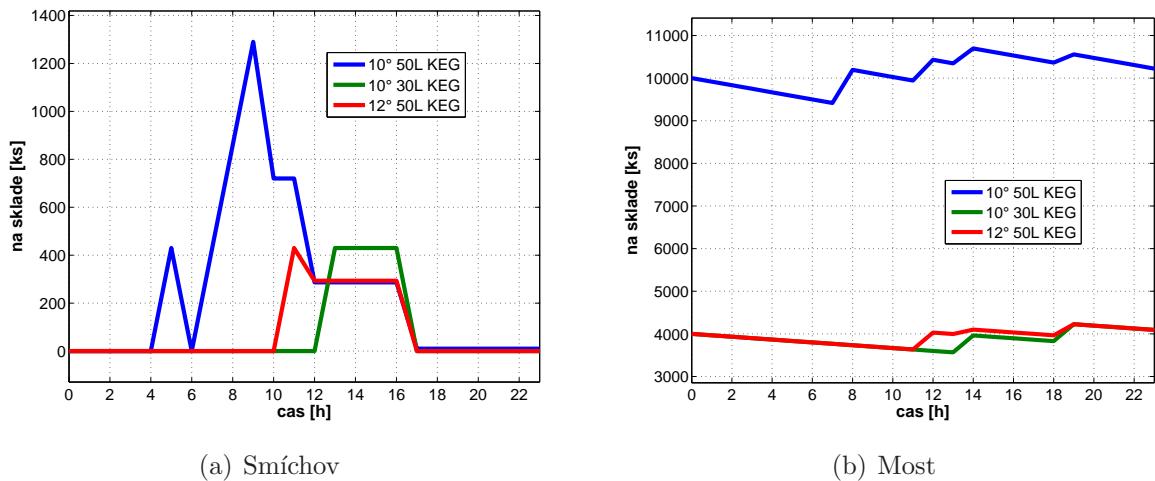
Nastavením hodnot l_{ma} a i_{ma} na 1 dojde k obyčejnému sečtení absolutních hodnot odchylek bez průměrování (na znaménko odchylky tak nebude brán zřetel). Optimalizátor se bude snažit, aby zaplnění skladů přesně kopírovalo referenci s nejmenšími výkyvy, co lze pozorovat na obr. 4.15(b). To však lze provést jen na úkor požadavku na co nejkratší setrvání stočených produktů ve smíchovském skladě (obr. 4.15(a)).

Obrázek 4.13: Gantttův diagram produkce testu č. 6 při $c_{\text{pch}} = 0$ 

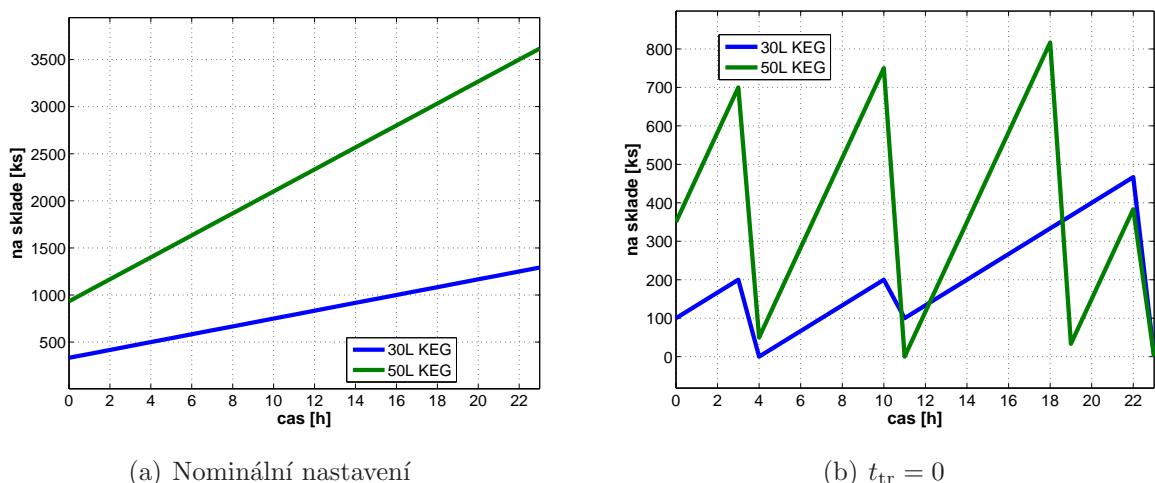
Obrázek 4.14: Gantttův diagram produkce testu č. 7

Test č. 9	$t_{\text{tr}} = 0$
------------------	---------------------

Cena transportu na jednu stranu podporuje snahu o co nejmenší produkci, protože co je stočeno, to se musí odvézt. Na druhou stranu z hlediska ceny dopravy nezáleží na času odvozu, proto působí proti snižování odchylky od reference jen nepřímo. Pokud by byl transport příliš drahý, pak by se nevyplatilo produkci odvážet a linku zavážet a tedy by se ani nestáčelo. Oproti tomu nulová cena transportu snižování odchylky od hladiny zásob nijak zvlášť usnadnit nemůže. Výjimkou je na první pohled nelogické chování, kdy pro snížení hodnoty kriteriální funkce optimalizace „uschoval“ produkty nebo obaly do nákladního vozu, kde jsou po celou dobu transportu. Jedná se pak o „dočasný bezplatný skladovací prostor“. Pokud by navíc bylo možné vozit na linku produkty a z linky obaly, pak by takovéto nastavení zapříčinilo neustálé transitory oběma směry za účelem snížit zaplnění skladů. Tento problém lze pozorovat na obr. 4.16.



Obrázek 4.15: Pondělní stavky produktů při testu č. 8



Obrázek 4.16: Srovnání úterních stavů obalů v DC Most pro test č. 9 a nom. nastavení

Tabulka 4.10: Transport ze smíchovského skladu do DC Most v pondělí
pro test č. 3

Čas ^a	10° 50L ^b	10° 30L ^c	12° 50L ^d	30L KEG ^e	50L KEG ^f	Celk. ^g
M 12:00	140	860	0	0	0	1000
M 13:00	1000	0	0	0	0	1000
M 15:00	1000	0	0	0	0	1000
M 18:00	140	0	860	0	0	1000
Celk.	2280	860	860	0	0	4000

^aČas provedení transportu

^bMnožství naložených padesátilitorvých sudů naplněných 10° pivem v kusech

^cMnožství naložených třicetilitrových sudů naplněných 10° pivem v kusech

^dMnožství naložených padesátilitorvých sudů naplněných 12° pivem v kusech

^eMnožství naložených prázdných třicetilitrových sudů v kusech

^fMnožství naložených prázdných padesátilitorvých sudů v kusech

^gCelkově naložené množství v kusech

Shrnutí

V této sekci byl ukázán vliv koeficientů kriteriální funkce na konkrétních příkladech. Lze tvrdit, že změny výstupu optimalizátoru byly v návaznosti na odchýlení tvaru účelové funkce od nominálního zcela logické. Chování optimalizátoru se tedy jeví validní.

Provedení série testů také vzbudila otázku, zda současně nominální nastavení je ideální. Pravdou ovšem je, že většina koeficientů kriteriální funkce je v tuto chvíli určena empiricky a bude nutné, aby zadavatel dodal co nejpřesnější jemu známé hodnoty.

4.6.3 Rychlosť optimalizace

Doba, za kterou solver dojde k optimálnímu řešení (potažmo řešení s přesně definovanou odchylkou od optima), závisí především na

- použitém solveru,
- výpočetním výkonu stroje,
- rozsahu problému,
- konkrétní podobě problému

- tvaru omezení,
- tvaru účelové funkce,
- typu proměnných.

Protože tvar omezení ani typ proměnných nelze ovlivnit (přinejmenším zatím) a všechny testy jsou prováděny na tomtéž stroji¹², lze porovnávat časovou náročnost výpočtu jen vzhledem k použitému solveru, rozsahu problému a tvaru účelové funkce.

Závislost časové náročnosti na tvaru účelové funkce

K prozkoumání této závislosti budou využity výsledky z testování vlivu hodnot koeficientů účelové funkce na výsledný optimální plán. Všechny tyto testy byly provedeny na solveru CPLEX a čas potřebný k získání optimálního řešení byl zaznamenán. Výsledky jsou zobrazeny v tab. 4.11. V případě, že jsou k dipozici výsledky i ze solveru SCIP, jsou v tabulce také zaznamenány.

Tabulka 4.11: Závislost časové náročnosti výpočtu na tvaru účelové funkce

Nast. ^a	CPLEX [s]	SCIP [s]	Popis
Nominální	31	541	Nominální nastavení koeficientů
Test č. 1	2	2	Koeficient c_{res} snížen na 10000
Test č. 2	1291	-	Koeficient c_{res} zvýšen na 150000
Test č. 3	6269	-	Koeficient x_{absres} snížen na hodnotu 1000
Test č. 4	37	183	Koeficient x_{absres} zvýšen na hodnotu 14000
Test č. 5	44	849	Koeficient c_{pch} snížen na 5000
Test č. 6	36	625	Koeficinet c_{pst} nastaven na 0
Test č. 7	76	-	Transport možné naložit pouze 1000 kusy
Test č. 8	91	-	Délka a interval průměrovacího okna nastavené na 1
Test č. 9	87	1012	Koeficient ceny transportu nastaven na 0

^aNastavení koeficientů účelové funkce.

Z hodnot v tab. 4.11 se dá usuzovat, že problém se správně navrženou kriteriální funkcí je i relativně málo časově náročný¹³. Nominální problém byl totiž vyřešen solverem

¹²Ve skutečnosti na dvou strojích, solver SCIP běží na obyčejném domácím počítači a cplex je provozován na školním serveru. Protože ale ani v jenom případě se nejedná o verzi schopnou paralelismu, pak výkony počítačů jsou řádově srovnatelné.

¹³Platí přirozeně pro tento konkrétní problém a nikoli obecně.

CPLEX za dobu kratší, než kterýkoliv z testů. Vyjímkou tvoří test č. 1, který ovšem nelze v žádném případě považovat za validní. Lze tedy tvrdit, že pokud vypočet trvá příliš krátkou nebo příliš dlouhou dobu, pak je pravděpodobně kriteriální funkce špatně navržena. U rozsáhlejších problémů by se však toto pravidlo dokazovalo obtížně.

Závislost časové náročnosti na použitém solveru a rozsahu problému

V tab. 4.11 je možné srovnat výkon solveru CPLEX se solverem SCIP. V této sekci bude srovnání rozšířeno ještě o solvery GLPK a LPSOLVE. Výsledné hodnoty jsou uvedeny v tab. 4.12. Chybějící hodnota značí, že se solveru nepodařilo najít optimální řešení v přijatelném čase. Pro testování byly zvoleny problémy o délce 24, 48, 72 a 96 vzorků s nominálním nastavením účelové funkce. Lze tedy pozorovat i závislost na rozsahu problému.

Tabulka 4.12: Závislost časové náročnosti výpočtu na použitém solveru

H^a	LPSOLVE [s]	GLPK [s]	SCIP [s]	CPLEX [s]
24	8	7	2	2
48	-	-	541	31
72	-	-	20889	3560
96	-	-	-	133030 ^b

^apočet vzorků

^bodchylka od optima 11%

4.6.4 Míra zjednodušení oproti reálnému problému

Mírou zjednodušení neboli relaxací problému není myšlen snížený počet komodit, skladů či linek v testovacím problému, neboť chování optimalizátoru by bylo shodné i pro problém většího rozměru. Za relaxaci se považuje opomenutí nebo approximace některých subprocesů a vlastností logistiky, jako je

- nájezd a výjezd linky,
- počet nakládacích míst,
- nakládání více vozů současně.

Nájezdu a výjezdu linky byla věnována veliká pozornost při modelování procesu v kap. 3, proč je tedy nezahrnout? V případě lichoběžníku i systému druhého řádu se jedná o aproximaci komplikující výsledný systém, což už při takto rozsáhlém problému není žádoucí. Hlavním důvodem však je, že v obvyklém skutečném plánu stáčení dojde k náběhu a odstavení pouze jednou na počátku a na konci produkčního týdne. V takovém případě má pominutí nájezdů na kvalitu optimalizace vliv minimální.

Počet nakládacích míst je v současné podobě optimalizátoru omezen na hodnotu 1. Toto omezení dovoluje použití binárních proměnných na místo obecně celočíselných, což může urychlit výpočet. V tab. 4.13 jsou uvedeny doby potřebné pro nalezení optimálního řešení pro solvery CLPLEX a SCIP v případech s použitím celočíselných a binárních proměnných pro popis transportu.

Tabulka 4.13: Závislost časové náročnosti výpočtu na způsobu popisu transportu

Solver	SCIP [s]		CPLEX [s]		
	H^a	bin^b	int^c	bin	int
48	541	560	31	28	
60	2169	5705	115	150	
72	20889	19590	3560	872	
96	-	-	133030 ^d	124895 ^e	

^apočet vzorků

^bbinární proměnné

^cceločíselné proměnné

^dodchylka od optima 11%

^eodchylka od optima 15%

Navzdory předpokladům nezpůsobilo užití celočíselných proměnných pro transport v testech uvedených v tab. 4.13 optimalizátoru namísto binárních významnou komplikaci problému. Lze tedy počítat s variantou, při které bude více transportů v tentýž vzorek umožněno. Počet transportů je pak omezen počtem nakládacích míst s přihlédnutím na dobu nakládání. Pokud by doba nakládky byla 30 minut, vzorkovací perioda 1 hodina a nakládacích míst 5, pak by během vzorku mohlo být odbaveno celkem 10 transportů (na všech trasách u příslušného skladu). Na druhou stranu velké množství transportovaného zboží naráz by způsobilo značné výkyvy v hladině zásob skladů, což je obecně nevýhodné. Proto je pravděpodobné, že optimalizátor přes možnost vysílat transportů naráz víc, použije většinou pouze jeden.

Z hodnot v tab. 4.13 také vyplývá, že solver CPLEX dokáže s obecně celočíselnými hodnotami pracovat mnohem lépe, než solver SCIP. Záleží však také na konkrétní podobě problému, takže generalizovat, že použití celočíselných proměnných na místo binárních ušetří čas, nelze.

Kapitola 5

Závěrečné vyhodnocení

Tato práce si vzala za cíl prozkoumat možnosti usnadnění a zefektivnění plánovacího procesu společnosti Pivovary Staropramen, a. s. Současný způsob plánování se potýká zejména se značnou decentralizovaností, která v podstatě globální optimalitu ani nepřipouští. Problém je tak obsáhlý, že ani není možné, aby vše řešil jediný člověk. Jedním z výsledků této práce je také zjištění, že i pro jediný výpočetní stroj je to těžký oršek. Základním úskalím optimalizace tohoto procesu je totiž právě jeho rozsah. Přestože pro řešení byly testovány prostředky využívající nejpokročilejších heuristických technik v tomto oboru, stále se jedná o prohledávání prostoru možných řešení a ten roste s každou proměnnou exponenciálně. Každý zavedený produkt, sklad nebo linka nekomplikuje problém jen zlomkově, spíše ho násobí. Odtud plyne jasný požadavek na co největší optimalizaci popisu problému z hlediska rychlosti řešení, které lze docílit vhodnými kompromisy, jako je například různé vzorkování výroby a transportu nebo použitím pokročilejších metod zápisu problému. Jednou z možností je například použití tzv. Special Ordered Sets (SOS, [11]) pro zápis vektoru proměnných, z nichž pouze jediná může být nenulová – tímto způsobem by bylo možné nahradit např. výrobní vektor souborem spojitých proměnných definovaných jako SOS. Solvery pak dokáží s takto definovanou množinou proměnných pracovat efektivněji pomocí speciálních algoritmů.

Další skutečnost byla, že takto rozsáhlý problém si žádá neméně velké objemy dat. K jejich získání byly přes naprostou vstřícnost a ochotu zadavatele věnovány celé měsíce a to právě především z důvodu decentralizace. Přes veškerou snahu ani v okamžik dokončení této práce nejsou k dispozici všechna potřebná data. Určité informace chybí i zadavateli (například predikce průběhu stahování prázdných obalů z trhu). Tyto mezery byly doplněny daty vytvořenými obvykle úvahou a bude dále na zadavateli, zda to bude

postačující.

Platí, že výstup optimalizátoru je vždy optimální vzhledem k nastavení cenové funkce a vstupním veličinám. Je tedy prioritou pro další období projektu získat co nejkvalitnější data pro určení cenových koeficientů, které nelze určit jinak než empiricky; dále také identifikace cen, které jde stanovit přesně.

V tuto chvíli je připravena kostra optimalizátoru vhodná pro další testování a případné rozšíření. Implementace je provedena ve vývojovém prostředí MATLAB se školní licencí za použití toolboxu YALMIP, jehož licence neumožňuje distribuci s komerčním softwarem. Řešení samotné optimalizace probíhalo z větší části na komerčním solveru CPLEX – opět se školní licencí. Přestože k dokončení optimalizačního nástroje zbývají ještě roky práce, je třeba se zamyslet nad tím, jakým způsobem bude konečný nástroj provozován. Největší flexibilitu zajistí současné uspořádání MATLAB & YALMIP & CPLEX, avšak použití MATLABu nevyhovuje z hlediska uživatelského komfortu ani výkonu. Solver CPLEX bude nutné použít v každém případě, neboť tvorba dedikovaného solveru by jistě vyšla dráž, než koupě licence. Funkčnost prostředí MATLABu, který je určen zejména pro vývoj a testování, by mohl nahradit software s příjemnějším uživatelským rozhraním vytvořeným například v jazyce C#.

Krokem, který však bude muset předcházet rozhodnutí o koupi jakékoli licence, bude vypracování studie s konkrétními hodnotami možných úspor při aplikaci optimalizátoru. K tomuto bude potřeba více zdrojů, než bylo k dispozici pro tuto práci, a to zejména dlouhodobý přístup k solveru CPLEX, neboť testy mohou zpočátku trvat i několik dní. Tyto testy budou ovšem určeny spíše pro potřebu managementu za účelem získání souhlasu vedení k případným výdajům za projekt. Faktem je, že optimalizátor se správnou podobou cenové funkce optimální plán určí, otázkou zůstává, jak dlouho mu to bude trvat.

Přestože tato práce se zabývá téměř výhradně matematickým programováním, neznamená to, že by ostatní metody byly pro tento problém zavrženy. Rozhodně zajímavé by bylo zkuskit aplikovat meta-heuristickou metodu genetického programování. Nesporou výhodou by byla možnost definice libovolně složité kriteriální funkce bez vlivu na náročnost problému. Pokud by byl vhodně vyřešen problém popisu jedince a způsobu křížení, pak by bylo možné získat množství suboptimálních řešení, pomocí kterých by byl prořezán strom popisující prostor všech řešení a urychleno řešení exaktními metodami.

Výsledkem této práce není a ani nemohl být všeobjímající perfektně fungující optima-

lizátor. Spíše se jedná o návrh, jakým směrem se práce bude ubírat dále. Projekt takových rozměrů si bude žádat ještě několik let vývoje, proto bylo rozhodnuto zažádat o grant Ministerstva průmyslu a obchodu. Tím se otevřou možnosti pro intenzivnější spolupráci se zadavatelem.

Výhodou odvětví matematické optimalizace je velice rychlý vývoj výpočetní techniky a zejména dnešní trend paralelizace, která velice svědčí např. metodě větví a mezí. Je možné, že co nám dnes z hlediska výkonu počítačů přijde takřka nemožné, za pár let půjde zcela bez problémů. Potíž je ovšem v tom, že naše nároky stoupají snad ještě rychleji, než roste schopnost je uspokojit. Prokletí rozdílnosti tak nikdy nezmizí.

Literatura

- [1] DVOŘÁK, M. *Modelování logistických procesů v Pivovarech Staropramen, a. s.* Bakalářská práce, České vysoké učení technické v Praze, Fakulta elektrotechnická, Katedra řídicí techniky. 2007.
- [2] TURZA, P. *Modelování logistických procesů Pivovaru Staropramen, a. s.* Bakalářská práce, České vysoké učení technické v Praze, Fakulta elektrotechnická, Katedra řídicí techniky. 2006.
- [3] FRANKLIN, G. F., POWELL, J. D. AND EMAMI-NAEINI, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 5th edition. Prentice Hall, 2006.
- [4] ŠTECHA, J. *Optimální rozhodování a řízení*. Vydavatelství ČVUT, 2000.
- [5] ŠÚCHA, P. Celočíselné lineární programování. 2004.
URL http://dce.felk.cvut.cz/hanzalek/_private/ref/sucha_ilp.pdf
- [6] BOYD, S. AND VANDENBERGHE, L. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [7] VANDERBEI, J. R. *Linear programming: foundations and extensions*. 2nd edition. Springer Science+Business Media, Inc., 2001.
- [8] KELLY, J. P. *Meta-Heuristics: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [9] ANTSAKLIS, P. J. AND MICHEL, A. N. *A Linear Systems Primer*. Birkhäuser, 2007.
- [10] LÖFBERG, J. YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB.
IN *Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, 2004.
URL <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>

- [11] BEALE, E. M. L. AND FORREST, J. J. H. Global optimization using special ordered sets. *Mathematical Programming*, vol. 10, 1976: p. 52–69.

Příloha A

Nomenklatura

c_M	Spotřeba produktů a počet vrácených obalů v každém kroku do každého skladu (str. 61)
\mathcal{L}	Matice výroby diskrétního modelu pro celý horizont (str. 57)
\mathcal{S}	Matice počátečního stavu skladování diskр. modelu pro celý horizont (str. 57)
\mathcal{S}	Matice skladování diskrétního modelu pro celý horizont (str. 56)
\mathcal{T}	Matice transportu diskrétního modelu pro celý horizont (str. 56)
$c(t)$	Vektor toku obalů na linku (str. 14)
C_D	Matice kapacit linek diskrétního modelu (str. 58)
C_{ef}	Matice efektivních kapacit linky (str. 16)
C_{nom}	Matice nominálních kapacit linky (str. 16)
D	Matice vzdáleností skladů udávaných v hodinách (str. 34)
L	Produkční matice (str. 18)
$L(t)$	Matice výroby (str. 36)
$l(t)$	Výrobní vektor (str. 14)
$l_t(t)$	Transformovaný výrobní vektor (str. 26)
P	Matice příslušnosti linek (str. 36)

$\mathbf{p}(t)$	Vektor toku produktů z linky (str. 14)
\mathbf{P}_{Dd}	Matice přiřazení produkce linek ke skladům diskrétního modelu pro celý horizont (str. 58)
\mathbf{P}_{D}	Matice přiřazení linek ke skladům diskр. modelu pro celý horizont (str. 57)
\mathbf{R}	Matice směřování (str. 37)
\mathbf{R}_{D}	Matice směřování tras diskrétního modelu pro celý horizont (str. 58)
\mathbf{R}_{E}	Matice receptury (str. 15)
\mathbf{R}_{L}	Matice směřování pro nakládání (str. 37)
\mathbf{R}_{U}	Matice směřování pro vykládání (str. 37)
$\mathbf{S}(t)$	Matice skladování (str. 35)
$\mathbf{s}_l(t)$	Vektor okamžité produkce výrobků a spotřeby obalů modelem linky (str. 14)
$\mathbf{t}(t)$	Vektor toku transportovaných produktů a obalů po určité trase (str. 33)
$\mathbf{T}_{\text{L}}(t)$	Matice transportu – nakládání (str. 36)
$\mathbf{t}_{\text{L}}(t)$	Vektor toku nakládaných produktů a obalů na určité trase (str. 33)
$\mathbf{T}_{\text{PALP}}(t)$	Transformační matice ks → PALP (str. 31)
$\mathbf{T}_{\text{U}}(t)$	Matice transportu – vykládání (str. 36)
$\mathbf{t}_{\text{U}}(t)$	Vektor toku vykládaných produktů a obalů na určité trase (str. 33)
\mathbf{W}	Matice produkčních ztrát (str. 17)
C_s	Kapacita skladu (str. 31)
H	Délka časového horizontu plánu (str. 62)
m	Počet komodit (produktů a obalů) (str. 11)
m_c	Počet obalů (str. 11)
m_p	Počet produktů (str. 11)

n_t	Počet tras (str. 35)
p	Počet linek (str. 30)
$r(t)$	Vstupní signál transformace (str. 20)
r_L	Počet tras vedoucích z určitého skladu (str. 30)
r_U	Počet tras vedoucích do určitého skladu (str. 30)
$s_{PALP_c}(t)$	Celkově uskladněné množství v určitém skladě v paletových místech (str. 31)
$s_{PALP_c}(t)$	Vektor uskladněných množství v určitém skladě v kusech (str. 30)
$s_{PALP_c}(t)$	Vektor uskladněných množství v určitém skladě v pal. místech (str. 31)
T_d	Dopravní zpoždění linky (str. 17)
T_l	Doba nakládky na transport (str. 33)
T_n	Doba náběhu linky (str. 17)
T_o	Doba překryvu (str. 27)
T_{td}	Časová vzdálenost určitých skladů v hodinách (str. 33)
$z(t)$	Transformovaný signál (str. 20)

Příloha B

Obsah přiloženého CD

- Diplomová práce ve formátu PDF,
- výstupní PDF soubory generované optimalizátorem.