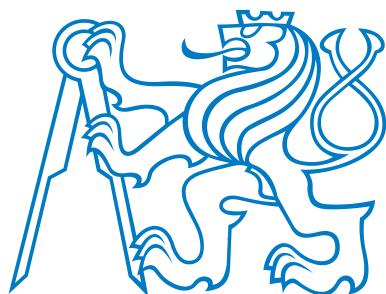


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ
KATEDRA ŘÍDICÍ TECHNIKY



DIPLOMOVÁ PRÁCE

Posunování pólů
kvadratickým kritériem

Jiří Cigler

2009

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Katedra řídicí techniky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Jiří Cigler**

Studijní program: Elektrotechnika a informatika (magisterský), strukturovaný
Obor: Kybernetika a měření, blok KM1 - Řídicí technika

Název tématu: **Přemístění jednotlivých pólů kvadratickým kritériem**

Pokyny pro vypracování:

Pro lineární časově invariantní diferenciální nebo diferenční systém ukažte, jak stavovou zpětnou vazbou založenou na minimalizaci kvadratického kritéria jakosti je možno přemístit vybraný pól systému do zvolené polohy, aniž se změní ostatní póly.

Seznam odborné literatury:

- P.J. Antsaklis, A.N. Michel: A Linear Systems Primer. Birkhäuser, Boston 2007. ISBN-3: 978-0-8176-4460-4
V. Kučera, F.J. Kraus: Jak kvadratickým kritériem jednotlivé póly přemístit. In: Proc. 12th Conference Process Control, Tatranske Matliare 1999, Vol.2, 1-5. ISBN 80-227-1228-0

Vedoucí: Prof.Ing. Vladimír Kučera, DrSc.,Dr.h.c.

Platnost zadání: do konce zimního semestru 2009/10

prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry




doc. Ing. Boris Simák, CSc.
děkan

V Praze dne 27. 2. 2009

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze, dne: 11.5.2009...

Podpis: *Cigler*

Poděkování

Na úvod práce bych rád vyjádřil dík těm, kteří měli nemalou zásluhu na vytvoření této práce. Velký dík patří zejména prof. Ing. Vladimíru Kučerovi, DrSc., Dr.h.c. za všeobecnou pomoc a cenné rady, které mi poskytoval v průběhu četných konzultací. Dále děkuji své přítelkyni Kateřině Málkové za korekce při psaní tohoto textu a své rodině za klid a podporu při práci a při studiu.

Abstrakt

Kvadratická optimalizace je vhodným nástrojem pro návrh lineárních regulačních obvodů mnoharozměrových systémů. Při návrhu je ovšem významná zejména dynamika výsledného obvodu, která je dána polohou jeho pólů. Souvislost mezi váhovými maticemi kvadratického kritéria a polohou pólů optimálního regulačního obvodu není zřejmá ani jednoznačná. V této práci bude uveden postup, jak pro požadovanou sadu pólů uzavřené smyčky zvolit váhové matice tak, aby byly dosáhly posunutí pólů otevřené smyčky do zvolené polohy. Postup je iterativní, dochází vždy k posunutí jednoho reálného nebo dvojice komplexně sdružených pólů. Ostatní póly zůstanou v původní poloze. Požadovaná poloha posunovaného pólů není libovolná. Budou uvedeny matematické předpisy vyjadřující jednotlivá omezení, na několika příkladech bude ukázán tvar omezení. Výsledný zpětnovazební obvod má poté vždy rychlejší póly s menším tlumením. Numerické příklady budou ilustrovat přímočarost a systematičnost tohoto návrhu.

Abstract

A quadratic optimization is an appropriate tool for designing linear multivariable control systems. However the dynamics of the resulting closed loop is very important for the evaluation of control quality. The dynamics is determined by the positions of closed-loop poles. The relationship between the weighting matrices in quadratic criteria and location of the closed-loop poles of the optimal control system is not clear, transparent and unique. A method for shifting open loop poles to prescribed closed loop locations via choosing appropriate matrices in quadratic performance index is presented. This method is iterative – only one real pole (or complex conjugate pair of poles) is shifted at each step. Other poles remain in the original positions. Poles could not be shifted to an arbitrary location. The type of shifted pole defines constraints for the desired shift. Mathematical formulas representing such constraints will be presented and several examples will illustrate the shape of the region into which the poles can be shifted. The allowable shifts may result in a faster and dampening feedback. Numerical examples are given to illustrate the simplicity of the presented method.

Obsah

Značení	8
1 Úvod	9
2 Teoretický úvod	11
2.1 Stavová zpětná vazba	11
2.1.1 Struktury řízení	11
2.1.2 Umístění pólů stavovou zpětnou vazbou	12
2.2 Kvadratický optimální řízení	14
2.2.1 Analytické řešení Riccatiho rovnice	19
2.2.2 Poloha pólů uzavřené smyčky	21
2.2.3 Dvojí význam Hamiltoniánu	21
3 Prerekviziity k posunování pólů	23
3.1 Transformace do Jordanova kanonického tvaru	24
3.2 Iterativní posunování pólu po pólu	25
3.2.1 Stejné matice R_i	25
3.2.2 Různé matice R_i	26
4 Posunování reálných pólů	28
4.1 Posunování jednoduchého reálného pólu	28
4.2 Posunování násobného reálného pólu	33
5 Posunování komplexně sdružených pólů	37
5.1 Případ $ \omega = 1$	40
5.2 Případ $\omega = 0$	41
5.3 Případ $0 < \omega < 1$	47
5.4 Řešení algebraické Riccatiho rovnice	50
6 Závěr	52
Literatura	54
Seznam obrázků	56

Značení

Proměnné a funkce budou označovány matematickou italikou – například x nebo f . U všech se předpokládá vektorový nebo maticový charakter. Z kontextu bude zřejmé, zda se jedná o matici nebo vektor. Vektor implicitně považujeme za sloupcový. Závislost na čase je vždy explicitně vyjádřena – například $u(t)$. Pokud bude značení časové závislosti vypuštěno (z důvodu přehlednosti textu), bude na to čtenář upozorněn.

Definiční obory, jako obor reálných čísel \mathbb{R} nebo komplexních čísel \mathbb{C} , budou značeny velkými písmeny o dvou tazích.

Pro indexování prvku ve vektoru budou použity kulaté závorky. Číslo v závorce udává daný index. Například vektor b má první prvek $b(1)$.

Názvy funkcí, operátory a jednotky budou označovány antikvovým písmem např. derivace podle proměnné x bude $\frac{df}{dx}$ nebo minimum $\min\{\}$.

Komplexně sdružené číslo, vektor nebo matici budeme označovat s pruhem např. k vektoru w je komplexně sdruženým vektorem \bar{w} . Reálnou a imaginární část budeme značit $\text{Re}w$ resp. $\text{Im}w$.

Transpozice a hermitovská transpozice matice bude značena rovněž antikvovým písmem např. $\overline{A}^T = A^H$. Pokud bude u matice uvedena hermitovská transpozice, potom daná matice je z oboru komplexních čísel.

Kapitola 1

Úvod

Druhá polovina minulého století přinesla do teorie řízení nové přístupy založené na stavaovém popisu systémů. Oproti klasickým metodám, kdy je úlohou navrhnut konstanty regulátoru pro systém daný vnějším popisem, využívá moderní teorie řízení vnitřní popis a problém návrhu regulátoru formuluje jako optimalizační úlohu. Ladící parametry návrhu jsou v prvním případě konstanty regulátoru (z nich lze uspokojivě vypočítat strukturu pólů uzavřené smyčky a odhadnout odezvy systému), zatímco v druhém případě jsou nastavovány parametry kritéria optimalizace.

Kvadratický optimální regulátor se řadí mezi hlavní výsledky moderní teorie řízení. V jeho kritériu se objevují kvadratické stavů a vstupů do systému, které jsou vážené příslušnými váhovými maticemi. Minimalizujeme tedy kritérium

$$J = \int_0^{\infty} x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)dt.$$

Váhové matice poté slouží jako ladící parametry pro návrh regulátoru. Je však obtížné dosáhnout požadované dynamiky, protože vztah mezi váhovou maticí a polohou pólů regulačního obvodu je komplikovaný. Návrh poté probíhá metodou pokusů a omylů, kdy měníme váhové matice až do té doby, kdy dostáváme odezvy podle našich představ. Obvykle začínáme od diagonálních váhových matic, až poté volíme komplikovanější matice. Tento cyklický postup může být rychle proveden – pro systémy s málo stavů, ale pro větší systémy jsou vazby v složitější a volba váhových matic může trvat hodně času.

Důvodem, proč návrhář regulačního obvodu sáhne po kvadratickém kritériu, jsou příznivé vlastnosti kvadratických optimálních obvodů. Jedná se zejména o asymptotickou stabilitu, která je za určitých podmínek vždy splněna. Další velkou výhodou jsou i robustní vlastnosti, amplitudová bezpečnost je v intervalu $(1/2, \infty)$ a fázová bezpečnost je alespoň 60 stupňů (Anderson a Moore, 2007, Sekce 5.4). Tyto vlastnosti převyšují důležitost zvolených váhových matic.

Jinou metodou návrhu regulačních obvodů využívající vnitřní popis je metoda umísťování pólů. Poloha pólů je v tomto případě ladícím parametrem, který přímo souvisí s požadovanou dynamikou. Jisté komplikace této metody jsou, když měníme polohu celé sady pólů otevřené smyčky. Potom se odezva mění nekontrolovaným způsobem.

Nabízí se obě metody kombinovat – umísťovat póly kvadratickým kritériem. Problém, jak zvolit váhové matice tak, abychom dosáhli požadované sady pólů, je starý skoro jako kvadratický optimální řízení samotné. Setkáváme se s dvěma přístupy.

Umístění do dané oblasti v komplexní rovině Umístění do zvolené poloroviny bylo odvozeno v (Anderson a Moore, 1969), do zvoleného kruhu v komplexní rovině v (Furuta a Kim, 1987), do oblasti omezené hyperbolou v (Kawasaki a Shimemura, 1983) a do zvoleného sektoru komplexní roviny v (Hench a další, 1998).

Přesné umístění pólů Jedná se o komplikovanější metodu. Setkáme se s různými přístupy k řešení tohoto problému, které jsou vhodné pro různé druhy systémů. Prakticky všechny metody přistupují k řešení nejprve diagonalizací systému a následnou analýzou buď Hamiltonovy matice (Solheim, 1972), (Kučera a Kraus, 1999), (Kraus a Kučera, 1999) a (Saif, 1989) nebo umístění vlastních vektorů uzavřené smyčky (Alexandridis a Galanos, 1987), případně analýzou matice dynamiky uzavřené smyčky (Duplaix a další, 1994) a (Franceschi a další, 1995). Jiný přístup je popsán v (Amin, 1985), kdy jsou posunovány reálné části pólů mnoharozměrových systémů opakovaným výpočtem Lyapunovovy rovnice nebo v (Sugimoto a Yamamoto, 1989), kde je s pomocí polynomiální zlomkové reprezentace systému načrtnuta maximální přípustná oblast, kam lze posunout póly kvadratickým kritériem.

Tato práce vychází z (Kučera a Kraus, 1999) a rozšiřuje dosavadní výsledky na systémy s více vstupy. Posunování pólů bude realizováno pól po pólu (v každé iteraci se přemísťuje pouze jeden pól, ostatním je poloha zachována). Cílem bude nejenom najít vztahy mezi váhovými maticemi kritéria a polohou posunovaného pólů, ale zejména vymezit oblast, kam lze kvadratickým kritériem jednotlivé póly přemístit pro případ reálných nebo komplexně sdružených pólů.

Práce bude organizována následovně: nejprve bude v kapitole 2 uveden teoretický úvod, kde budou zavedeny pojmy z oblasti umísťování pólů a kvadratický optimálního řízení potřebné pro další odvozování. Následovat bude kapitola 3 prezentující základní matematické formalizmy používané při posunování pólů. Poté bude v kapitole 4 rozebráno posunování reálných pólů, následováno kapitolou 5 o přemísťování komplexně sdružených dvojic pólů. Celou práci uzavře závěr v kapitole 6.

Od čtenáře tohoto textu se očekává znalost lineární algebry (matice, vektor, vektorový prostor, determinant, lineární zobrazení, vlastní vektor, Jordanův kanonický tvar, matice speciálních typů; čerpat lze z (Krajník, 2006)), matematické analýzy (diferenciální počet, optimalizační metody, variační počet; čerpat lze z (Hamhalter a Tišer, 2005) a (Štecha, 2000)) a teorie dynamických systémů (stavový popis systému, stabilita, řiditelnost, pozorovatelnost, stabilizovatelnost, detekovatelnost; čerpat lze z (Antsaklis a Michel, 2007)).

Kapitola 2

Teoretický úvod

2.1 Stavová zpětná vazba

2.1.1 Struktury řízení

Mějme lineární časově invariantní diferenciální dynamický systém popsaný rovnicemi

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}\tag{2.1}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ označuje stav systému, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ je vstup do systému a $y(t) \in \mathbb{R}^p$ je výstup systému.

K řízení tohoto systému lze použít dvě základní struktury.

Přímá vazba (feedforward, open-loop control) V sérii před systémem je zapojen kompenzátor (systém), který mění dynamické vlastnosti otevřené smyčky. Jedná se o velmi jednoduchou strukturu, která je ovšem velice náchylná na sebemenší chyby v modelu systému a vnější poruchy. Další její nevýhodou je fakt, že nedokáže stabilizovat nestabilní systém.

Zpětná vazba (feedback, closed-loop control) Oproti předchozí struktuře se jedná o vyšší stupeň řízení, kdy je využívána informace o aktuální hodnotě výstupu $y(t)$ příp. stavu $x(t)$ k výpočtu vstupu $u(t)$. Vyšší složitost a cena této struktury naopak přináší schopnost do jisté míry kompenzovat poruchy a neurčitosti modelu systému. Navíc lze pomocí zpětné vazby stabilizovat i nestabilní systémy.

V našem textu se budeme zabývat výhradně zpětnou vazbou využívající informaci o stavu $x(t)$, tedy *stavovou zpětnou vazbou*. V případě, že lze měřit pouze hodnoty výstupu $y(t)$, musíme sestrojit pozorovatel stavu, jehož výstupem je odhad stavů systému.

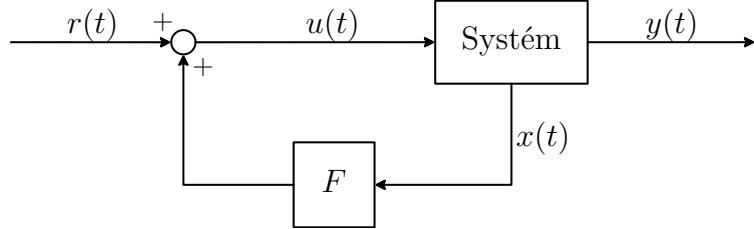
Definice 2.1 (Zákon řízení): Pro systém (2.1) je zákon řízení formulován jako

$$u(t) = Fx(t) + r(t),\tag{2.2}$$

kde $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice zesílení a $r(t) \in \mathbb{R}^m$ je externí vstup. ▶

Výsledný systém se stavovou zpětnou vazbou popsaný rovnicemi (2.3) je na obrázku 2.1. Linearita se i po zapojení zpětné vazby zachovala.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + BF)x(t) + Br(t), \\ y(t) &= (C + DF)x(t) + Dr(t).\end{aligned}\quad (2.3)$$



Obrázek 2.1: Lineární stavová zpětná vazba

Matice zpětné vazby F pozměnila chování uzavřené smyčky, došlo k posunutí pólů a také ke změně výstupní matice systému.

2.1.2 Umístění pólů stavovou zpětnou vazbou

Dále se budeme zabývat problémem, jak navrhnut stavovou zpětnou vazbu (2.2) tak, aby výsledný zpětnovazební systém měl požadovanou sadu pólů resp. aby matice $A + BF$ měla požadovaná vlastní čísla. Nová sada pólů je obvykle asymptoticky stabilní ($\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = 1 \dots n$, kde λ_i jsou vlastní čísla matice $A + BF$). Bez újmy na obecnosti nebudeme uvažovat externí vstup $r(t)$ a omezíme se na analýzu systému

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t). \quad (2.4)$$

Věta 2.1: *Mějme matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, potom existuje matice $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ taková, že n vlastních čísel matice $A + BF$ bude nabývat libovolných reálných nebo komplexně sdružených hodnot tehdy a jen tehdy, když je systém $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ řiditelný.*

Důkaz: Nutná podmínka: Větu dokážeme sporem. Předpokládejme, že n vlastních čísel matice $A + BF$ je libovolně rozmištěno a zároveň, že systém $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ není plně řiditelný. Pro tento systém musí existovat podobnostní transformace, která jej převede do kanonického tvaru neřiditelného systému (viz. (Antsaklis a Michel, 2007, Sekce 6.2.1)), kde je řiditelná a neřiditelná část jednoznačně oddělena. Transformaci realizujeme pomocí regulární matice Q

$$\begin{aligned}Q^{-1}(A + BF)Q &= Q^{-1}AQ + (Q^{-1}B)(FQ), \\ &= \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} A_1 + B_1F_1 & A_{12} + B_1F_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Zde jsme uvažovali, že $FQ \triangleq [F_1 \ F_2]$. Transformace nijak neovlivní vlastní čísla matice $A + BF$ (Krajník, 2006, Věta 6.4). Řiditelná část je dána dvojicí (A_1, B_1) , neřiditelná maticí A_2 . Je zřejmé, že matice stavové zpětné vazby F posune pouze řiditelná vlastní čísla, zatímco neřiditelná zůstanou na původním místě. To je ovšem ve sporu s předpoklady. Systém $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ musí být tedy plně řiditelný – matice A_2 potom zanikne.

Postačující podmínka: Nechť dvojice (A, B) je plně řiditelná. Potom pomocí některého z níže uvedených algoritmů lze libovolně umístit vlastní čísla matice $A + BF$. ■

Skutečnost, že dokážeme stavovou zpětnou vazbou posunout řiditelné póly do libovolné polohy neznamená, že měníme póly systému $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ (to ani není fyzikálně realizovatelné). Póly původního systému zůstanou stejně. Pouze zapojením zpětné vazby přivedeme do systému takový vstup $u(t)$, který způsobí chování determinované póly uzavřené smyčky (vlastními čísly matice $A + BF$).

Metody určování matice stavové zpětné vazby F se zejména liší ve výpočetní náročnosti, ale také v tom, zda řeší daný problém u systému s jedním vstupem ($m = 1$) nebo s více vstupy ($m \geq 2$). Z jednotlivých metod lze zmínit následující.

Přímá metoda Matici F volíme tak, aby charakteristický polynom uzavřené smyčky $\det(sI - (A + BF))$ odpovídal požadovanému polynomu $\alpha_d(s)$. Obecně vede řešení na soustavu nelineárních rovnic. Tato soustava je v případě $m = 1$ lineární.

Pomocí tvaru řiditelnosti Podobnostní transformací P lze řiditelnou dvojici (A, B) převést do tvaru řiditelnosti.

$$\begin{aligned} A_c &= PAP^{-1}, \\ B_c &= PB, \\ A_{cF} &= P(A + BF)P^{-1} = PAP^{-1} + PBFP^{-1}, \\ &= A_c + B_cF_c. \end{aligned}$$

Poté pomocí indexů řiditelnosti μ_i a jejich částečného součtu $\sigma_j = \sum_{i=1}^j \mu_i$, $j = 1, \dots, m$ definujeme matice $B_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $A_{dm} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $A_m \in \mathbb{R}^{m \times n}$, které postupně obsahují σ_j -té řádky matic B_c , A_d a A_c . Matici A_d přitom volíme tak, aby její charakteristický polynom odpovídal požadovanému tvaru $\alpha_d(s)$. Matice stavové zpětné vazby potom získáme z následujících vztahů (Antsaklis a Michel, 2007, Sekce 9.2.2)

$$\begin{aligned} F_c &= B_m^{-1} (A_{dm} - A_m), \\ F &= F_c P. \end{aligned}$$

Ackermannovo pravidlo Výsledkem této metody je jeden vztah, který ovšem zahrnuje všechny kroky uvedené v předchozím bodě. Postup lze použít pouze pro systémy s jedním vstupem (Antsaklis a Michel, 2007, Sekce 9.2.2)

$$F = -e_n^T \mathcal{C}^{-1} \alpha_d(A),$$

kde $e_n \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $e_n^T = [0 \ 0 \ \dots \ 1]$, $\mathcal{C} = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ je matici řiditelnosti.

Jinou metodou umísťování pólů uzavřené smyčky je formulace úlohy jako problém optimálního řízení. O této problematice bude pojednáno v následující sekci.

2.2 Kvadraticky optimální řízení

Uvažujme nyní opět lineární časově invariantní dynamický systém

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.6)$$

Pro tento systém budeme hledat takové řízení, které bude pro počáteční stav $x(0) = x_0$ minimalizovat *kvadratické kritérium*. Nejprve budeme analyzovat řešení na konečném horizontu optimalizace $t \in [0, \tau]$, poté horizont optimalizace prodloužíme do nekonečna $\tau \rightarrow \infty$. Uvažujme tedy následující kvadratické kritérium

$$J = \frac{1}{2}x^T(\tau)Sx(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^\tau x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)dt, \quad (2.7)$$

kde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou konstantní symetrické pozitivně semidefinitní matice vyjadřující váhu průběžných a koncových stavů. $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ uvažujeme jako konstantní symetrickou pozitivně definitní matici vyjadřující váhu vstupů. Tento optimalizační problém budeme řešit pomocí variačního počtu. Cílem bude tedy minimalizovat funkcionál (2.7) s respektováním omezení ve tvaru rovnosti (2.6). Proto zavedeme *Lagrangeův vektor* $\lambda(t)$ vyjadřující tato omezení. Dostáváme rozšířený funkcionál

$$\begin{aligned} J' = & \frac{1}{2}x^T(\tau)Sx(\tau) + \int_0^\tau \left(\frac{1}{2} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) + \right. \\ & \left. + \lambda(t)^T (Ax(t) + Bu(t) - \dot{x}(t)) \right) dt. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Rovnice (2.8) popisuje Bolzovou úlohou variačního počtu (v kritériu se objevuje i váha koncového stavu). Pro další řešení převedeme problém na Lagrangeovu úlohu zavedením váhy koncového stavu dovnitř integrálu. Pro vyšší srozumitelnost budeme v několika dalších rovnicích používat stručný zápis, kdy nebude u vektorů $x(t)$, $\lambda(t)$ a dalších explicitně vyjádřena časová závislost.

$$\begin{aligned} J' = & \int_0^\tau \frac{1}{2} (x^T Q x + u^T R u) + \lambda^T (Ax + Bu - \dot{x}) + x^T S \dot{x} dt, \\ = & \int_0^\tau \mathcal{L}(x, \dot{x}, u, \lambda) dt. \end{aligned} \quad (2.9)$$

$\mathcal{L}(x, \dot{x}, u, \lambda)$ nazýváme – *Lagrangián* nebo také jádro funkcionálu. Pomocí Lagrangiánu zavedeme nyní *Hamiltonovu funkci* \mathcal{H} a konjugovaný vektor k vektoru x , označme jej p .

$$p(x, \dot{x}, u, \lambda) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, u, \lambda)}{\partial \dot{x}} \right)^T, \\ p(x, \lambda) = -\lambda + Sx, \quad (2.10)$$

$$\mathcal{H}(x, u, \lambda) = -\mathcal{L}(x, u, \lambda, t) + p^T \dot{x}, \\ \mathcal{H}(x, u, \lambda) = -\frac{1}{2}(x^T Qx + u^T Ru) - \lambda^T(Ax + Bu). \quad (2.11)$$

Cílem zavádění dalších funkcí a vektorů je zjednodušování výpočtu. Pomocí Hamiltonovy funkce a konjugovaného vektoru lze velmi jednoduše získat Hamiltonovu nebo také kanonickou formu Eulerovy-Lagrangeovy rovnice pomocí vztahů (Štecha, 2000, Sekce 7.5)

$$\frac{dp}{dt} = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right)^T, \\ \frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right)^T, \\ 0 = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \right)^T.$$

Derivováním Hamiltoniánu a následnou krátkou úpravou dostaváme rovnice

$$\dot{\lambda}(t) = -Qx(t) - A^T \lambda(t), \quad (2.12)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.13)$$

$$0 = Ru(t) + B^T \lambda(t). \quad (2.14)$$

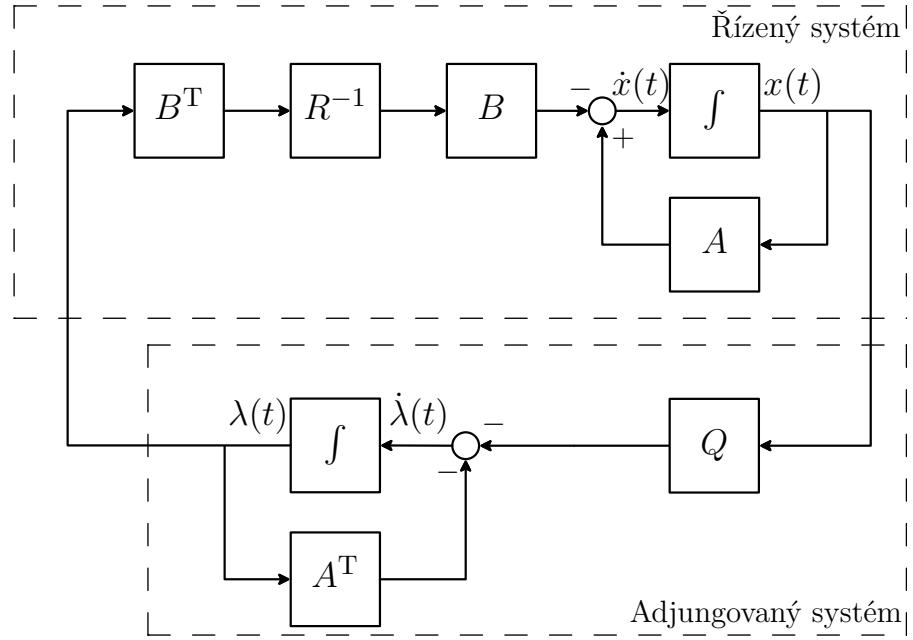
Získali jsme tři rovnice. Rovnice (2.12) popisuje vývoj adjungovaného systému; jeho stavovým vektorem je $\lambda(t)$ nazývaný též *kostav* (Havlena a Štecha, 2000, Sekce 2.2). Rovnice (2.13) je nijak nepozměněná rovnice původního systému. Tyto dvě rovnice lze převést do maticového zápisu nazývaného *Hamiltonovský systém* (viz obrázek 2.2), matici koeficientů H nazýváme *Hamiltonova matic*.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Poslední rovnice (2.14) popisuje optimální vstup do systému

$$u(t) = -R^{-1}B^T \lambda(t). \quad (2.16)$$

Optimální vstup do systému je vyjádřen pomocí kostavu. Jeho hodnotu sice nemůžeme nijak měřit, ale získáme ji pomocí řešení soustavy diferenciálních rovnic (2.15). K jejímu



Obrázek 2.2: Hamiltonovský systém

řešení potřebujeme znát $2n$ okrajových podmínek (dimenze stavu $x(t)$ i kostavu $\lambda(t)$ je n). Zadané počáteční podmínky $x(0) = x_0$ nám dávají prvních n podmínek. Zbylých n získáme pomocí podmínek transverzality pro volný koncový bod

$$-\mathcal{H}\delta t + p^T \delta x = 0 \quad \text{pro} \quad t = \tau.$$

V našem případě máme pevný časový konec $\delta t = 0$, zatímco stav $x(\tau)$ je volný (variace $\delta x|_{t=\tau}$ je nenulová). Čili dostáváme dalších n okrajových podmínek

$$\begin{aligned} p^T|_{t=\tau} &= -\lambda(t) + Sx(t)|_{t=\tau} = 0, \\ \lambda(\tau) &= Sx(\tau). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Rovnice (2.17) nám přímo nedává hodnotu $x(\tau)$ nebo $\lambda(\tau)$, ale pouze ukazuje na lineární závislost mezi stavem a kostavem v koncovém okamžiku. Využijme tuto informaci k předpokladu, že lineární závislost mezi $x(t)$ a $\lambda(t)$ platí pro každý okamžik na $[0, \tau]$. Uvažujme tedy neznámou maticovou funkci $P(t)$

$$\lambda(t) = P(t)x(t). \tag{2.18}$$

Pro ověření uvedených předpokladů budeme derivovat předchozí vztah a dále dosadíme všechny známé proměnné.

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= \dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t), \\ -Qx(t) - A^T\lambda(t) &= \dot{P}(t)x(t) + P(t)(Ax(t) + BR^{-1}B^T\lambda(t)), \\ -(Q - A^TP(t))x(t) &= (\dot{P}(t) + P(t)A + P(t)BR^{-1}B^TP(t))x(t). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Rovnice (2.19) zřejmě platí pro libovolný stav $x(t)$ na horizontu optimalizace; naše předpoklady byly tedy splněny a vyloučením $x(t)$ dostáváme *Riccatiho rovnici*

$$-\dot{P}(t) = A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q. \quad (2.20)$$

Jedná se o maticovou diferenciální rovnici s koncovou podmínkou $P(\tau) = S$. Vyřešením této rovnice se zbavíme závislosti optimálního řízení na kostavu

$$u(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t). \quad (2.21)$$

Rovnice (2.21) popisuje časově proměnnou stavovou zpětnou vazbu. Jestliže definujeme

$$F(t) \triangleq -R^{-1}B^T P(t), \quad (2.22)$$

pak pro optimální vstup do systému dostáváme

$$u(t) = F(t)x(t). \quad (2.23)$$

Časově proměnná zpětná vazba jednak komplikuje implementaci regulátoru, ale také způsobí, že výsledný zpětnovazební obvod je časově proměnný

$$\dot{x}(t) = (A + BF(t))x(t). \quad (2.24)$$

Naším cílem ovšem je navrhnut statickou, snadno realizovatelnou, zpětnou vazbu od stavu, která bude v jistém smyslu optimální. Ukazuje se, že při prodlužování horizontu optimalizace do nekonečna ($\tau \rightarrow \infty$) je řešení Riccatiho rovnice¹ buď neomezené, nebo konverguje k pozitivně semidefinitní matici. Předpokládejme, že řešení konverguje. Potom pro $t \ll \tau$ je derivace $\dot{P}(t) = 0$, to se projeví v Riccatiho rovnici (2.20) změnou této rovnice na algebraickou nazývanou *algebraická Riccatiho rovnice (ARE)*

$$0 = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q. \quad (2.25)$$

P v tomto případě není funkcí času. V dalším textu budeme značit řešení ARE pomocí P , zatímco řešení Riccatiho rovnice (2.20) $P(t)$ (vždy se zmíněnou závislostí na čase). Kritérium, které této rovnici přísluší, bude vycházet z původního kritéria pro konečný horizont a bude zřejmě

$$J_\infty = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)dt. \quad (2.26)$$

V kritériu pro nekonečný horizont není důvod vážit koncový stav pomocí matice S , protože uvažujeme, že v konečném čase bude systém převeden do rovnovážného stavu. Optimální zákon řízení bude vycházet z (2.21) a bude ve tvaru

$$u(t) = -R^{-1}B^T Px(t). \quad (2.27)$$

¹Riccatiho rovnice se řeší od času τ směrem k $t = 0$. Známe totiž jen koncovou podmínku $P(\tau) = S$. Od této hodnoty se potom odvíjí řešení.

Algebraická Riccatiho rovnice může mít několik řešení (reálná, komplexní, pozitivně definitní, negativně definitní atp.), ale pokud řešení Riccatiho rovnice konverguje, pak se shoduje s jedním z řešení ARE.

Dále se budeme zabývat omezeností řešení Riccatiho rovnice a stabilitou uzavřené smyčky. Pro tyto potřeby zavedeme fiktivní výstup ze soustavy (2.6)

$$y(t) = \Gamma x(t), \quad \Gamma^T \Gamma = Q. \quad (2.28)$$

Věta 2.2 (Existence limitního řešení): *Nechť je dvojice (A, B) stabilizovatelná, potom řešení Riccatiho rovnice konverguje pro libovolné S . Navíc $P = P(t)|_{\tau-t \rightarrow \infty}$ je pozitivně semidefinitním řešením algebraické Riccatiho rovnice (2.25).*

Souvislost konvergence řešení Riccatiho rovnice se stabilizovatelností systému je na snadě. Je-li nestabilní pól neředitelný, pak také nemůže být stabilizován pomocí stavové zpětné vazby. Limitní hodnota kritéria bude pro některé volby počáteční podmínky $P(\tau) = S$ neomezená – to nastane v případě, kdy se nestabilní mód objeví v kritériu. Podrobný důkaz v (Lewis a Syrmos, 1995, Sekce 3.4).

Věta 2.3 (Stabilita uzavřené smyčky): *Nechť $\Gamma^T \Gamma = Q \geq 0$. Předpokládejme, že dvojice (A, Γ) je detekovatelná. Potom dvojice (A, B) je stabilizovatelná tehdy a jen tehdy, když:*

- Existuje jediné pozitivně semidefinitní limitní řešení Riccatiho rovnice $P(t)|_{\tau-t \rightarrow \infty}$. Navíc je toto řešení shodné s řešením P algebraické Riccatiho rovnice (2.25).
- Zpětnovazební systém

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t), \quad F = -R^{-1}B^T P \quad (2.29)$$

je asymptoticky stabilní.

Pro důkaz věty odkazujeme na (Lewis a Syrmos, 1995, Sekce 3.4).

Tato věta zaručuje existenci zesílení, pro které je matice $A + BF$ asymptoticky stabilní. Je na místě zmínit definici ředitelnosti. Stav $x(0)$ je ředitelný právě tehdy, existuje-li řízení, které také převede daný stav v konečném čase do počátku. Přesně tuto činnost realizuje optimální řízení, které jsme získali předchozími výpočty. Navíc energie vynaložená na řízení je konečná, protože hodnota kritéria je také konečná a zároveň R je pozitivně definitní.

Pokud není dvojice (A, Γ) detekovatelná, pak existuje nepozorovatelný mód soustavy (2.29), který není asymptoticky stabilní. Tento mód se poté stejným způsobem projeví i ve výsledném zpětnovazebném systému $A + BF$. Kritérium bude konečné, ale zpětnovazební systém nebude asymptoticky stabilní.

2.2.1 Analytické řešení Riccatiho rovnice

Doposud jsme uvažovali, že řešení Riccatiho rovnice známe a z tohoto předpokladu dělali závěry. Jak toto řešení získat jinak než přímým výpočtem maticové diferenciální rovnice? K řešení $P(t)$ se dá dobrat i pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů Hamiltonovy matice H .

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

K odvození budeme potřebovat dokázat, že vlastní čísla této matice jsou symetrická vůči imaginární ose.

Věta 2.4 (Symetrie vlastních čísel): *Je-li λ jedním z vlastních čísel Hamiltonovy matice (2.30), potom je také $-\lambda$ vlastním číslem této matice.*

Důkaz: Předpokládejme, že k danému λ máme vlastní vektor v splňující rovnici

$$Hv = \lambda v.$$

Dále definujme následující matici

$$J \triangleq \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad J^{-1} = -J.$$

Pro tuto matici lze přímým výpočtem ukázat, že platí $H = JH^TJ$. Rozepsáním vztahů získáme

$$\begin{aligned} JH^TJv &= \lambda v, \\ H^TJv &= \lambda J^{-1}v, \\ (Jv)^TH &= -\lambda(Jv)^T. \end{aligned}$$

Dostáváme levý vlastní vektor matice H ve tvaru (Jv) , k němu potom přísluší vlastní číslo $-\lambda$. ■

Pomocí regulární matice W lze převést Hamiltonovu matici do Jordanova kanonického tvaru. Díky symetrii vlastních čísel dostáváme tvar

$$D = W^{-1}HW, \quad D = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

kde M je diagonální matice obsahující nestabilní vlastní čísla (v otevřené pravé komplexní polorovině). Předpokládejme, že W rozdělíme na čtyři bloky

$$W \triangleq \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Hamiltonovský systém převedeme do Jordanova tvaru

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = W D W^{-1} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

kde pro transformované stavy platí $\begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = W^{-1} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}$. Rovnici (2.34) vyřešíme za předpokladu, že známe koncovou podmítku $w(\tau)$ a $z(\tau)$

$$\begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{M(\tau-t)} & 0 \\ 0 & e^{-M(\tau-t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(\tau) \\ z(\tau) \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Nyní z koncové podmínky (2.17) plyne

$$\begin{aligned} \lambda(\tau) &= S x(\tau), \\ W_{21}w(\tau) + W_{22}z(\tau) &= S(W_{11}w(\tau)W_{12}z(\tau)), \\ z(\tau) &= (W_{22} - SW_{12})^{-1}(W_{21} + S W_{11})w(\tau), \\ z(\tau) &= Tw(\tau). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Tento mezivýsledek se dal očekávat. Pokud existovala lineární závislost mezi stavy $x(\tau)$ a $\lambda(\tau)$, potom musí existovat i mezi transformovanými stavy $w(\tau)$ a $z(\tau)$. Kombinací rovnic (2.35) a (2.36) dostaneme postupně analytické vyjádření pro řešení Riccatiho rovnice

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-M(\tau-t)}z(\tau) = e^{-M(\tau-t)}Tw(\tau) = e^{-M(\tau-t)}Te^{-M(\tau-t)}w(t), \\ V(t) &= e^{-M(\tau-t)}Te^{-M(\tau-t)}, \quad \Rightarrow \quad z(t) = V(t)w(t). \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} W_{21}w(t) + W_{22}z(t) &= P(t)(W_{11}w(t) + W_{12}z(t)), \\ W_{21}w(t) + W_{22}V(t)w(t) &= P(t)(W_{11}w(t) + W_{12}V(t)w(t)), \\ P(t) &= (W_{21} + W_{22}V(t))(W_{11} + W_{12}V(t))^{-1}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Analytické řešení Riccatiho rovnice se dá rozdělit na dvě části. První je složena ze stabilních vlastních vektorů Hamiltonovy matice (W_{11} a W_{21}). Tato složka je časově nezávislá. Druhá část, které je vyjádřena pomocí nestabilních vlastních vektorů H , je naopak časově závislá a navíc vychází z matice S (váhy koncového stavu). V limitním případě $\tau - t \rightarrow \infty$ existuje pozitivně semidefinitní řešení $P(t)|_{\tau-t \rightarrow \infty}$ tehdy, když dvojice (A, B) je stabilizovatelná a dvojice (A, Γ) kde $\Gamma^T \Gamma = Q$ je detekovatelná. Potom také $V(t) \rightarrow 0$. Z toho plyne rovnice pro limitní řešení Riccatiho rovnice (řešení ARE), které je tvořeno pouze stabilními vlastními vektory Hamiltonovy matice.

$$P = P(t)|_{\tau-t \rightarrow \infty} = W_{21}W_{11}^{-1}. \quad (2.39)$$

2.2.2 Poloha pólů uzavřené smyčky

Nyní budeme řešit problém, kam se posunou póly uzavřené smyčky, pokud zavedeme zpětnou vazbu získanou řešením ARE. Předpoklady k získání řešení nechť jsou stejné jako v předchozím odstavci.

Podobně jako v předchozím oddíle zde využijeme Jordanův tvar Hamiltonovy matice

$$H = WDW^{-1}, \quad W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Rozepsáním předchozí rovnice dostáváme

$$H \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A W_{11} - BR^{-1}B^T W_{21} & A W_{12} - BR^{-1}B^T W_{22} \\ \hline -QW_{11} - A^T W_{21} & -QW_{12} - A^T W_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} -W_{11}M & W_{12}M \\ \hline -W_{21}M & W_{22}M \end{array} \right]. \quad (2.42)$$

Levé horní bloky obou matic dále využijeme

$$\begin{aligned} A W_{11} - BR^{-1}B^T W_{21} &= -W_{11}M, \\ A - BR^{-1}B^T W_{21} W_{11}^{-1} &= -W_{11}M W_{11}^{-1}, \\ A - BR^{-1}B^T P &= -W_{11}M W_{11}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

V rovnici (2.43) jsme získali matici uzavřené smyčky. Ukazuje se, že její Jordanův kanonický tvar je přímo matice $-M$, tedy její vlastní čísla jsou stabilní vlastní čísla Hamiltonovy matice.

2.2.3 Dvojí význam Hamiltoniánu

V předchozím textu se hojně objevovaly názvy nesoucí jméno irského matematika sira Williama Rowana Hamiltona. Souvisí nějak tyto názvy s pojmy, které v 19. století zavedl do fyziky Hamilton? Je Hamiltonián ve fyzice a v dynamických optimalizacích tím samým? Pokusíme se objasnit tento problém, neboť pojmy nesoucí v názvu Hamilton budeme v této práci využívat.

Pro uzavřený systém, kde nedochází k disipaci energie je součet kinetické a potenciální energie popsán sadou diferenciálních rovnic – *Hamiltonovské rovnice systému* (Kulhánek, 2001).

$$\dot{p} = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right)^T, \quad \dot{x} = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right)^T,$$

kde \mathcal{H} je Hamiltonián, x zobecněný vektor polohy a p zobecněná hybnost. Hamiltonián zde vyjadřuje energii v daném fyzikálním systému. Tato funkce je v průběhu času konstantní protože nedochází k disipaci energie

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0.$$

Porovnáním těchto rovnic s rovnicemi použitými k odvození optimálního řízení zjistíme, že tyto rovnice jsou si velice podobné.

Zobecněný vektor polohy odpovídá stavu systému; to není nic neočekávaného. Stav systému si totiž můžeme představit jako polohu v n dimenzionálním prostoru. Navíc u fyzikálních systémů s r stupni volnosti je třeba popsat polohu pomocí nejméně r souřadnic. Tedy i u dimenze prostoru je ekvivalence na místě.

U zobecněné hybnosti p není situace natolik zřejmá jako v předešlém případě. Kontrola jednotek nám napoví, zdali i v případě dynamických optimalizací můžeme považovat p za hybnost. Při odvození optimálního řízení jsme dostali Hamiltonián ve tvaru

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t)) = -\frac{1}{2}(x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) - \lambda^T(t)(Ax(t) + Bu(t)).$$

O Hamiltoniánu víme, že je to skalární funkce vyjadřující energii systému. Abychom mohli posoudit, zda vyjadřuje energii i v tomto případě, zkонтrolujeme jednotky v rovnici Hamiltonovského systému (2.15) a poté v Hamiltoniánu za předpokladu, že

$$x \sim [\text{m}], \quad p \sim [\text{kg m s}^{-1}].$$

Aby jednotkově odpovídala rovnice Hamiltonovského systému, musí být

$$A, B \sim [\text{s}^{-1}], \quad Q, R \sim [\text{kg s}^{-2}].$$

Dosadíme-li tyto jednotky do rovnice Hamiltoniánu, pak skutečně vyjadřuje energii (v našem případě dostaneme $\mathcal{H} \sim [\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}]$).

Není náhodou, že se zde zabýváme dvěma problémy, které stojí na stejném základu. Hamiltonovská formulace mechaniky vychází z Hamiltonova principu nejmenší akce (Kulhánek, 2001, Sekce 1.2) nebo (Lewis a Syrmos, 1995, Sekce 3.2), který zní: „U konzervativních systémů se ze všech možných trajektorií z bodu A do bodu B v přírodě realizuje pouze ta, pro kterou má integrál $J = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$ minimální hodnotu.“ $\mathcal{L}(t, x(t), \dot{x}(t))$ je v tomto případě Lagrangián reprezentující rozdíl kinetické a potenciální energie. Tedy sama příroda realizuje proces optimalizace a k tomu využívá energii, kterou má k dispozici. V problému optimálního řízení je situace trochu odlišná. Před řízením daného dynamického systému nevíme, jakou energii bude obsahovat uzavřená smyčka Hamiltonovského systému (viz rovnice (2.15) a obrázek 2.2). Ale volbou váhových matic Q a R přiřadíme Hamiltonovskému systému takovou energii, aby se choval optimálně vzhledem k danému kritériu. Tomu předchází vyřešení celého problému (výpočet $P(t)$ a $\lambda(0)$), teprve poté lze simulovat/sputit smyčku na obrázku 2.2.

Závěrem tedy je, že u problému optimálního řízení jsou rovnice stavu a kostavu zobecněním Hamiltonových pohybových rovnic.

Kapitola 3

Prerekvizity k posunování pólů

Mějme lineární časově invariantní systém

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (3.1)$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dále mějme kvadratické kritérium s nekonečným horizontem optimalizace

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt, \quad (3.2)$$

kde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$. $Q \geq 0$, $R > 0$. Dále budeme předpokládat, že systém (3.1) je stabilizovatelný (všechny nestabilní póly jsou řiditelné).

Obvyklou úlohou optimálního řízení je hledání zákona řízení $u(t) = Fx(t)$, který převede libovolný počáteční stav $x(0)$ do rovnovážného stavu a zároveň minimalizuje kritérium (3.2). V naší práci budeme na tento problém nahlížet jinak. Pro zadaný pól systému (3.1) budeme hledat oblast v komplexní rovině, pro kterou existuje kvadraticky optimální regulátor minimalizující kritérium (3.2) tak, aby zároveň platily výše uvedené předpoklady. Pro každý bod této oblasti poté nalezneme vztah pro výpočet váhových matic Q a R . K řešení problému použijeme následující postup:

Postup 3.1 (Obecně o posunování pólů)

1. Transformace systému do Jordanova kanonického tvaru – transformace se netýká pouze rovnice (3.1), ale také kritéria a řešení algebraické Riccatiho rovnice (ARE).
 2. Volba struktury váhových matic pro již transformovaný systém.
 3. Vyjádření Hamiltonovy matice ve tvaru (2.30).
 4. Analýza charakteristického polynomu Hamiltonovy matice – ten určuje póly uzavřené smyčky.
 5. Zpětná transformace systému.
-

V této kapitole bude ještě rozebrána transformace systému – body 1 a 5 postupu 3.1. Ostatní body jsou odlišné pro různé druhy pólů.

3.1 Transformace do Jordanova kanonického tvaru

Mějme podobnostní transformaci vyjádřenou pomocí $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$, která převede matici A do komplexního Jordanova kanonického tvaru

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{B} = T^{-1}B. \quad (3.3)$$

\tilde{A} a \tilde{B} jsou potom také komplexní matice. Pravé vlastní vektory A jsou sloupce matice T , označme je v_1, v_2, \dots, v_n . Levé vlastní vektory A jsou řádky T^{-1} , označme je $w_1^T, w_2^T, \dots, w_n^T$. Transformací matice dynamiky A dojde i k transformaci stavového vektoru $x(t) = T\xi(t)$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ \dot{x}(t) &= T\tilde{A}T^{-1}x(t) + T\tilde{B}u(t), \\ T^{-1}\dot{x}(t) &= \tilde{A}T^{-1}x(t) + T^{-1}T\tilde{B}u(t), \\ \dot{\xi}(t) &= \tilde{A}\xi(t) + \tilde{B}u(t). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Vstup do systému zůstane beze změny. Transformace stavového vektoru se projeví i v kritériu (3.2), kam dosadíme novou stavovou proměnnou $\xi(t)$

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (\xi^H(t)T^HQT\xi(t) + u^T(t)Ru(t)) dt, \\ J &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (\xi^H(t)\tilde{Q}\xi(t) + u^T(t)Ru(t)) dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dostáváme tedy $Q = T^{-H}\tilde{Q}T^{-1}$, matice R zůstává beze změny (vstup $u(t)$ není poznamenán transformací).

Zaměřme se ještě na řešení ARE v situaci, kdy pracujeme s transformovaným systémem. Předpokládejme, že P je řešení ARE. Potom optimální vstup do systému je dán zákonem řízení (2.27)

$$u(t) = -R^{-1}B^T Px(t) = Fx(t). \quad (3.6)$$

Dosazením transformovaných veličin odvodíme vztah pro transformované řešení ARE.

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1}\tilde{B}^HT^HPT\xi(t), \\ u(t) &= -R^{-1}\tilde{B}^H\tilde{P}\xi(t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Z rovnice (3.7) potom plyne $P = T^{-H}\tilde{P}T^{-1}$. Nyní můžeme aplikovat všechny výše uvedené transformace na Hamiltonovu matici, abychom ji dostali do tvaru

$$H = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T^{-H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^H \\ -\tilde{Q} & -\tilde{A}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & T^H \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\tilde{H} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^H \\ -\tilde{Q} & -\tilde{A}^H \end{bmatrix}, \quad U \triangleq \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T^{-H} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$H = U\tilde{H}U^{-1}. \quad (3.10)$$

Stejně tak všechny transformace použijeme v ARE.

$$\begin{aligned}
 A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q &= 0, \\
 T^{-H} \tilde{A}^H T^H T^{-H} \tilde{P} T^{-1} + T^{-H} \tilde{P} T^{-1} T \tilde{A} T^{-1} - \\
 - T^{-H} \tilde{P} T^{-1} T \tilde{B} R^{-1} \tilde{B}^H T^H T^{-H} \tilde{P} T^{-1} + T^{-H} \tilde{Q} T^{-1} &= 0, \\
 T^{-H} (\tilde{A}^H \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A} - \tilde{P} \tilde{B} R^{-1} \tilde{B}^H \tilde{P} + \tilde{Q}) T^{-1} &= 0. \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Ukazuje se tedy, že řešení algebraické Riccatiho rovnice lze počítat pomocí transformovaných matic.

3.2 Iterativní posunování pólů po pólů

V tomto oddíle probereme dva způsoby, kterými lze iterativně posunovat pól po pólů do příslušné polohy v uzavřené smyčce. Pro označení iterace budeme používat dolní index a písmeno i .

U prvního způsobu budeme předpokládat, že váhová matice vstupu je stejná v každé iteraci posunování pólů. Označme tuto situaci $R = R_i$. V druhém případě budeme uvažovat odlišnost R_i v každé iteraci.

3.2.1 Stejné matice R_i

Uvedeme zde rekurzivní proceduru, jak získat váhovou matici Q a matici stavové zpětné vazby F , která bude realizovat posunutí pólů do příslušných poloh. Tento postup je převzat z (Solheim, 1972).

Předpokládejme, že realizujeme k posunutí vlastních čísel (nebo komplexně sdružených vlastních čísel) matice A .

Postup 3.2 (Posunování při konstantní R_i)

1. Inicializace $Q = 0$, $F = 0$, $P = 0$, $i = 0$.
 2. $A_i = A + BF$.
 3. $i = i + 1$.
 4. Výpočet Q_i , P_i a F_i pomocí z matice A_{i-1} , tak abychom posunuli jedno reálné vlastní číslo λ_1 nebo dvě komplexně sdružená vlastní čísla λ_2 a $\bar{\lambda}_2$.
 5. $Q = Q + Q_i$, $P = P + P_i$, $F = F + F_i$.
 6. Je-li $i < k$, potom pokračujeme bodem 2.
-

Uvedený rekurzivní postup je založen na skutečnosti, že různé Q_i , P_i a F_i lze sčítat, abychom ve výsledku dostali celkovou matici Q , P a F , která bude realizovat posunutí všech pólů do příslušných poloh. Tato vlastnost není tak zřejmá, proto zde uvedeme její důkaz, alespoň pro posunutí dvou vlastních čísel.

Předpokládejme, že pomocí stavové zpětné vazby F_1 (3.12a) posuneme jeden reálný pól nebo komplexně sdruženou dvojici do žádané polohy. K takovému posunutí potřebujeme znát řešení ARE ve tvaru (3.12b)

$$F_1 = -R^{-1}B^T P_1, \quad (3.12a)$$

$$0 = A^T P_1 + P_1 A - P_1 B R^{-1} B^T P_1 + Q_1. \quad (3.12b)$$

Výpočtem Q_1 , P_1 a F_1 jsme provedli první krok uvedeného algoritmu. Druhým je posunutí dalšího vlastního čísla, které už vychází z matice $A + BF_1$

$$F_2 = -R^{-1}B^T P_2, \quad (3.13a)$$

$$0 = (A + BF_1)^T P_2 + P_2 (A + BF_1) - P_2 B R^{-1} B^T P_2 + Q_2. \quad (3.13b)$$

Podle bodu 5 postupu 3.2 by mělo $P = P_1 + P_2$ splňovat ARE ve tvaru

$$0 = A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q. \quad (3.14)$$

Dosadíme-li $Q = Q_1 + Q_2$ a $P = P_1 + P_2$ a předpokládáme-li $F = F_1 + F_2$, potom dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= A^T P_1 + A^T P_2 + P_1 A + P_2 A - (P_1 + P_2) B R^{-1} B^T (P_1 + P_2) + Q_1 + Q_2, \\ &= A^T P_1 + P_1 A - P_1 B R^{-1} B^T P_1 + Q_1 + \\ &\quad + A^T P_2 + P_2 A - P_1 B R^{-1} B^T P_2 - P_2 B R^{-1} B^T P_1 - P_2 B R^{-1} B^T P_2 + Q_2, \\ &= A^T P_1 + P_1 A - P_1 B R^{-1} B^T P_1 + Q_1 + \\ &\quad + (A + BF_1)^T P_2 + P_2 (A + BF_1) - P_2 B R^{-1} B^T P_2 + Q_2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Rovnici (3.15) jsme dokázali vyjádřit pomocí rovnic (3.12b) a (3.13b) a rovnice (3.14) má tedy řešení $P = P_1 + P_2$ pro $Q = Q_1 + Q_2$ a $F = F_1 + F_2$. Na čtenáři přenecháme analogický důkaz aditivnosti Q_i , P_i , F_i při posunutí obecně k pólům.

Na závěr této sekce je vhodné zmínit, že různé pořadí posunování pólů může vést k různým váhovým maticím Q , které realizují posun celé sady pólů do žádané polohy. Tato vlastnost bude ukázána v příkladu v kapitole o posunování reálných pólů.

3.2.2 Různé matice R_i

V předešlé podsekci jsme využili vlastnosti, že váhové matice Q_i , matice zpětné vazby F_i a řešení ARE P_i lze sčítat. To jsme dokázali pomocí sady rovnic (3.12) až (3.15). Pokud bychom stejný postup aplikovali na případ, kdy $R_1 \neq R_2$, potom by odvození končilo v druhém kroku rovnice (3.15). Aditivnost v tomto případě neplatí. Nezbývá než upravit postup 3.2.

Postup 3.3 (Posunování při různých R_i)

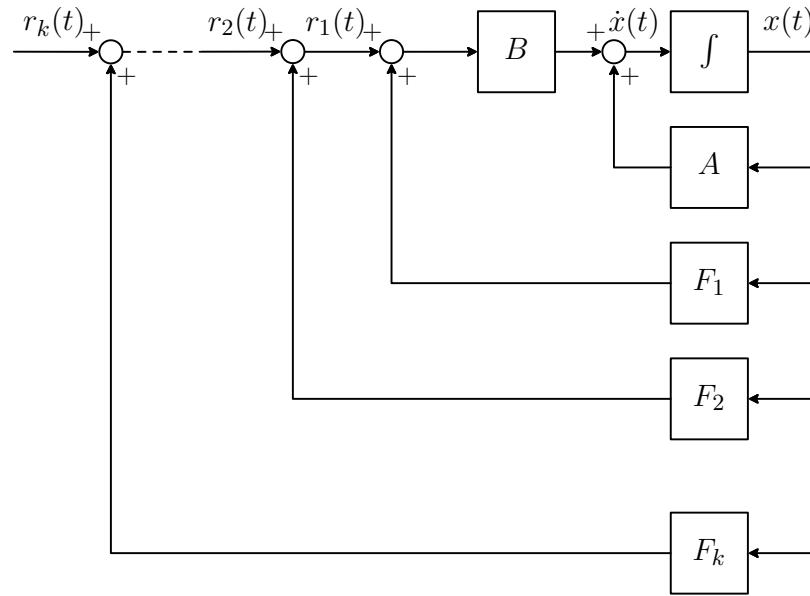
1. Inicializace $F = 0$, $i = 0$.
 2. $A_i = A + BF$.
 3. $i = i + 1$.
 4. Výpočet Q_i , P_i a F_i pomocí z matice A_{i-1} tak, abychom posunuli jedno reálné vlastní číslo λ_1 nebo dvě komplexně sdružená vlastní čísla λ_2 a $\bar{\lambda}_2$.
 5. $F = F + F_i$.
 6. Je-li $i < k$, potom pokračujeme bodem 2.
-

Změna nastala hlavně v bodě 5, ale jedná se o změnu výraznou, která například způsobí, že neznáme celkovou matici Q , která posune sadu pólů otevřené smyčky do požadovaných poloh uzavřené smyčky. Zachovala se pouze aditivnost stavové zpětné vazby, jak ukazuje rovnice (3.16)

$$u(t) = F_1 x(t) + r_1(t), \quad \dot{x}(t) = (A + BF_1)x(t) + Br_1(t), \quad (3.16a)$$

$$r_1(t) = F_2 x(t) + r_2(t), \quad \dot{x}(t) = (A + B(F_1 + F_2))x(t) + Br_2(t). \quad (3.16b)$$

Zde jsme využili i externí vstup stavové zpětné vazby (2.3). Postupný návrh stavové zpětné vazby, která posune póly do požadovaných poloh je znázorněn na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Iterativní návrh stavové zpětné vazby

Kapitola 4

Posunování reálných pólů

4.1 Posunování jednoduchého reálného pólu

Předpokládejme, že platí předpoklady dané kapitolou 3 a že matice A má jednoduché reálné ředitelné vlastní číslo λ ; budeme zkoumat, kam je možné toto vlastní číslo posunout pomocí kvadraticky optimální zpětné vazby. Jordanův tvar mějme ve tvaru

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} b_1^T \\ \times \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

kde $J \in \mathbb{C}^{n-1 \times n-1}$ obsahuje zbylé póly, které nebudeme posunovat. b_1^T je první řádek matice \tilde{B} , \times označuje zbylé hodnoty \tilde{B} . b_1^T jsme jako jediné z \tilde{B} zvolili, protože jako jediné ovlivňuje mód daný pólem λ . Podobným způsobem zvolíme i váhovou matici Q

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

kde $q \geq 0$ je reálný parametr. Pro zpětnou transformaci této matice potom platí

$$Q = T^{-H} \tilde{Q} T^{-1} = w_1 q w_1^T. \quad (4.3)$$

Zbývá nám zvolit váhovou matici R . Později ukážeme, že je výhodné tuto matici volit tak, aby platilo

$$b_1^T R^{-1} b_1 = 1. \quad (4.4)$$

Taková volba matice R je pro libovolné nenulové b_1^T možná, protože rovnice (4.4) je kvadratickou formou, tedy $R^{-1} \geq 0$. Dále je třeba zajistit, aby R bylo invertovatelné – rovnice (4.4) má $m \cdot m$ neznámých v jedné rovnici; lze tedy nalézt takovou kombinaci neznámých, aby R byla pozitivně definitní.

Zvolené matice nyní použijeme v Hamiltonově matici ve tvaru (3.8)

$$H = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T^{-H} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda & 0 & -1 & \times \\ 0 & J & \times & \times \\ \hline -q & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J^H \end{array} \right] \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & T^H \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Výpočet charakteristického polynomu Hamiltonovy matice (4.5) lze provádět už jen na transformované matici, neboť charakteristický polynom je invariantní vůči lineární transformaci (Krajiník, 2006, Věta 6.4).

$$\begin{aligned} \det(sI - H) &= \det \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & \tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^H \\ \tilde{Q} & sI + \tilde{A}^H \end{bmatrix}, \\ &= \det \begin{bmatrix} s - \lambda & 0 & 1 & \times \\ 0 & sI - J & \times & \times \\ q & 0 & s + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sI + J^H \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Determinant takto velké matice je vhodné řešit pomocí rozvoje podle řádku a podle sloupce (Krajiník, 2006, Věta 4.9). Nulové matice ve sloupci s maticí $sI - J$ a v řádku s maticí $sI + J^H$ usnadní výpočet determinantu.

$$\begin{aligned} \det(sI - H) &= \det(sI - J) \det(sI + J^H) \det \begin{bmatrix} s - \lambda & 1 \\ q & s + \lambda \end{bmatrix}, \\ \det(sI - H) &= \det(sI - J) \det(sI + J^H)(s^2 - \lambda^2 - q). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Zde se ukázalo, že podmínka na matici R ve tvaru $b_1^T R^{-1} b_1 = 1$ nám pomohla k výpočtu determinantu, protože ten potom není nijak parametrizován výsledkem součinu $\tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^H$.

Požadovanou polohu pólu uzavřené smyčky označme μ . Poloha ostatních pólů nechť je zachována. Hamiltonova matice bude mít v takovém případě tvar

$$H_\mu = \begin{bmatrix} \mu & 0 & \times & \times \\ 0 & J & \times & \times \\ 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J^H \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Tvar matice H_μ jsme získali úvahou, že pokud je $Q = 0$, potom nedojde k žádnému posunu a tedy matice H_μ bude mít vlastní čísla dána maticemi J a $-J^H$ a také dvojicí μ a $-\mu$. Výpočet charakteristického polynomu H_μ je v tomto případě jednodušší – determinant horní trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále.

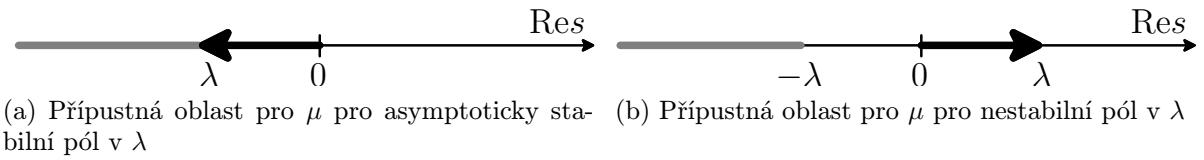
$$\begin{aligned} \det(sI - H_\mu) &= \det \begin{bmatrix} s - \mu & 0 & \times & \times \\ 0 & sI - J & \times & \times \\ 0 & 0 & s + \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s + J^H \end{bmatrix}, \\ &= \det(sI - J) \det(sI + J^H)(s^2 - \mu^2). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Koefficienty u charakteristických polynomů (4.7) a (4.9) se musí rovnat, abychom dosáhli

posunutí vlastního čísla λ do nové polohy v μ .

$$\begin{aligned} \det(sI - J) \det(sI + J^H)(s^2 - \lambda^2 - q) &= \det(sI - J) \det(sI + J^H)(s^2 - \mu^2), \\ s^2 - \lambda^2 - q &= s^2 - \mu^2, \\ q &= \mu^2 - \lambda^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dostali jsme vztah, který nám ukazuje na kvadratickou závislost mezi rozdílem vlastních čísel a hodnotou parametru q . Dále musíme ověřit předpoklad $q \geq 0$. Ten platí pouze v případě, že $\mu^2 \geq \lambda^2$; čili nová poloha pólu musí být nalevo od stabilního obrazu λ v komplexní rovině. Tato vlastnost je ilustrována na obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: Přípustná oblast pro μ (znázorněna šedivou barvou)

Následující věta shrnuje dosavadní odvození.

Věta 4.1: Nechť platí předpoklady dané kapitolou 3. Řiditelné vlastní číslo λ násobnosti 1 matice A lze posunout do polohy μ právě tehdy, když $\mu \leq -|\lambda|$. K takovému posunu je třeba váhových matic $Q = w_1(\mu^2 - \lambda^2)w_1^T$ a R takovou, pro kterou platí $b_1^T R^{-1} b_1 = 1$. Ostatní vlastní čísla zůstanou zachována.

Pro výpočet charakteristického polynomu Hamiltoniánu se ukazuje výhodné mít v součinu matic $\tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^H$ na indexu (1, 1) jedničku. Usnadní nám to poté práci s výpočtem determinantu a odstraní závislost na výsledku tohoto součinu.

Máme v podstatě tři možnosti, jak získat jedničku na indexu (1, 1). První je fixace vlastních vektorů matice A a volba matice R – tento postup zde byl uveden. Druhou možností je fixovat R a měnit velikosti vlastních vektorů matice A . Tento postup ještě krátce rozebereme.

Uvažujme pro jednoduchost matici R jednotkovou. Ze součinu $\tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^H$ tím odstraníme inverzi R . Hodnota na indexu (1, 1) v tomto součinu je určena součinem $b_1^T b_1$

$$b_1^T b_1 = \beta^2 \Rightarrow \beta = \|b_1^T\|_2. \quad (4.11)$$

Protože platí $\tilde{B} = T^{-1}B$, vynásobíme levý vlastní vektor w_1^T hodnotou $1/\beta$ zatímco pravý vlastní vektor v_1 hodnotou β . Tyto operace nijak nezmění tvar matice \tilde{A} zatímco \tilde{B} se musí znova přepočítat. Poté dostáváme jedničku na indexu (1, 1) v součinu $\tilde{B}\tilde{B}^H$.

Třetí možnost je samozřejmě kombinace obou metod.

Před příkladem použití uvedené metody ještě rozebereme řešení ARE P a výpočet zesílení stavové zpětné vazby F .

O algebraické Riccatiho rovnici víme, že ji můžeme řešit pomocí transformovaných matic dle rovnice (3.11). Předpokládejme opět, že

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

kde $p \geq 0$. Do rovnice ARE (3.11) dosadíme z (4.1), (4.2) a (4.12) a dostáváme

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & J^H \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \times \\ \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Roznásobením a malou úpravou se dostáváme až k řešení kvadratické rovnice s neznámou p

$$p^2 - 2\lambda p - q = 0. \quad (4.13)$$

Dosazením za q z rovnice (4.10) a řešením rovnice pomocí diskriminantu dostáváme $p = \lambda \pm \mu$. Hodnota p musí být ale nezáporná a pro požadovanou polohu pólu platí $\mu \leq -|\lambda|$; z těchto podmínek vyplývá výsledný vztah pro p ve tvaru

$$p = \lambda - \mu. \quad (4.14)$$

Zpětnou transformaci lze realizovat (podobně jako u matice Q) pouze pomocí vektoru w_1^T

$$P = w_1(\lambda - \mu)w_1^T. \quad (4.15)$$

Matici stavové zpětné vazby F získáme dosazením hodnot do vztahu (3.6). Její tvar lze také získat pomocí transformovaných hodnot

$$\begin{aligned} F &= -R^{-1}B^T P = -R^{-1}\tilde{B}^H T^H T^{-H} \tilde{P} T^{-1} = -R^{-1}\tilde{B}^H \tilde{P} T^{-1}, \\ &= -R^{-1} \left[b_1 \mid \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n \right] \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix}, \\ &= -p R^{-1} b_1 w_1^T. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Tento tvar je výhodné využít v případě, kdy volíme matici R jednotkovou a matici F nepočítáme pomocí výpočetního programu, ale na papíře.

Příklad 4.1 (Posunutí jednoduchého řiditelného pólu systému):

Předpokládejme systém daný stavovou rovnicí

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Pól v $\lambda = -1$ je pro naší aplikaci pomalým, cílem bude nalézt takové matice Q a R , které pro systém (4.17) provedou posunutí pólu do polohy $\mu = -3$.

Řešení: Podle postupu uvedeného výše nejprve systém převedeme do Jordanova kanonického tvaru. Jordanova kanonická báze je ve tvaru

$$T = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pro volbu váhové matice R je pro nás významný první řádek matice \tilde{B}

$$b_1^T = [b_1(1) \ b_1(2)] = [4 \ 1].$$

Číslo v kulatých závorkách vyjadřuje index prvku ve vektoru. Pro R musí platit $b_1^T R^{-1} b_1 = 1$, navíc musí být pozitivně definitní. R obecně uvažujme ve tvaru

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}.$$

Roznásobením výrazu $b_1^T R^{-1} b_1 = 1$ dostáváme

$$b_1(1)^2 r_{11} + b_1(1)b_1(2)(r_{12} + r_{21}) + b_1(2)^2 r_{22} = 1.$$

Křížové členy r_{ij} , $i \neq j$ lze považovat za nulové, usnadní nám to hledání R a máme zaručenou její pozitivní semidefinitnost. Čili máme dvě neznámé a jednu rovnici; volíme R následovně

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2b_1(1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2b_1(2)^2} \end{bmatrix} \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 2b_1(1)^2 & 0 \\ 0 & 2b_1(2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Váhovou matici Q získáme podle věty 4.1

$$Q = w_1(\mu^2 - \lambda^2)w_1^T = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} ((-3)^2 - (-1)^2) \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128 & 32 \\ 32 & 8 \end{bmatrix}.$$

Podobně získáme P vztahem (4.15)

$$P = w_1(\lambda - \mu)w_1^T = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} (-1 + 3) \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Stavovou zpětnou vazbu dostáváme dosazením do (4.16)

$$F = -R^{-1}B^TP = \begin{bmatrix} -1 & -0.25 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matici dynamiky zpětnovazebního obvodu dostáváme ve tvaru

$$A + BF = \begin{bmatrix} -2 & 0.75 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Vlastní čísla této matice jsou $\lambda = \lambda_1 = -3$ (posunuté) a $\lambda_2 = -5$ (zachované ve své poloze). ✓

Poznámka: V předchozím příkladu jsme R volili jako diagonální matici, která obsahuje kvadrát prvků vektoru b_1^T násobený číslem 2. Tuto strategii volby R lze jednoduše rozšířit na obecný systém s m vstupy, když R volíme

$$R = m \begin{bmatrix} b_1(1)^2 & & & \\ & b_1(2)^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_1(m)^2 \end{bmatrix}, \quad \text{pro } b_1(i) \neq 0, i = 1 \dots m.$$

Pokud je některý prvek vektoru b_1^T nulový, potom na jeho místo dosadíme libovolnou kladnou hodnotu, abychom R získali pozitivně definitní. \square

4.2 Posunování násobného reálného pólů

Předpokládejme, že matice A má řiditelné vlastní číslo λ , kterému přísluší Jordanův blok velikosti k

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 1 & \lambda & \\ \hline & & & J \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Matice \tilde{Q} , R , \tilde{B} a \tilde{P} uvažujme ve stejném tvaru jako v předchozí sekci. Transformovaná Hamiltonova matice má potom podle (3.9) tvar (prázdná pole znamenají nulu/nulovou matici, \times vyznačuje neznámou hodnotu)

$$\tilde{H} = \left[\begin{array}{cc|cccc} \lambda & & -1 & \times & \cdots & \times & \times \\ 1 & \lambda & \times & \times & \cdots & \times & \times \\ \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & 1 & \lambda & \times & \times & \cdots & \times & \times \\ \hline -q & & J & \times & \times & \cdots & \times & \times \\ & & & -\lambda & 1 & & & \\ & & & -\lambda & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & 1 & \\ & & & & & & -\lambda & \\ & & & & & & & -J^H \end{array} \right].$$

Zbývá získat charakteristický polynom matice \tilde{H} . V tomto polynomu bude zřejmě obsažen součin $\det(sI - J) \det(sI + J^H)$, který nese informaci o pólech, které mají být zachovány. Stejný výraz bude i v požadovaném charakteristickém polynomu. Proto jej můžeme z vý-

počtu vypustit a dostáváme

$$\det(sI - \tilde{H}') = \det \begin{vmatrix} s - \lambda & -1 & \times & \cdots & \times \\ -1 & s - \lambda & \times & \cdots & \times \\ \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & -1 & s - \lambda & \times & \times & \cdots & \times \\ q & & & s + \lambda & -1 & & \\ & & & s + \lambda & \ddots & & \\ & & & \ddots & -1 & & \\ & & & & & s + \lambda & \end{vmatrix},$$

$$= (s^2 - \lambda^2)^{k-1} (s^2 - \lambda^2 - q). \quad (4.19)$$

Pro výpočet determinantu byla opět využita věta o rozvoji matice podle řádku nebo sloupce. Zde trochu brání výpočtu jedničky, které jsou nad diagonálou Jordanova bloku. Pokud ovšem začneme s rozvoji v posledním řádku a sloupci daného bloku, potom vždy vykrátíme i jedničku o řádek/sloupec menší. Tímto iteračním postupem docílíme toho, že jedničky nijak neovlivní determinant. Když navíc zvolíme požadovaný charakteristický polynom H'_μ ve tvaru

$$\det(sI - H'_\mu) = (s^2 - \lambda^2)^{k-1} (s^2 - \mu^2), \quad (4.20)$$

potom zjistíme, že se dostáváme ke stejnému výsledku, jako v sekci o posunování pólu násobnosti 1.

$$s^2 - \lambda^2 - q = s^2 - \mu^2 \Rightarrow q = \mu^2 - \lambda^2. \quad (4.21)$$

$$Q = w_1(\mu^2 - \lambda^2)w_1^T. \quad (4.22)$$

Věta 4.2: Nechť platí předpoklady dané kapitolou 3. Řiditelné vlastní číslo λ matice A , které tvoří Jordanův blok velikosti k , lze posunout do polohy μ právě tehdy, když $\mu \leq -|\lambda|$. K takovému posunu je třeba váhových matic $Q = w_1(\mu^2 - \lambda^2)w_1^T$ a R takovou, pro kterou platí $b_1^T R^{-1} b_1 = 1$. Ostatní vlastní čísla zůstanou zachována. Jordanův blok velikosti k přejde na blok velikosti $k-1$.

Závěry pro řešení P algebraické Riccatiho rovnice získané analýzou posunutí jednoduchého pólu lze rovněž zobecnit i na úlohu posunutí násobného pólu, protože uvažujeme matici \tilde{P} ve stejném tvaru jako v předchozí sekci $\tilde{P} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Opět uvedeme jeden příklad použití. Byla by chyba zvolit jiný systém než je dvojitý integrátor, který se nejlepším reprezentantem systému s násobným pólem.

Příklad 4.2 (Dvojitý integrátor):

Uvažujme systém daný rovnicí

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Předběžnou analýzou zadaného systému zjistíme, že matice A má 2 vlastní čísla v nule ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). Matice řiditelnosti je

$$\mathcal{C} = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Čili má plnou hodnost a obě vlastní čísla jsou řiditelná. Matice A je přímo v Jordanově kanonickém tvaru. Jednička nad diagonálou značí, že vlastním číslům přísluší řetězec vlastních vektorů délky 2 resp. Jordanův blok velikosti 2.

Cílem bude asymptoticky stabilizovat systém. Z předchozí analýzy víme, že póly lze posouvat pouze doleva. Naším záměrem tedy bude nová dvojice pólů $\mu_1 = -1$ a $\mu_2 = -2$.

Řešení: Nejprve posuneme první pól do polohy $\mu_1 = -1$. U matic budeme používat dolní index, který označuje, kolikátý pól se právě posunuje.

Podle rovnice (4.18) musíme systém převést do Jordanova tvaru s jedničkou pod diagonálou. K tomu stačí prohodit vektory báze

$$T_1 = T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dostaváme \tilde{A}_1 a \tilde{B}_1 ve tvaru

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dále podle vztahu (4.4) zvolíme váhovou matici R_1

$$\tilde{B}_1 \tilde{B}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow R_1 = 1.$$

Váhovou matici Q_1 získáme z (4.22)

$$Q_1 = w_1(\mu_1^2 - \lambda_1^2)w_1^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ((-1)^2 - 0) \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podobně získáme řešení ARE podle (4.15)

$$P_1 = w_1(\lambda_1 - \mu_1)w_1^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (0 + 1) \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stavová zpětná vazba realizující posun je dána rovnicí (4.16)

$$F_1 = -R_1^{-1}B^TP_1 = -1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

První pól jsme posunuli, dostaváme matici dynamiky zpětné vazby ve tvaru

$$A_2 = A + BF_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Snadno ověříme, že došlo k posunutí pólu z 0 do -1 . Z matice A_1 budeme vycházet při posunu $0 \rightarrow -2$. Jordanovu kanonickou bázi nyní dostáváme

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vyjádřením dvojice (A_2, B) v této bázi dostáváme

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ihned je zřejmé, že i v tomto případě budeme volit $R_2 = 1$.

$$\begin{aligned} q_2 &= \mu_2^2 - \lambda_2^2 = (-2)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \\ p_2 &= \lambda_2 - \mu_2 = 0 - (-2) = 2 \quad \Rightarrow \quad P_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zbývá vyjádřit F_2

$$F_2 = -R_2^{-1}B^T P_2 = -1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Výsledná matice dynamiky uzavřené smyčky je ve tvaru

$$A + B(F_1 + F_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Póly se skutečně posunuly do požadovaných poloh. V průběhu výpočtu jsme pro posun obou pólů dostávali matici $R_1 = R_2 = 1$. V sekci o iterativním posunování pólů 3.2 jsme pro tento případ dokázali, že součet $Q_1 + Q_2$ vede k požadovanému posunu obou pólů najednou (lze snadno ověřit, například voláním `[F, P, mu]=lqr(A, B, Q1+Q2, 1)` v prostředí Matlab). V sekci 3.2 o iterativním posunování pólů jsme také zmínili, že různé pořadí posunutí jednotlivých pólů může vést k různým výsledným maticím Q . Už bez rozepisování uvedeme, že posouváme-li nejprve $0 \rightarrow -2$ a poté $0 \rightarrow -1$, dostáváme

$$Q'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad Q'_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a tedy $Q_1 + Q_2 \neq Q'_1 + Q'_2$. Celková váhová matice realizující posun je v obou případech odlišná, ale výsledná matice stavové zpětné vazby je stejná¹. ✓

¹ Matice F dokonce musí být v tomto příkladě stejná. U jednorozměrových plně řiditelných systémů existuje právě jedna matice F realizující požadované umístění pólů.

Kapitola 5

Posunování komplexně sdružených pólů

Předpokládejme, že matice A má řiditelná komplexně sdružená vlastní čísla $\lambda_1 = \lambda$ a $\lambda_2 = \bar{\lambda}$ a že platí předpoklady dané kapitolou 3. Tato vlastní čísla se budeme snažit posunout do nové komplexně sdružené polohy v levé otevřené komplexní rovině. Nástrojem na posunutí pólů bude opět kvadratické kritérium. Matice převedeme do Jordanova kanonického tvaru a dostaváme

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \Lambda_2 & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_2^H \\ \times \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

kde Λ_2 značí matici, která obsahuje vlastní čísla, jenž se budeme snažit posunout

$$\Lambda_2 \triangleq \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Matice $J \in \mathbb{C}^{n-2 \times n-2}$ obsahuje vlastní čísla, u kterých zachováme polohu. B_2^H označuje první dva řádky matice \tilde{B} .

Vlastní vektory příslušející komplexně sdruženým vlastním číslům λ a $\bar{\lambda}$ jsou také komplexně sdružené – pravé vlastní vektory nalezneme v prvním a druhém sloupci matice T , označme je $v = v_1$, $\bar{v} = v_2$, levé vlastní vektory nalezneme v prvním a druhém řádku T^{-1} , označíme je $w^T = w_1^T$ a $\bar{w} = w_2^T$.

Pro váhovou matici Q jsme odvodili transformační vztahy

$$Q = T^{-H} \tilde{Q} T^{-1}, \quad \tilde{Q} = T^H Q T. \quad (5.3)$$

V tomto případě posunujeme dva póly, tedy váhovou matici \tilde{Q} budeme volit ve tvaru

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} q & q_{12} \\ \bar{q}_{12} & q \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Q_2 volíme jako hermitovskou matici, protože transformaci (5.3) tvoří komplexně sdružené vektory. Pokud totiž reálnou matici $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ násobíme komplexně sdruženými vlastními

vektory, dostáváme hermitovskou matici. To lze ukázat přímým výpočtem.

$$Q = [w \ \bar{w}] Q_2 \begin{bmatrix} \bar{w}^T \\ w^T \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} \bar{v}^T \\ v^T \end{bmatrix} Q [v \ \bar{v}] . \quad (5.5)$$

Pro konstrukci Hamiltonovy matice nám zbývá vyjádřit součin $\tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^H$. V předchozí kapitole jsme se v tomto součinu snažili získat hodnotu 1 na stejném řádku a sloupce jako posunované vlastní číslo. Nyní tu máme dvě vlastní čísla, tedy budeme se snažit pomocí matic B_2^H (pevná) a R (volíme) dosáhnout tvaru, který nám pomůže při výpočtu charakteristického polynomu Hamiltonovy matice.

Jako dobrá volba se ukazuje (viz dále) zvolit R takové, aby platilo

$$\Omega_2 \triangleq B_2^H R^{-1} B_2 = \begin{bmatrix} 1 & \bar{\omega} \\ \omega & 1 \end{bmatrix} . \quad (5.6)$$

Pro $\omega \in \mathbb{C}$, $|\omega| \leq 1$. Takové R lze rozhodně zvolit, protože se jedná o kvadratickou formu a výsledná matice Ω_2 je pozitivně semidefinitní, pak R musí být také minimálně pozitivně semidefinitní. Pro výpočet optimálního vstupu do systému je ovšem zapotřebí pozitivní definitnost. Tu ověříme následovně

- Pro systém s jedním vstupem je R z prostoru \mathbb{R}^1 . Čili abychom dostali na diagonále nenulové číslo, pak R musí být také nenulové – pozitivně definitní. Jak ale potom jedním parametrem R dostat hermitovskou matici Ω_2 ve tvaru (5.6)? Pro transformaci do Jordanova kanonického tvaru dostáváme pro matici B vztah $\tilde{B} = T^{-1}B$, tudíž budeme-li se zabývat pouze submaticí B_2^H ; potom z T^{-1} použijeme jen w^T a \bar{w}^T

$$B_2^H = \begin{bmatrix} w^T \\ \bar{w}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} . \quad (5.7)$$

Ukazuje se tedy, že prvky matice B_2 jsou v tomto případě komplexně sdružené

$$B_2^H = \begin{bmatrix} b \\ \bar{b} \end{bmatrix}, \quad B_2^H B_2 = \begin{bmatrix} b\bar{b} & bb \\ \bar{b}b & \bar{b}\bar{b} \end{bmatrix} . \quad (5.8)$$

Volíme tedy $R^{-1} = \frac{1}{b\bar{b}} = \frac{1}{|b|^2}$ (analogie s předchozí kapitolou). Dále ještě ukážeme, že součin $B_2^H R^{-1} B_2$ dává v tomto případě singulární matici neboť při výpočtu determinantu dostáváme $\det \Omega_2 = b\bar{b}\bar{b}b - \bar{b}bb\bar{b} = 0$. Dále platí¹ $b\bar{b} = |b|^2 = |bb| = |\bar{b}\bar{b}|$, čili pokud $bR^{-1}\bar{b} = 1$, potom také $|\omega| = |bb| = 1$.

¹ Pro komplexní číslo b platí $b\bar{b} = |b|^2 = \operatorname{Re}^2 b + \operatorname{Im}^2 b$. Přímým výpočtem součinu $|bb|$ dostáváme $|bb| = |\operatorname{Re}^2 b - \operatorname{Im}^2 b + 2j\operatorname{Re} b \operatorname{Im} b| = \sqrt{(\operatorname{Re}^2 b - \operatorname{Im}^2 b)^2 + 4\operatorname{Re}^2 b \operatorname{Im}^2 b} = \sqrt{(\operatorname{Re}^2 b + \operatorname{Im}^2 b)^2} = |b|^2$.

- Pro systém s více vstupy je důkaz snazší, ale výpočet R složitější. Řádky matic B_2^H jsou i pro $m \geq 2$ komplexně sdružené (viz předchozí bod). Takže i zde součin $B_2^H R^{-1} B_2$ dává hermitovskou matici ve tvaru (5.6) pro libovolnou matici $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Z těchto všech matic vybereme libovolnou symetrickou a pozitivně definitní.

Pomocí rovnic (5.1), (5.4) a (5.6) dostaváme Hamiltonovu matici ve tvaru

$$H = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T^{-H} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cc} \Lambda_2 & 0 & -\Omega_2 & \times \\ 0 & J & \times & \times \\ \hline -Q_2 & 0 & -\Lambda_2^H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J^H \end{array} \right] \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & T^H \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Vlastní čísla matic J a $-J^H$ chceme zachovat, tedy veškerou informaci o posunu vlastních čísel λ a $\bar{\lambda}$ získáme pomocí charakteristického polynomu matice

$$H_2 \triangleq \begin{bmatrix} \Lambda_2 & -\Omega_2 \\ -Q_2 & -\Lambda_2^H \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Pro matici H_2 vypočítáme parametrizovaný charakteristický polynom.

$$\begin{aligned} \det(sI - H_2) &= \det \begin{bmatrix} sI - \Lambda_2 & \Omega_2 \\ Q_2 & sI + \Lambda_2^H \end{bmatrix}, \\ &= \det \begin{bmatrix} s - \lambda & 0 & 1 & \bar{\omega} \\ 0 & s - \bar{\lambda} & \omega & 1 \\ q & q_{12} & s + \bar{\lambda} & 0 \\ \bar{q}_{12} & q & 0 & s + \lambda \end{bmatrix}, \\ &= s^4 - 2(\operatorname{Re}\lambda^2 + q + \operatorname{Re}\omega q_{12})s^2 + \\ &\quad + |\lambda|^4 + 2|\lambda|^2q + 2\operatorname{Re}\lambda^2\omega q_{12} + (1 - |\omega|^2)(q^2 - |q_{12}|^2). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Označme μ a $\bar{\mu}$ novou polohu vlastních čísel λ a $\bar{\lambda}$. Požadovaný charakteristický polynom (redukovaný o část, která se nemění) je zřejmě

$$\begin{aligned} \det(sI - H_{2,\mu}) &= (s - \mu)(s + \mu)(s - \bar{\mu})(s + \bar{\mu}), \\ &= s^4 - 2\operatorname{Re}\mu^2 s^2 + |\mu|^4. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin v rovnicích (5.11) a (5.12) dostaváme soustavu dvou rovnic

$$\operatorname{Re}\mu^2 = \operatorname{Re}\lambda^2 + q + \operatorname{Re}\omega q_{12}, \quad (5.13a)$$

$$|\mu|^4 = |\lambda|^4 + 2|\lambda|^2q + 2\operatorname{Re}\lambda^2\omega q_{12} + (1 - |\omega|^2)(q^2 - |q_{12}|^2). \quad (5.13b)$$

Vyřešením této soustavy rovnic dostaneme hodnoty q , q_{12} a tedy i Q , pomocí které můžeme realizovat dané posunutí. Může se stát, že Q je negativně definitní. V takovém

případě nelze pro požadovanou polohu pólů μ a $\bar{\mu}$ nalézt kvadraticky optimální regulátor. Dále budeme zkoumat oblast, pro kterou lze kvadraticky optimální regulátor nalézt. V soustavě (5.13) se vyskytuje i ω . Přípustná oblast bude zřejmě závislá na hodnotě ω . Pozornému čtenáři jistě neunikne, že daná soustava dvou rovnic má v podstatě tři neznámé, neboť hledáme $q \in \mathbb{R}$ a $q_{12} \in \mathbb{C}$. q_{12} představuje dvě neznámé – reálnou a imaginární část.

Pro snazší orientaci v rovnicích a další vykreslování přípustných oblastí budeme používat notaci

$$x = \operatorname{Re}\mu, \quad y = \operatorname{Im}\mu. \quad (5.14)$$

Tedy soustavu (5.13) přepíšeme do tvaru

$$x^2 - y^2 = \operatorname{Re}\lambda^2 + q + \operatorname{Re}\omega q_{12}, \quad (5.15a)$$

$$(x^2 + y^2)^2 = |\lambda|^4 + 2|\lambda|^2 q + 2\operatorname{Re}\lambda^2 \omega q_{12} + (1 - |\omega|^2)(q^2 - |q_{12}|^2). \quad (5.15b)$$

V následujících třech sekcích bude rozebrán tvar přípustné oblasti v závislosti na hodnotě ω .

5.1 Případ $|\omega| = 1$

Tento případ je charakterizován singularitou matice Ω_2 ; taková situace nastává u systémů s jedním vstupem (rozebráno podrobně na straně 38). V soustavě rovnic (5.15) se vynuluje kvadrát q a $|q_{12}|^2$ a dostáváme soustavu rovnic lineárních v závislosti na q .

$$x^2 - y^2 = \operatorname{Re}\lambda^2 + q + \operatorname{Re}\omega q_{12}, \quad (5.16a)$$

$$(x^2 + y^2)^2 = |\lambda|^4 + 2|\lambda|^2 q + 2\operatorname{Re}\lambda^2 \omega q_{12}. \quad (5.16b)$$

Pomocí požadavku na pozitivní semidefinitnost matice Q_2 se pokusíme nalézt hranice přípustné oblasti pro μ . Protože požadujeme $q \geq 0$, potom Q_2 je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když $q \geq |q_{12}|$. Výslednou nerovnost lze ještě upravit

$$q \geq |q_{12}| \geq |\omega q_{12}| \geq |\operatorname{Re}\omega q_{12}|.$$

Z této rovnice plyne

$$q + \operatorname{Re}\omega q_{12} \geq 0. \quad (5.17)$$

Nerovnost $q \geq |q_{12}|$ lze také upravit do tvaru

$$|\lambda^2|q \geq |\lambda^2||q_{12}| \geq |\lambda^2\omega q_{12}| \geq |\operatorname{Re}\lambda^2\omega q_{12}|.$$

Z této rovnice plyne

$$2|\lambda|^2 q + 2\operatorname{Re}\lambda^2 \omega q_{12} \geq 0. \quad (5.18)$$

Nyní dosadíme nerovnosti (5.17) a (5.18) do soustavy rovnic (5.16) a dostáváme nerovnosti

$$x^2 - y^2 \geq \operatorname{Re}\lambda^2, \quad (5.19)$$

$$x^2 + y^2 \geq |\lambda|^2. \quad (5.20)$$

První nerovnost (5.19) vyjadřuje oblast ohraničenou hyperbolou se středem v počátku a asymptotami $y = \pm x$. V závislosti na znaménku $\operatorname{Re}\lambda^2$ dostáváme konjugované hyperboly

- Hyperbola otevírající se podél imaginární osy – pro $\operatorname{Re}\lambda^2 > 0$ tedy $|\operatorname{Re}\lambda| > |\operatorname{Im}\lambda|$
- Hyperbola otevírající se podél reálné osy – pro $\operatorname{Re}\lambda^2 < 0$ tedy $|\operatorname{Re}\lambda| < |\operatorname{Im}\lambda|$
- Pro $\operatorname{Re}\lambda^2 = 0$ ($|\operatorname{Re}\lambda| = |\operatorname{Im}\lambda|$) se rovnice hyperboly degeneruje na rovnici asymptot $y = \pm x$.

Druhá nerovnost (5.20) vymezuje oblast vně kružnice se středem v počátku a poloměrem $|\lambda|$.

Průnikem obou oblastí dostaneme přípustnou oblast pro μ ; zaměříme se také na průnik hraničních křivek, který zjistíme vzájemným dosazením nerovnic (5.19) a (5.20) a záměnou \geq za rovnost.

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \operatorname{Re}\lambda^2, & x^2 + y^2 &= |\lambda|^2, \\ -2y^2 &= \operatorname{Re}\lambda^2 - |\lambda|^2 = -2\operatorname{Im}^2\lambda, & & \\ y^2 &= \operatorname{Im}^2\lambda, & x^2 &= \operatorname{Re}^2\lambda. \end{aligned}$$

Ukazuje se tedy, že k průniku hraničních křivek dochází v bodech $\pm\lambda$ a $\pm\bar{\lambda}$.

Obrázek 5.1 ukazuje přípustné oblasti pro různé hodnoty λ a následující věta poté shrnuje charakteristiky oblasti pro $|\omega| = 1$.

Věta 5.1: Nechť platí předpoklady dané kapitolou 3. Váhovou matici R volíme tak, aby platilo $\Omega_2 = B_2^H R^{-1} B_2 = [\begin{smallmatrix} 1 & \bar{\omega} \\ \omega & 1 \end{smallmatrix}]$ a $|\omega| = 1$. Řiditelná komplexně sdružená vlastní čísla λ a $\bar{\lambda}$ matici A lze kvadratickým kritériem posunout do oblasti vymezené hyperbolou (5.19) a kružnicí (5.20). K průniku hyperboly a kružnice dochází právě v bodech $\pm\lambda$ a $\pm\bar{\lambda}$. Hraniční křivky jsou charakterizovány vlastností $\det Q_2 = 0 \Rightarrow q = |q_{12}|$.

5.2 Případ $\omega = 0$

V této situaci matice Ω_2 tvoří jednotkovou matici. To přináší jistá zjednodušení v soustavě rovnic (5.15). Kvadrát q^2 a $|q_{12}|^2$ ale zůstává a komplikuje řešení. Dostáváme soustavu

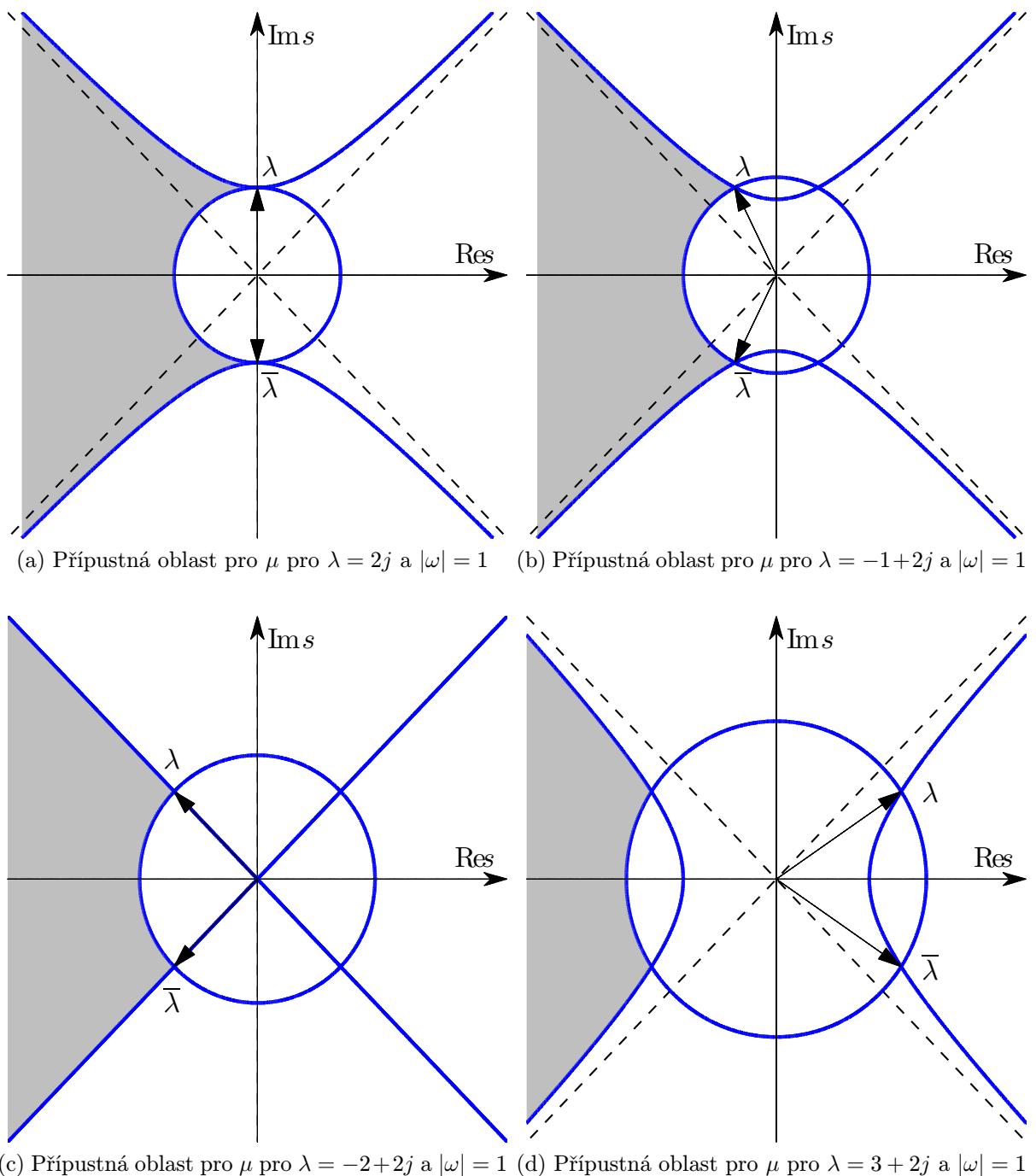
$$x^2 - y^2 = \operatorname{Re}\lambda^2 + q, \quad (5.21a)$$

$$(x^2 + y^2)^2 = |\lambda|^4 + 2|\lambda|^2q + q^2 - |q_{12}|^2. \quad (5.21b)$$

Hledáme takovou oblast v komplexní rovině, pro kterou bude mít soustava rovnic (5.21) řešení splňující $q \geq |q_{12}|$ a zároveň $q \in \mathbb{R}$, $q_{12} \in \mathbb{C}$. Rovnice (5.21a) ukazuje, že q je skutečně reálné řešení v případě, že je rovnice (5.21b) splněna pro $q_{12} \in \mathbb{C}$.

Rovnici (5.21b) použitím úpravy na čtverec přepíšeme do tvaru

$$|q_{12}|^2 = (q + |\lambda|^2)^2 - (x^2 + y^2)^2.$$



Obrázek 5.1: Přípustné oblasti pro μ pro různé hodnoty λ za předpokladu $|\omega| = 1$ – obrázky ukazují různé tvary hyperbol v závislosti na znaménku $\text{Re } \lambda^2$

Aplikací podmínky $|q_{12}| \geq 0$ dostáváme nerovnost

$$x^2 + y^2 \leq q + |\lambda|^2.$$

Dosazením z rovnice (5.21a) dostáváme konečný tvar omezení

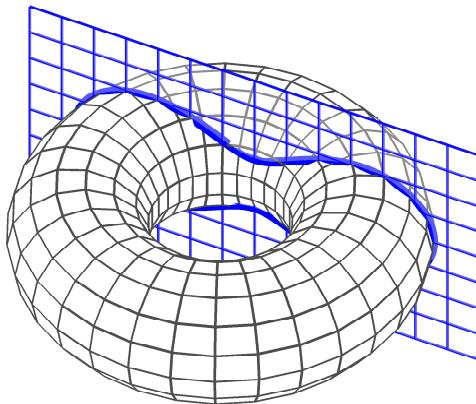
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq x^2 - y^2 - \operatorname{Re}\lambda^2 + |\lambda|^2, \\ 2y^2 &\leq |\lambda|^2 - \operatorname{Re}\lambda^2, \\ y^2 &\leq \operatorname{Im}^2\lambda. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Nerovnost vymezuje pás šířky $2|\operatorname{Im}\lambda|$ symetrický s reálnou osou a vyjadřuje, že imaginární část μ nemůže být než větší imaginární část posunovaného vlastního čísla λ . Omezení imaginární části je vykresleno na obrázku 5.3 červenou čarou.

Další omezení lze vyjádřit z podmínky pozitivní semidefinitnosti matice Q_2 ; užitím $q^2 - |q_{12}|^2 \geq 0$ v rovnici (5.21b) dostaneme

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2)^2 - 2|\lambda|^2q - |\lambda|^4 &= q^2 - |q_{12}|^2 \geq 0, \\ (x^2 - y^2)^2 - 2|\lambda|^2(x^2 - y^2 - \operatorname{Re}\lambda^2) - |\lambda|^4 &\geq 0, \\ (x^2 - y^2)^2 - 2|\lambda|^2(x^2 - y^2) + |\lambda|^4 &\geq 4|\lambda|^2\operatorname{Im}^2\lambda. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Výsledná nerovnost vymezuje oblast vně od rovinné křivky 4. stupně nazývané *Cassiniho ovál*. Cassiniho ovál patří do skupiny křivek, které vzniknou řezem toroidu. U Cassiniho oválu dochází k řezu rovinnou rovnoběžnou se svislou osou toroidu – viz. obrázek 5.2.



Obrázek 5.2: Cassiniho ovál vyznačený tučnou modrou čarou na řezu toroidu

Obecná rovnice Cassiniho oválu je podle (Weisstein, 2009a).

$$(x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) + e^4 = a^4, \quad (5.24)$$

kde e značí ohniskovou vzdálenost, a je parametrem křivky. V našem případě je tedy

$$e = |\lambda|, \quad a = \pm \sqrt{2|\lambda||\operatorname{Im}\lambda|}. \quad (5.25)$$

Cassiniho ovál může nabývat různých tvarů v závislosti na parametru a .

- Pro $a^2 \geq 2e^2$ má Cassiniho ovál tvar podobný elipse. Dosazením pomocí (5.25) dostáváme

$$\begin{aligned} 2|\lambda||\operatorname{Im}\lambda| &\geq 2|\lambda|^2, \\ |\operatorname{Im}\lambda| &\geq |\lambda|. \end{aligned} \quad (5.26)$$

V našem případě lze dosáhnout pouze rovnosti a to v situaci, kdy komplexní číslo λ má nulovou reálnou část. To je ilustrováno modrou křivkou na obrázku 5.3a.

- Pro $e^2 < a^2 < 2e^2$ se na Cassiniho oválu objevují průhyby. Vyjádřením spodní nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} 2|\lambda||\operatorname{Im}\lambda| &\geq |\lambda|^2, \\ 4\operatorname{Im}^2\lambda &\geq \operatorname{Re}^2\lambda + \operatorname{Im}^2\lambda, \\ \operatorname{Im}^2\lambda &\geq \frac{\operatorname{Re}^2\lambda}{3}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Tato situace je znázorněna modrou křivkou na obrázcích 5.3b, 5.3c a 5.3d.

- Pro $e^2 = a^2$ se jedná o Bernoulliovu lemniskátu (Weisstein, 2009b). Z předchozího odvození (5.27) plyne, že tento tvar dostáváme pro $\operatorname{Im}^2\lambda = \frac{\operatorname{Re}^2\lambda}{3}$. Modrá křivka na obrázku 5.3e ukazuje Bernoulliovu lemniskátu pro $\lambda = -3 + \sqrt{3}j$.
- Pro $e^2 > a^2$ tvoří Cassiniho ovál dvě části symetrické podle imaginární osy. Tato situace je pro $\operatorname{Im}^2\lambda \leq \frac{\operatorname{Re}^2\lambda}{3}$ a je demonstrována na obrázku 5.3f modrou barvou.

Zajímavou otázkou je, zda se Cassiniho ovál a přímka $y = \pm\operatorname{Im}\lambda$ v některém bodě protínají. Pokud se protínají, potom v kolika bodech? Nejprve budeme hledat extrémy Cassiniho oválu (jeho maxima i minima) a podle jejich hodnoty určíme vzájemný vztah obou křivek. Cassiniho ovál je implicitně zadaná funkce, tudíž k řešení využijeme větu o derivaci implicitně zadané funkce (Hamhalter a Tišer, 2005, Věta 8.2). Označme hranici oblasti dle (5.23)

$$f(x, y(x)) = (x^2 + y^2)^2 - 2|\lambda|^2(x^2 - y^2)|\lambda|^4 - 4|\lambda|^2\operatorname{Im}^2\lambda = 0. \quad (5.28)$$

Pro derivaci implicitně zadané funkce platí

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))}.$$

Použitím tohoto vztahu dostáváme derivaci $f(x, y(x))$ ve tvaru

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3 + xy^2 - |\lambda|^2x}{y^3 + x^2y + |\lambda|^2y} = -\frac{x(x^2 + y^2 - |\lambda|^2)}{y(x^2 + y^2 + |\lambda|^2)}. \quad (5.29)$$

Jmenovatel (parciální derivace podle y) nesmí být nulový. Taková situace nastane pouze v případě $y = 0$, kdy se jedná o úlohu posunutí reálného pólu (rozebráno v kapitole 4).

Výraz ve jmenovateli v závorce je pro nenulové y vždy kladný. Budeme vyšetřovat extrémy funkce $f(x, y(x))$ položením její derivace rovné nule. Jmenovatel z rovnice (5.29) můžeme vypustit a dostaváme

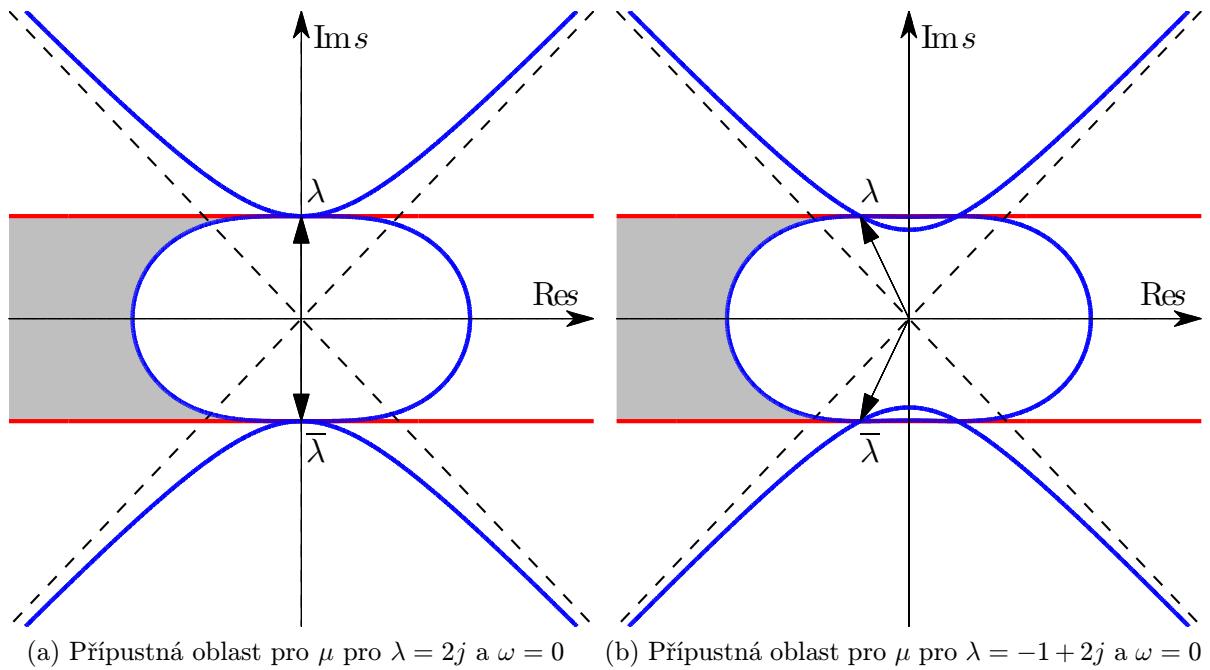
$$-x(x^2 + y^2 - |\lambda|^2) = 0.$$

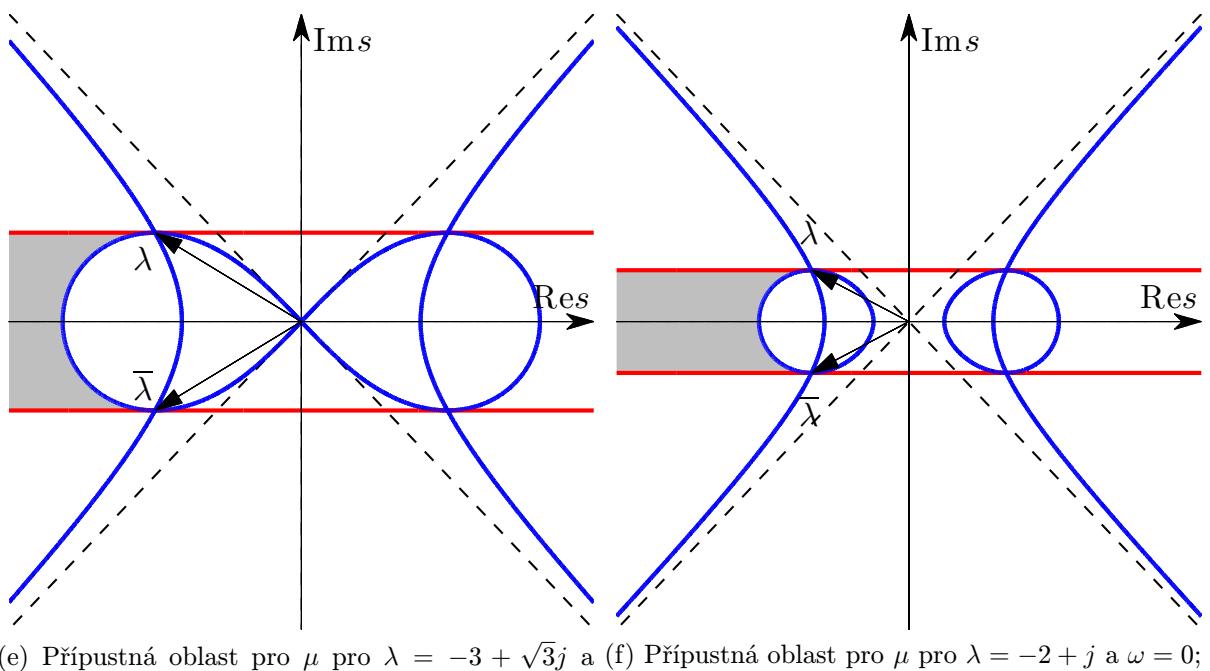
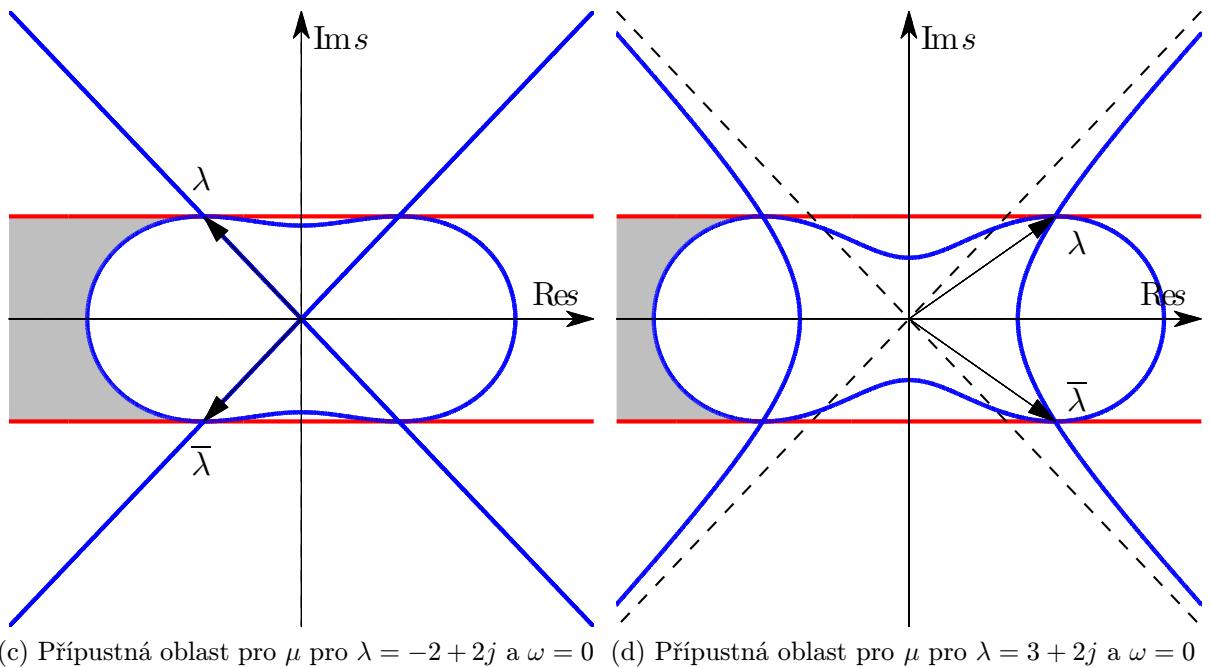
Řešení $x = 0$ nemá smysl, protože póly posunuté kvadratickým kritériem mají reálnou část vždy zápornou. Zbývá výraz $x^2 + y^2 - |\lambda|^2 = 0$. Jeho dosazením do (5.28) bychom měli dostat polohy maxim a minim.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= |\lambda|^2, \\ (|\lambda|^2)^2 - 2|\lambda|^2(|\lambda|^2 - 2y^2) - 4|\lambda|^2 \operatorname{Im}^2 \lambda &= 0, \\ y^2 &= \operatorname{Im}^2 \lambda \quad \Rightarrow \quad x^2 = \operatorname{Re}^2 \lambda. \end{aligned}$$

Funkce $f(x, y(x))$ má extrémy v bodech $\pm\lambda$ a $\pm\bar{\lambda}$. Pro libovolné λ a $\bar{\lambda}$ platí, že se Cassiniho ovál dotýká přímek $y = \pm \operatorname{Im} \lambda$ právě ve čtyřech bodech a vyplňuje tak pás daný těmito přímkami.

Věta 5.2: Nechť platí předpoklady dané kapitolou 3. Váhovou matici R volíme tak, aby platilo $\Omega_2 = B_2^H R^{-1} B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Řiditelná komplexně sdružená vlastní čísla λ a $\bar{\lambda}$ matice A lze kvadratickým kritériem posunout do oblasti vymezené pásem šířky $2|\operatorname{Im} \lambda|$ symetrického podle reálné osy a vnějškem Cassiniho oválu s ohnisky v bodech $\pm|\lambda|$, jehož tvar je závislý na poměru $|\frac{\operatorname{Re} \lambda}{\operatorname{Im} \lambda}|$. Posun podél Cassiniho oválu nastane v situaci $\det Q_2 = 0 \Rightarrow q^2 - |q_{12}| = 0$, zatímco posun při konstantní imaginární části je v situaci $q_{12} = 0$.





Obrázek 5.3: Přípustné oblasti pro μ pro různé hodnoty λ za předpokladu $\omega = 0$; obrázky ukazují na různé tvary Cassiniho oválů v závislosti na poměru $|\frac{\text{Re } \lambda}{\text{Im } \lambda}|$

5.3 Případ $0 < |\omega| < 1$

V předchozích dvou oddílech jsme se zabývali situacemi, kdy $|\omega| = 1$ viz sekce 5.1 a $\omega = 0$ viz sekce 5.2. Závěr z první uvedené sekce byl, že přípustná poloha pólů je vymezena kružnicí a hyperbolou, zatímco závěr v případě $\omega = 0$ byl, že přípustná oblast je ohraničena Cassiniho oválem a přímkami $y = \pm \operatorname{Im} \lambda$. Jakkoli je Cassiniho ovál podobný kružnici, o přímce zdaleka nemůžeme říci, že by se mohla charakterem svého omezení blížit hyperbole.

Co lze očekávat od situace $0 < |\omega| < 1$? Omezení by se neměla skokově měnit, neboť jejich charakter je závislý na spojité veličině ω .

Cassiniho ovál \Leftrightarrow Kružnice U tohoto omezení lze očekávat, že se vzrůstající velikostí $|\omega|$ se bude Cassiniho ovál blížit kružnici. K této hypotéze nás nevede jen podobný tvar obou křivek, ale zejména společná vlastnost, že vyjadřují situaci, kdy $\det Q_2 = 0$.

Na tomto místě je vhodné připomenout, že Cassiniho ovál je křivka čtvrtého stupně, zatímco kružnice druhého. Dopředu nelze odhadnout, jakého stupně bude tato křivka pro obecný případ $0 < |\omega| < 1$.

Přímka $y = \pm \operatorname{Im} \lambda \Leftrightarrow ?$ U tohoto omezení lze jen těžko odhadovat jeho vývoj. Můžeme očekávat, že se pro $|\omega| \rightarrow 1$ bude maximum oboru hodnot daného funkcí tohoto omezení blížit k nekonečnu.

Hyperbola S omezením hyperbolou se v podstatě setkáváme ve všech případech, pouze v případě $|\omega| = 1$ je toto omezení aktivní, jinak je nahrazeno omezením daným předchozím bodem.

Analýzu přípustné oblasti pro požadovanou polohu pólů μ a $\bar{\mu}$ provedeme ze soustavy rovnic (5.15). Pro lepší srozumitelnost textu ji zde znovu uvedeme

$$x^2 - y^2 = \operatorname{Re} \lambda^2 + q + \operatorname{Re} \omega q_{12}, \quad (5.30a)$$

$$(x^2 + y^2)^2 = |\lambda|^4 + 2|\lambda|^2 q + 2\operatorname{Re} \lambda^2 \omega q_{12} + (1 - |\omega|^2)(q^2 - |q_{12}|^2). \quad (5.30b)$$

Podmínky přípustného řešení jsou:

- q je reálné číslo, q_{12} je komplexní číslo. Z rovnice (5.30a) je zřejmé, že q je reálné v případě, že pro nějaké $q_{12} \in \mathbb{C}$ je rovnice (5.30b) je splněna.
- $|q_{12}| \geq 0$.
- $q \geq |q_{12}|$. Tento případ bude rozebrán dále.

Inspirováni předchozími sekczemi dosadíme tuto nerovnost do rovnice (5.30b) a získáme

$$(x^2 + y^2)^2 \geq |\lambda|^4 + 2|\lambda|^2 q + 2\operatorname{Re} \lambda^2 \omega q_{12}. \quad (5.31)$$

Dostáváme nerovnost, která je závislá na q i q_{12} . Tento způsob řešení nepovede k vyjádření přípustné oblasti, dokud nebude znát vyjádření $q = f(x, y, \lambda, \omega)$ a $q_{12} = g(x, y, \lambda, \omega)$, které lze spočítat pomocí výpočetního programu, jenž umí pracovat se symbolickými proměnnými (např. Matlab). Řešení poté vede na velice komplikované a dlouhé vztahy.

My zvolíme jinou strategii. Pro oba krajní případy $|\omega| = 1$ a $\omega = 0$ platí vlastnost, že rovnice $q = |q_{12}|$ vyjadřuje maximální reálnou část přípustného μ pro dané $y \in (-|\text{Im}\lambda|, |\text{Im}\lambda|)$. Budeme předpokládat platnost této vlastnosti i pro obecný případ. Dále budeme postupovat tak, že zavedeme optimalizační problém

$$\begin{aligned} \min \{ & x^2 : x^2 - y^2 - \operatorname{Re}\lambda^2 - q - \operatorname{Re}\omega q_{12} = 0, \\ & (x^2 + y^2)^2 - |\lambda|^4 - 2|\lambda|^2 q - 2\operatorname{Re}\lambda^2 \omega q_{12} - \\ & -(1 - |\omega|^2)(q^2 - |q_{12}|^2) = 0, \\ & q^2 - |q_{12}|^2 = 0 \} . \end{aligned} \quad (5.32)$$

Rovnice (5.32) vyjadřuje požadavek na minimální hodnotu kvadrátu reálné části μ za předpokladu, že platí rovnice (5.30a), (5.30b) a $\det Q_2 = 0$. Jedná se o optimalizační problém s omezeními ve tvaru rovnosti; zavedeme Lagrangeovu funkci

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & x^2 + \lambda_1 (x^2 - y^2 - \operatorname{Re}\lambda^2 - q - \operatorname{Re}\omega q_{12}) + \\ & + \lambda_2 ((x^2 + y^2)^2 - |\lambda|^4 - 2|\lambda|^2 q - 2\operatorname{Re}\lambda^2 \omega q_{12} - (1 - |\omega|^2)(q^2 - |q_{12}|^2)) + \\ & + \lambda_3 (q^2 - |q_{12}|^2) . \end{aligned} \quad (5.33)$$

Extrém funkce $f(x, q, q_{12}) = x^2$ nastane tehdy, když bude platit (viz. (Štecha, 2000, Sekce 2.3))

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = & 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = & 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = & 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = & 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{12}} = & 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = & 0. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Pro řešení soustavy rovnic (5.34) je vhodné použít opět výpočetní systém. V porovnání s vyjádřením $q = f(x, y, \lambda, \omega)$ a $q_{12} = g(x, y, \lambda, \omega)$ vede tato metoda k jednoduššímu vyjádření výsledného omezení.

Analýzou řešení pro několik zvolených ω jsme dostali následující závěry

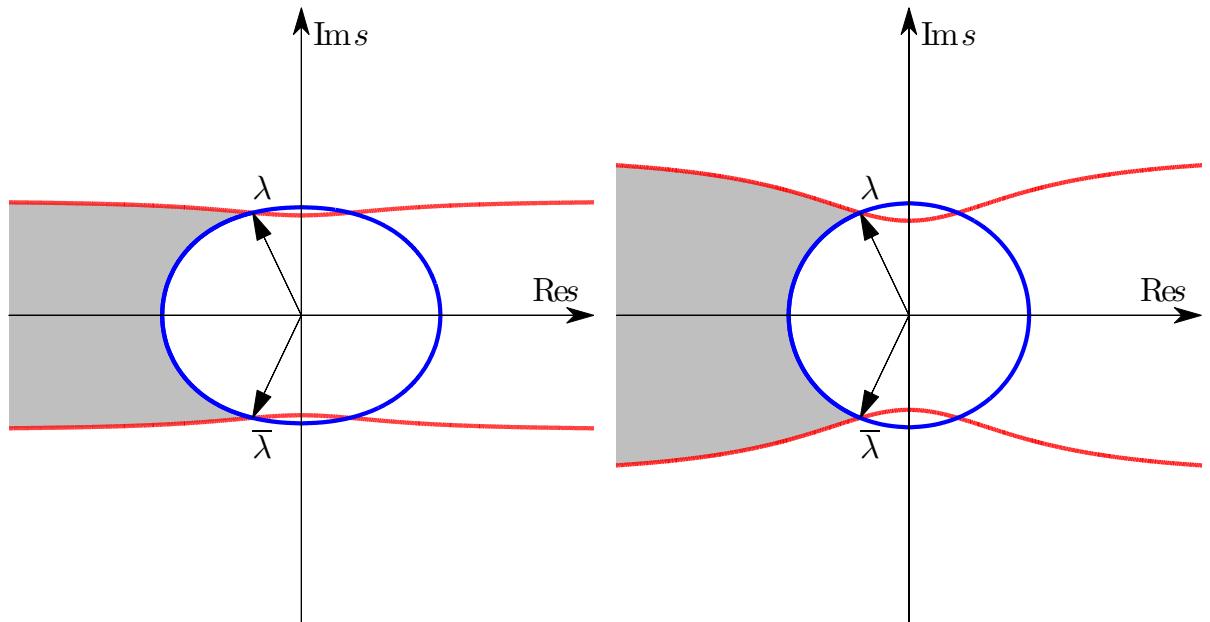
- $|\omega| = 1$: Výsledkem je část kružnice, závěr je v souladu se sekcí 5.1
- $\omega = 0$: Řešením je část Cassiniho oválu, stejně jako jsme popisovali v sekci 5.2
- $0 < |\omega| < 1$: Řešením je křivka osmého stupně, která se pro $|\omega| \rightarrow 1$ blíží kružnici a pro $|\omega| \rightarrow 0$ blíží Cassiniho oválu – modrá křivka na obrázku 5.4 .

Náš předpoklad, že maximální reálná část μ je pro $0 \leq |\omega| \leq 1$ a pro $y \in (-|\text{Im}\lambda|, |\text{Im}\lambda|)$ charakterizována $\det Q_2 = 0$, byl zřejmě správný.

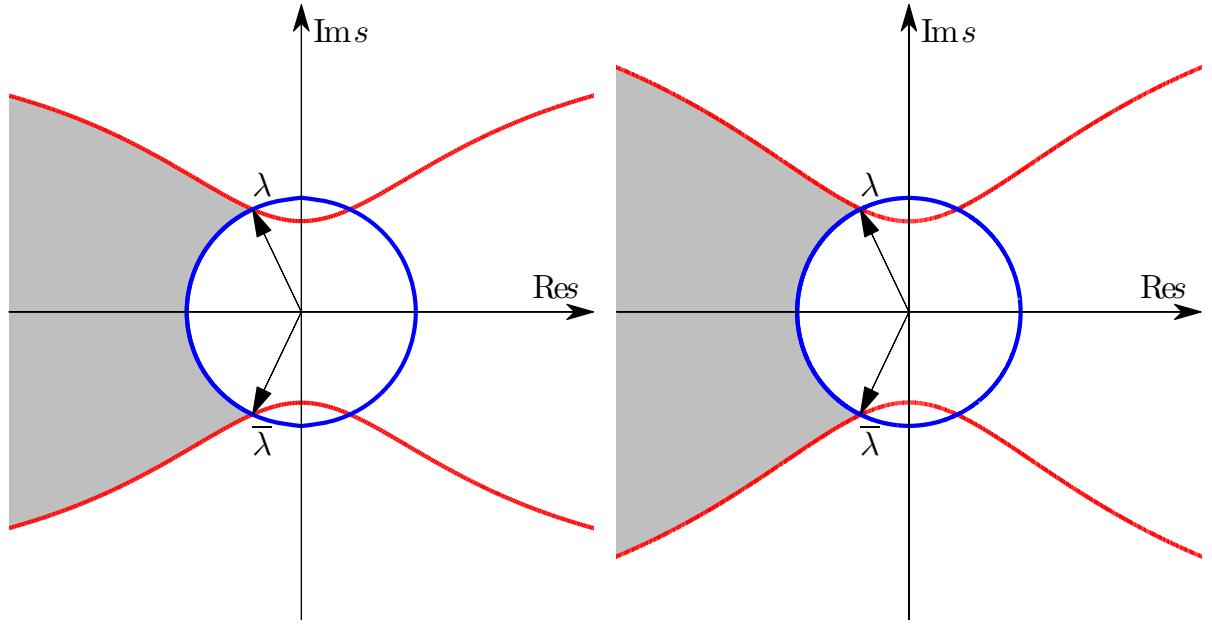
Pro vyjádření omezení maximální imaginární části je postup pomocí formulace úlohy jako optimalizačního problému ztížen tím, že neznáme charakteristiku tohoto omezení. V zadání optimalizačního problému by se poté objevila nerovnost, která komplikuje celou situaci.

Maximální imaginární část pro dané ω jsme tedy získali vyjádřením (5.30) pro každé x . Výsledky pro různé ω jsou na obrázku 5.4 znázorněny červenou křivkou. Z obrázků lze vyčíst pomalý růst maximální přípustné imaginární části pro $|\omega| < 0.5$, rychlejší v oblasti $0.5 \leq |\omega| < 0.9$ a strmý v oblasti $0.9 \leq |\omega| \leq 1$. Dále se ukazuje, že žádný pevný vztah mezi q a q_{12} neplatí.

Věta 5.3: Nechť platí předpoklady dané kapitolou 3. Váhovou matici R volíme tak, aby platilo $\Omega_2 = B_2^H R^{-1} B_2 = [\begin{smallmatrix} 1 & \bar{\omega} \\ \omega & 1 \end{smallmatrix}]$, kde $\omega \in \mathbb{C}$ a $0 < |\omega| < 1$. Dále mějme řiditelná komplexně sdružená vlastní čísla λ a $\bar{\lambda}$ matice A . Kvadratickým kritériem lze posunout reálnou část λ doleva od jeho stabilního obrazu, imaginární část je shora omezena (znázorněno na obrázku 5.4). Pro maximální přípustnou reálnou část (modrá křivka) platí vlastnost $q = |q_{12}|$ a je vyjádřena křivkou osmého stupně. Naopak u maximální imaginární části (červená křivka) nepozorujeme žádný vztah mezi q a q_{12} .



(a) Přípustná oblast pro μ pro $\lambda = -1 + 2j$ a $|\omega| = 0.5$ (b) Přípustná oblast pro μ pro $\lambda = -1 + 2j$ a $|\omega| = 0.8$



(c) Přípustná oblast pro μ pro $\lambda = -1 + 2j$ a $|\omega| = 0.9$ (d) Přípustná oblast pro μ pro $\lambda = -1 + 2j$ a $|\omega| = 0.95$

Obrázek 5.4: Přípustné oblasti pro μ pro různé hodnoty ω

5.4 Řešení algebraické Riccatiho rovnice

Kromě přípustných oblastí pro μ a $\bar{\mu}$ nás ještě zajímá výpočet řešení ARE P a zesílení F stavové zpětné vazby.

Podle kapitoly 3 známe vztah

$$P = T^{-H} \tilde{P} T^{-1},$$

kde \tilde{P} můžeme v tomto případě uvažovat ve tvaru

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$P_2 \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ je hermitovská matice se stejnými diagonálními prvky. Navíc $P_2 \geq 0$. Algebraická Riccatiho rovnice vyjádřená pomocí transformovaných matic je ve tvaru (3.11); uvedeme zde její tvar ještě jednou

$$T^{-H} \left(\tilde{A}^H \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A} - \tilde{P} \tilde{B} R^{-1} \tilde{B}^H \tilde{P} + \tilde{Q} \right) T^{-1} = 0.$$

Dosazením transformovaných matic do této rovnice dostaváme redukovaný tvar ARE

$$P_2 \Lambda_2 + \Lambda_2^H P_2 - P_2 \Omega_2 P_2 + Q_2 = 0. \quad (5.35)$$

Vyřešením rovnice (5.35) dostáváme transformované \tilde{P} . K získání P nám stačí pouze vlastní vektory příslušné λ a $\bar{\lambda}$

$$P = [w \quad \bar{w}] P_2 \begin{bmatrix} \bar{w}^T \\ w^T \end{bmatrix}.$$

Zesílení stavové F potom získáme dosazením do vztahu (3.6)

$$F = -R^{-1}B^T P.$$

Ukazuje se, že i v případě posunutí dvojice komplexně sdružených vlastních čísel není potřeba počítat řešení algebraické Riccatiho rovnice pro matice velikosti $n \times n$, ale stačí 2×2 .

Kapitola 6

Závěr

V této práci byla rozebrána metoda iterativního návrhu lineárních kvadraticky optimálních regulátorů, která dává návrháři řídicího systému určitý nadhled na chování výsledného zpětnovazebního systému. Předem zvolená poloha pólů uzavřené smyčky totiž definuje její dynamiku, přechodovou charakteristiku atp. V každé iteraci dojde k posunutí jednoho reálného pólů nebo dvojice komplexně sdružených pólů.

Uvedená metoda je použitelná na systémy, které doposud nemají řízení, ale i na systémy s kvadraticky optimálním regulátorem, u kterých chceme chování daného regulátoru pozměnit, ale zároveň si ponechat dobré vlastnosti LQ regulátorů (amplitudová a fázová bezpečnost).

Metoda je založena na transformaci systému do Jordanova kanonického tvaru. V takto transformovaném systému se velmi dobře projeví vazba vstupu na posunovaný pól. V transformovaných souřadnicích poté byly odvozeny vztahy pro výpočet váhových matic Q a R , řešení algebraické Riccatiho rovnice P a zesílení stavové zpětné vazby F , které realizují daný posun. Posunutí pólů není libovolné. Je závislé na typu pólů:

Reálný pól Problém posunování reálných pólů byl rozebrán v kapitole 4. Hlavním výsledkem je, že daný pól lze posunovat pouze doleva od jeho stabilního obrazu – stává se rychlejší.

Komplexně sdružená dvojice pólů Posunování komplexně sdružených pólů bylo probráno v kapitole 5. Zde jsme došli ke stejnemu závěru jako v případě reálného pólů (pól lze posunout pouze doleva od stabilního obrazu), ale navíc byla rozebráno, jak se přitom může měnit imaginární část. Ukázali jsme, že maximální imaginární část je závislá na parametru ω , který pro $\omega = 0$ nedovoluje zvětšovat imaginární část, pro $0 < |\omega| < 0.5$ dovoluje velmi málo zvětšit imaginární část; poté maximální imaginární část začne strměji růst až pro $|\omega| = 1$ je neomezená. Imaginární část je v takovém případě ohraničena hyperbolou.

Zkoumali jsme i minimální velikost reálné části μ v závislosti na parametru ω . Řešením úlohy jako optimalizační problém jsme dostali minimální velikost reálné části μ pro danou imaginární část μ . Tvar křivky byl potom odvislý od parametru ω .

Ukázali jsme pěkný přechod od kružnice ke Cassiniho oválu přes implicitně zadané křivky osmého stupně.

V porovnání s ostatními pracemi jsme dokázali uchopit problém v celé obecnosti a uspokojivě jej vyřešit. Původní práce byla rozšířena z jednorozměrových na mnoharozměrové systémy. U případu posunování komplexně sdružené dvojice pólů byla nalezena, analyzována a vykreslena přípustná oblast pro novou polohu pólů.

Jedinou otevřenou otázkou je matematický popis křivky omezující imaginární část v obecném případě $0 < |\omega| < 1$, kdy jsme její tvar vyřešili numericky pro danou polohu posunovaného pólu.

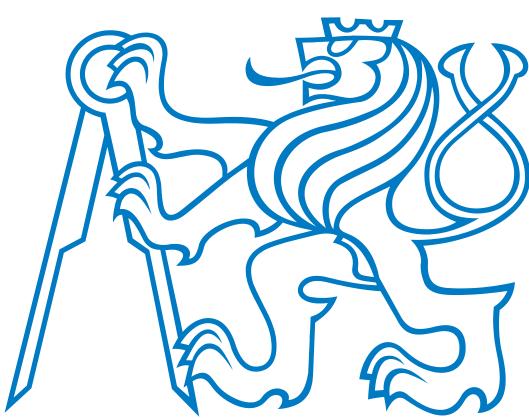
Literatura

- A. T. Alexandridis a G.D. Galanos. Optimal pole-placement for linear multi-input controllable systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 34:1602–1604, 1987.
- M. H. Amin. Optimal pole shifting for continuous multivariable linear systems. *Int. J. Control*, 41:701–707, 1985.
- Brian D. O. Anderson a John B. Moore. *Optimal control : linear quadratic methods*. Mineola: Dover Publications, 2007. ISBN 0486457664.
- Brian D.O. Anderson a J. B. Moore. Linear systems optimization with prescribed degree of stability. *IEEE Proceedings D*, 116:2083–2085, 1969.
- Panos J. Antsaklis a Anthony N. Michel. *A Linear Systems Primer*. Springer, 2007. ISBN 978-0-8176-4460-4.
- Jean Duplaix, Gilles Enea, a Maurice Franceschi. Commande optimale sous contrainte modale. *APII-RAIRO*, 28(3):247–262, 1994.
- M. Franceschi, G. Enea, a J. Duplaix. Aggregative pole placement of complex conjugate poles within continuous system optimal control. In *Proceedings of IFAC Conference System Structure and Control*, pages 410–415, Nantes, France, July 1995.
- K. Furuta a S. B. Kim. Pole assignment in a specified disk. *IEEE Transactions AC*, 32: 423–427, 1987.
- J. Hamhalter a J. Tišer. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2. vydání, 2005. ISBN 80-01-03356-2.
- Vladimír Havlena a Jan Štecha. *Moderní teorie řízení*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2. vydání, 2000. ISBN 80-01-02095-9.
- J. J. Hench, C. He, V. Kučera, a V. Mehrmann. Dampening controllers via a riccati equation approach. *IEEE Transactions AC*, 43:1280–1284, 1998.
- N. Kawasaki a E. Shimemura. Determining quadratic weighting matrices to locate poles in specific region. *Automatica*, 19:557–560, 1983.

- Eduard Krajník. *Základy maticového počtu*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1. vydání, 2006. ISBN 80-01-03376-7.
- F. J. Kraus a V. Kučera. Linear quadratic and pole placement iterative design. In *Proceedings of the 5th European Control Conference*, Karlsruhe, Germany, 1999.
- Petr Kulhánek. *TF1: Teoretická mechanika, studijní text pro doktorské studium*. FEL ČVUT, 2001. <<http://www.aldebaran.cz/studium/mechanika.pdf>>.
- V. Kučera a F. J. Kraus. Jak kvadratickým kritériem jednotlivé póly přemístit. In *Proceedings of the 12th Conference Process Control*, volume 2, pages 1–5, Tatranske Matliare, Slovakia, 1999.
- Frank L. Lewis a Vassilis L. Syrmos. *Optimal Control*. New York : Wiley, c1995., 2. vydání, 1995. ISBN 0-471-79363-9.
- M. Saif. Optimal modal controller design by entire eigenstructure assignment. *IEEE Proceedings D*, 136:341–344, 1989.
- O. A. Solheim. Design of optimal control systems with prescribed eigenvalues. *Int. J. Control*, 15:143–160, 1972.
- Kenji Sugimoto a Yutaka Yamamoto. On successive pole assignment by linear-quadratic optimal feedbacks. *Linear Algebra and its Applications*, 122/123/124:697–724, 1989.
- Eric W. Weisstein. Cassini ovals. from mathworld—a wolfram web resource [online], 2009a. <<http://mathworld.wolfram.com/CassiniOvals.html>>.
- Eric W. Weisstein. Lemniscate. from mathworld—a wolfram web resource [online], 2009b. <<http://mathworld.wolfram.com/Lemniscate.html>>.
- Jan Štecha. *Optimální rozhodování a řízení*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1. vydání, 2000. ISBN 80-01-02083-5.

Seznam obrázků

2.1	Lineární stavová zpětná vazba	12
2.2	Hamiltonovský systém	16
3.1	Iterativní návrh stavové zpětné vazby	27
4.1	Přípustná oblast pro μ při posunutí reálného pólu	30
5.1	Přípustná oblast pro posunutí komplexně sdružené dvojice pólů; $ \omega = 1$. .	42
5.2	Cassiniho ovál vyznačený na řezu toroidu	43
5.3	Přípustná oblast pro posunutí komplexně sdružené dvojice pólů; $\omega = 0$. .	46
5.4	Přípustná oblast pro posunutí komplexně sdružené dvojice pólů; $0 < \omega < 1$	50



Posunování pólů kvadratickým kriteriem

Text byl připraven pomocí typografického systému L^AT_EX 2 _{ε} a nástroje na generování soupisu literatury BibT_EX.

Obrázky v textu vytvořeny za pomocí programů Matlab, Dia, Metapost a typografického systému ConT_EXt.

Jiří Cigler

Praha, 2009