ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ
KATEDRA ŘÍDICÍ TECHNIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Řízení aktivního tlumení pomocí metody H_∞

Praha, 2009 Jindřich Chaloupek

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne ……. …….

podpis

Poděkování:

Děkuji především mému vedoucímu práce panu Ing. Aleši Kruczkovi, Ph.D. za všestrannou pomoc a rady při řešení mé diplomové práce.

Rád bych tímto též poděkoval všem přátelům, kteří mě při diplomové práci též podporovali a hlavně velký dík patří mé rodině za obětavost během celého mého studia.

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Katedra řídicí techniky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Jindřich Chaloupek**

Studijní program: Elektrotechnika a informatika (magisterský), strukturovaný
Obor: Kybernetika a měření, blok KM1 - Řídicí technika

Název tématu: **Řízení aktivního tlumení pomocí metody H˘**

Pokyny pro vypracování:

1.Seznamte se s problematikou aktivního tlumení a principy jeho řízení.
2.Použijte úplný model automobilu s lineárním motorem jako akčním členem a navrhněte jeho řízení pomocí metody H˘.
3.Ověřte navržený regulátor pomocí simulací, případně experimentů.

Seznam odborné literatury:

Dodá vedoucí práce

Vedoucí: Ing. Aleš Kruczek, Ph.D.

Platnost zadání: do konce zimního semestru 2008/2009

prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry

L.S.

r.z. M. Šimáková
doc. Ing. Boris Šimák, CSc.
děkan

V Praze dne 10. 9. 2007

Abstrakt

Diplomová práce řeší návrh robustního H_∞ regulátoru aktivního tlumení pérování automobilu. Použití aktivního pérování má dva hlavní důvody užití. Prvním je zvýšení jízdního komfortu cestujících, druhým je zlepšení jízdních vlastností automobilu. Tyto dva požadavky se vzájemně vylučují a není je možné vyplnit s použitím pasivního tlumení pérování. Regulátory pro aktivní tlumení jsem navrhoval nejdříve pro čtvrtinový a dále pro poloviční model automobilu. Pro řízení úplného modelu automobilu jsem použil regulátory ze čtvrtinového a poloviční modelu automobilu se změněnými konstantami. Čtvrtinový model je složen ze čtvrtiny hmotnosti automobilu, kola, tlumiče, pružiny a akčního členu. Jako akční člen pro řízení aktivního tlumení pérování využívá řízeného zdroje síly v podobě lineárního motoru. Čtvrtinový model umožňuje simulovat pouze vertikální pohyb automobilu. Poloviční model je složen ze dvou pevně spojených čtvrtinových modelů a umožňuje navíc simulovat předklánění automobilu. Úplný model automobilu je složen za dvou pevně spojených polovičních modelů a navíc dokáže simulovat naklánění automobilu. Regulátory jsem navrhl tak, aby minimalizovaly výchylku karosérie, předklánění a naklánění automobilu. Řízení pomocí H_∞ regulátorů splňuje dle simulací výše zmíněné požadavky.

Abstract

Diploma thesis solves robust H_∞ controller design of an automotive active suspension. Usage of an automotive active suspension has two main reasons. At first is the enhancement of passenger's riding comfort and second is the improvement of car's handling performance. These requirements are contradictory and it is impossible to implement them by using passive suspension. At first I have designed the controllers for automotive active suspension for the quarter car model, then for the half car model. For controlling the full car model I have used the controllers from the quarter car model and half car model with the different parameters. The quarter car model is compound of a quarter car weights, a wheel, a damper, a spring and an actuator. The automotive active suspension uses controlled force source in form of a linear motor as an actuator. The quarter car model enables to simulate only the car vertical movement. The half car model consists of two tight linked quarter car models and beyond enables to simulate car pitching motion. The full car model consists of two tight linked half car models and beyond enables to simulate car rolling motion. I designed controllers to minimize car vertical deviation, pitching and rolling. Control of H_∞ controllers from simulations meets the higher mentioned reasons.

Obsah

Seznam obrázků **III**

Seznam tabulek **V**

1. Úvod **1**

2. H nekonečno **3**

2.1. Neurčitosti…….. 3

2.2. H_∞ norma…… 4

2.3. Stabilita systému……. 6

2.4. H_∞ řízení...…….. 8

2.5. Funkce hinflmi()……. 10

3. Lineární motor v aktivním tlumení **12**

3.1. Lineární motor…… 12

3.2. Principy řízení……. 14

3.3. Akumulace energie……. 16

4. Modely automobilů **19**

4.1. Čtvrtinový model…… 19

4.2. Poloviční model……. 21

4.3. Úplný model…… 24

5. Regulátory a váhové funkce **30**

5.1. Čtvrtinový model…… 30

5.2. Poloviční model…….. 36

5.3. Úplný model…… 40

6. Výpočty a simulace **42**

6.1. Simulace……. 42

6.2. Výpočty kvality regulace…… 56

7. Závěr **60**

Seznam použité literatury a SW **62**

Příloha A - simulinková schémata **63**

Příloha B - obsah přiloženého CD **69**

Seznam obrázků

Obrázek 2.1: Diagram pro analýzu vnitřní stability 6
Obrázek 2.2: Standardní regulační obvod H_∞ řízení 8
Obrázek 3.1: Konstrukce části lineárního motoru 12
Obrázek 3.2: Lineární synchronní třífázový motor ThrustTube TBX 3810 13
Obrázek 3.3: Závislost síly na rychlosti u TBX3810 převzato z [6] 13
Obrázek 3.4: Polohové zpětnovazební řízení lineárního motoru 14
Obrázek 3.5: Silové zpětnovazební řízení lineárního motoru, převzato z [7] 15
Obrázek 3.6: Spínaný most, převzato z [7] 15
Obrázek 3.7: Vektorové řízení synchronního motoru 16
Obrázek 3.8: Akumulace energie s DC/DC měniči, převzato z [5] 17
Obrázek 3.9: Akumulace energie s disipátorem, převzato z [5] 17
Obrázek 4.1: Čtvrtinový model automobilu 19
Obrázek 4.2: Poloviční model automobilu 21
Obrázek 4.3: Úplný model automobilu (půdorys) 25
Obrázek 5.1: Schéma rozšířeného systému čtvrtinového modelu 30
Obrázek 5.2: Amplitudová frekvenční charakteristika váhové funkce W_1 34
Obrázek 5.3: Amplitudová frekvenční charakteristika váhové funkce W_2 35
Obrázek 5.4: Amplitudové frekvenční charakteristiky doplňkové váhových funkcí $1/W_1$ a $1/W_2$ 35
Obrázek 5.5: Schéma rozšířeného systému polovičního modelu 36
Obrázek 5.6: Amplitudová frekvenční charakteristika váhových funkcí W_{11} a W_{12} 39
Obrázek 5.7: Amplitudová frekvenční charakteristika váhových funkcí W_{21} a W_{22} 39
Obrázek 5.8: Amplitudové frekvenční charakteristiky váhových funkcí $1/W_{11}$ a $1/W_{22}$ (vlevo), $1/W_{21}$ a $1/W_{22}$ (vpravo) 39
Obrázek 5.9: Blokové schéma řízení celého modelu čtvrtinovými H_∞ regulátory 41
Obrázek 5.10: Blokové schéma řízení celého modelu polovičními H_∞ regulátory 41
Obrázek 6.1: Odezva polohy odpružené části na 10 cm skok poruchy 43
Obrázek 6.2: Akčního zásah na 10 cm skok poruchy 43
Obrázek 6.3: Odezva polohy odpružené části na poruchu zpomalovacího retardéru 44
Obrázek 6.4: Akčního zásah na poruchu zpomalovacího retardéru 44
Obrázek 6.5: Přední kolo - odezva polohy odpružené části na 10 cm skok poruchy 45

Obrázek 6.6: Zadní kolo - odezva polohy odpružené části na 10 cm skok poruchy 45
Obrázek 6.7: Předklánění automobilu na 10 cm skok poruchy 46
Obrázek 6.8: Přední kolo - akční zásah na 10 cm skok poruchy 46
Obrázek 6.9: Zadní kolo - akční zásah na 10 cm skok poruchy 47
Obrázek 6.10: Přední kolo - odezva polohy odpružené části na poruchu zpomalovacího retardéru 47
Obrázek 6.11: Zadní kolo - odezva polohy odpružené části na poruchu zpomalovacího retardéru 48
Obrázek 6.12: Předklánění automobilu na poruchu zpomalovacího retardéru 48
Obrázek 6.13: Přední kolo - akční zásah na poruchu zpomalovacího retardéru 49
Obrázek 6.14: Zadní kolo - akční zásah na poruchu zpomalovacího retardéru 49
Obrázek 6.15: Přední kolo - odezva polohy odpružené části na 10 cm skok poruchy 50
Obrázek 6.16: Zadní kolo - odezva polohy odpružené části na 10 cm skok poruchy 50
Obrázek 6.17: Předklánění automobilu na 10 cm skok poruchy 51
Obrázek 6.18: Přední kolo - akční zásah na 10 cm skok poruchy 51
Obrázek 6.19: Zadní kolo - akční zásah na 10 cm skok poruchy 52
Obrázek 6.20: Přední kolo - odezva polohy odpružené části na poruchu zpomalovacího retardéru 52
Obrázek 6.21 Zadní kolo - odezva polohy odpružené části na poruchu zpomalovacího retardéru 53
Obrázek 6.22: Předklánění automobilu na poruchu zpomalovacího retardéru 53
Obrázek 6.23: Přední kolo - akční zásah na poruchu zpomalovacího retardéru 54
Obrázek 6.24: Zadní kolo - akční zásah na poruchu zpomalovacího retardéru 54
Obrázek 6.25: Naklánění automobilu na 10 cm skok poruchy 55
Obrázek 6.26: Naklánění automobilu na poruchu zpomalovacího retardéru 55

Seznam tabulek

Tabulka 6.1: Odezva zrychlení odpružené části na 10 cm skok poruchy 57
Tabulka 6.2: Přední kolo - odezva zrychlení odpružené části na 10 cm skok poruchy 57
Tabulka 6.3: Zadní kolo - odezva zrychlení odpružené části na 10 cm skok poruchy 58
Tabulka 6.4: Předklánění automobilu na 10 cm skok poruchy 58
Tabulka 6.5: Levé přední kolo - odezva zrychlení odpružené části na 10 cm skok poruchy 58
Tabulka 6.6: Levé zadní kolo - odezva zrychlení odpružené části na 10 cm skok poruchy 58
Tabulka 6.7: Pravé přední kolo - odezva zrychlení odpružené části na 10 cm skok poruchy 58
Tabulka 6.8: Pravé zadní kolo - odezva zrychlení odpružené části na 10 cm skok poruchy 59
Tabulka 6.9: Předklánění automobilu na 10 cm skok poruchy 59

Kapitola 1

Úvod

Tlumení pérování automobilu má dva hlavní důvody použití. Prvním důvodem je zvýšení jízdního komfortu cestujících, druhým pak zlepšení jízdních vlastností automobilu. Komfort cestujících lze definovat jako schopnost potlačit zrychlení odpružené části karoserie automobilu, které vzniká při kontaktu pneumatiky s nerovnostmi vozovky. Pohodlí cestujících je nejvíce citlivé na frekvencích *2-14 Hz*, což jsou frekvence, které lidské tělo vnímá velmi negativně. Tyto frekvence se odstraňují použitím inverzní funkce v podobě pásmové zádrže. Jízdní vlastnosti lze definovat jako stabilitu a řiditelnost automobilu určenou potlačením naklánění automobilu při zatáčení a předklánění automobilu při brzdění a rozjíždění, dále pak zvýšením adheze. Adheze je schopnost vozidla přenášet tíhovou sílu mezi koly a vozovkou.

Základní rozdělení tlumení pérování automobilu:

1) Pasivní tlumení,
2) Semi–aktivní tlumení,
3) Aktivní tlumení.

Nejpoužívanějším typem je pasivní tlumení, které se skládá z pružiny a vzduchového nebo hydraulického tlumiče. Pasivní pérování závisí pouze na správné volbě koeficientu tlumení tlumiče a tuhosti pružiny. Koeficient tlumení tlumiče je nastavena na kompromis mezi pohodlím cestujících (malý koeficient tlumení) a vylepšením jízdních vlastností automobilu (velký koeficient tlumení). Tlumič zajišťuje, aby nedošlo k rozkmitání odpružené části automobilu při odskoku kola od povrchu vozovky.

Systém semi-aktivního tlumení je tvořen pružinou a tlumičem, který je vybaven řídící jednotkou pro automatické nastavení koeficientu tlumení. Koeficient tlumení je měněn změnou tlaku vzduchu nebo oleje v tlumiči. Na rozdíl od aktivního pérování neobsahuje semi-aktivní pérování výkonový generátor síly. Semi-aktivní tlumení v diplomové práci nenavrhuji.

Aktivní tlumení tvoří samostatný akční člen v podobě řízeného zdroje síly například v podobě lineárního motoru. Lineární motor funguje na principu elektromagnetické indukce, transformuje elektrickou energie na mechanickou, ve formě přímočarého pohybu.

Konstrukčně se odlišuje od rotačních elektromotorů tím, že jeho primární a sekundární části nejsou kruhové, ale lineární.

Pro jednotlivé modely aktivního tlumení v podobě čtvrtinové, polovičního a úplného modelu navrhuji robustní řízení pomocí metody H_∞. Úplný model aktivní tlumení řídím pomocí čtyř H_∞ regulátorů navržených pro čtvrtinový model nebo pomocí dvou H_∞ regulátorů navržených pro poloviční model. Důvody tohoto řízení nalezneme v kapitole 5. Robustní řízení je vhodné z hlediska možnosti změny několika parametrů automobilu, jako je například zatížení. K návrhu regulátorů jsem použil software Simulink, který je součástí Matlab 7.1 a LMI Control Toolbox.

Kapitola 2

Teorie H_∞

V této kapitole se zabývám rozdělením a popisem různých druhů neurčitostí. Hlavní část tvoří teorie robustního řízení zabývající se teorií k H_∞ řízení. Dále je zde popsán optimální H_∞ regulátor a výpočet sub-optimálního H_∞ regulátoru. Popisuji zde různě typy stabilit a větu o malém zesílení a nakonec popis funkce *hinflmi()* sloužící k výpočtu sub-optimální H_∞ regulátoru.

2.1 Neurčitosti

Neurčitost je rozdíl mezi skutečným a matematickým modelem. V reálném případě nemůžeme nikdy přesně matematicko-fyzikálně popsat skutečný model, vždy nám vznikne nějaká neurčitost. Dále se mohou měnit parametry systému v čase, popřípadě nepřesné zjištění parametrů. Podrobnosti k jednotlivým typům neurčitostí nalezneme v [3].
Rozdělení neurčitostí:

1) Reálné parametrické
2) Dynamické neurčitosti
    a) Aditivní
    b) Multiplikativní
3) Několik lineárních modelů

Reálná parametrická neurčitost je konkrétní fyzikální parametr v modelu systému (např.: hmotnost nákladu osobního automobilu) reprezentovaná intervalem, který je určen svými krajními hodnotami minimem a maximem, mezi kterými se skutečná hodnota parametru může měnit.

Neparametrické neurčitosti oproti parametrickým neurčitostem do modelu systému přináší kompletní neurčitou dynamiku, která je charakterizována svojí amplitudovou a frekvenční charakteristikou, např. frekvenční závislost akčních členů a jejich saturace.

Aditivní neurčitost působí paralelně se systémem, tedy jejich účinky na vstupní signál se sčítají. Aditivní neurčitost můžeme definovat jako absolutní rozdíl mezi skutečnou dynamikou systému a matematickým modelem.

Multiplikativní neurčitost vyjadřuje míru neurčitosti na různých frekvencích. Jde o aditivní neurčitost normovanou na každé frekvenci přenosem systému.

Několik lineárních modelů, kde každý představuje v nějakém smyslu extrémní chování systému a pomocí změny pracovního bodu lze popsat jeho chování.

2.2 H_∞ norma

Dynamickou neurčitost lze popsat pomocí přítomnosti neurčitého subsystému a nelze použit neurčitého fyzikálního parametru. K charakterizování takové dynamické neurčitosti se používá popis pomocí frekvenční obálky, jež omezuje amplitudovou frekvenční charakteristiku a umožňuje volný průběh fáze. Zavádíme dynamický člen Δ, pro který platí:

$$\max_{\omega} |\Delta(j\omega)| \leq 1 \tag{2.1}$$

Tento člen může mít jakýkoliv řád, zároveň nemusí jít ani o racionální funkci (může obsahovat zpoždění). Charakteristikou tohoto členu je, že musí splňovat podmínku, kdy jeho amplitudová frekvenční charakteristika bude v celém frekvenčním spektru menší nebo rovna jedné. Jelikož neurčitost bývá vyšší na frekvencích vyšších a nižších na frekvencích nižších, je model systému velmi spolehlivý. Přidáváme proto k modelu systému frekvenční závislou váhu $w(\omega)$, kde model systému neurčitosti se rovná:

$$G_{neur} = w(\omega)\Delta. \tag{2.2}$$

Kvalitativní ukazatel H_∞ je norma stabilní přenosové funkce, která vyjadřuje maximální zesílení přes všechny frekvence. Definice pro SISO (Single-input Single-output – systém s jedním vstupem a jedním výstupem):

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega \in R} |G(j\omega)|. \tag{2.3}$$

Toto omezení lze přepsat do tvaru:

$$\|\Delta\|_\infty \leq 1 . \tag{2.4}$$

Graficky lze vyložit H_∞ normu:

- maximální hodnotu amplitudové části frekvenční charakteristiky systému $\sup|G(j\omega)|$,
- vzdálenost Nyquistovy charakteristiky od začátku k nejvzdálenějšímu bodu v komplexní rovině.

V případě MIMO (Multiple-input Multiple-output - systém s více vstupy a více výstupy) systémů náležitým způsobem zobecňuje absolutní hodnoty ze SISO systémů na singulární čísla. Singulárními čísly matice *A* jsou odmocniny z vlastních čísel matice *A*A*, kde A* představuje konjugovanou matici A. Konjugovaná matice A* je komplexně sdružená a transponovaná matice A. Největší singulární číslo matice *A* dosáhneme takto:

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega \in R} \bar{\sigma}|G(j\omega)| . \tag{2.5}$$

Pokud normu H_∞ bereme v operátorovém smyslu, pak je matematicky brána jako největší možné zesílení vstupního signálu po průchodu systémem.

Výpočet nekonečné normy

Pro výpočet nekonečné normy lze použít grafické provedení pro SISO systémy pomocí přibližování se frekvenční charakteristice nebo Nyquistově charakteristice, popřípadě pro MIMO systém přibližováním se frekvenční charakteristice singulárních čísel.

Řešení pomocí výpočtu se používá vlastnosti singularity matice Hamiltoniánu společně s metodou půlení intervalu.

Věta 1: *Když $\gamma > 0$ a systém ve tvaru*:

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = C(sI - A)^{-1} B + D, \tag{2.6}$$

pak $\|G\|_\infty \le \gamma$, *právě tehdy* $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ *a matice Hamiltoniánu H nemá vlastní čísla na imaginární ose, kde*

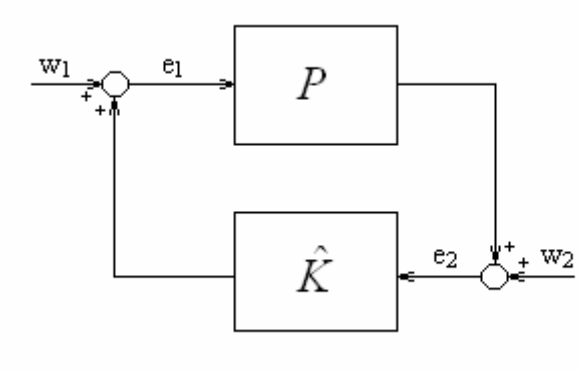
$$H = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^*C & BR^{-1}B^* \\ -C^*(I + DR^{-1}D^*)C & -(A + BR^{-1}D^*C) \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

$$R = \gamma^2 I - D^* D.$$

Metodou půlení intervalu získáme H_∞ normu. Pro zvolený interval γ $(\gamma_l \div \gamma_u)$ se hlídají vlastní čísla matice Hamiltoniánu H tak, aby nebyla umístěna na imaginární ose. Iterace v algoritmu probíhá pomocí půlení intervalu γ, tedy $\frac{y_l + \gamma_u}{2}$. Přesný algoritmus v [2].

2.3 Stabilita systému

- Vnitřní stabilita



Obrázek 2.1: Diagram pro analýzu vnitřní stability

Systém je vnitřně stabilní podle schématu z obrázku 2.1, pokud matice přenosů:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\hat{K} \\ -P & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - \hat{K}P)^{-1} & \hat{K}(I - P\hat{K})^{-1} \\ P(I - \hat{K}P)^{-1} & (I - P\hat{K})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I + \hat{K}(I - P\hat{K})^{-1}P & \hat{K}(I - P\hat{K})^{-1} \\ (I - P\hat{K})^{-1}P & (I - P\hat{K})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

$$\hat{K} := -K$$

obsahuje pouze racionální, reálné, ryzí a stabilní přenosové funkce, tedy jsou-li póly a nuly přenosové matice (2.8) pouze v pravé polorovině, I představuje jednotkovou matici. Důkaz věty najdeme v [2].

- Nominální stabilita

  Žádná ze součástí systému neobsahuje neřiditelné a/nebo nepozorovatelné módy a impulz omezeného signálu na vstupu systému vybudí odezvu, která je omezená. Uzavřená smyčka je nominálně stabilní, pokud K vnitřně stabilizuje nominální model P_0.

- Robustní stabilita

  Systém je robustně stabilní, pokud K vnitřně stabilizuje libovolný nepřesný model z $P \in \Pi$, kde Π je množina nepřesných modelů.

- Věta o malém zesílení

  Základním prostředkem pro určování robustní stability je věta o malém zesílení:

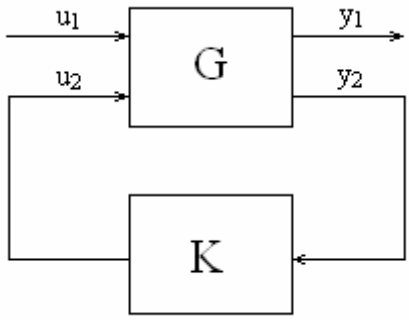
  Věta 2: *Předpokládejme, že $\hat{K}$ a P jsou reálné, ryzí a stabilní přenosové matice a $\gamma > 0$, pak vzájemně propojený systém z obrázku 2.1 je vnitřně stabilní pro všechna P a platí*:

$$\begin{aligned} &\text{a) } \|P\|_\infty \le \frac{1}{\gamma} \text{ právě tehdy, když } \left\|\hat{K}(s)\right\|_\infty < \gamma \\ &\text{b) } \|P\|_\infty < \frac{1}{\gamma} \text{ právě tehdy, když } \left\|\hat{K}(s)\right\|_\infty \le \gamma \end{aligned} \tag{2.9}$$

  Grafickou interpretací věty o malém zesílení je, že Nyquistova charakteristika nikdy neobkrouží kritický bod [-1,0]. Důkaz věty nalezneme v [2].

2.4 H_∞ řízení

Standardní regulační obvod H_∞ řízení je uveden na obrázku 2.2, kde jednotlivé vstupní a výstupní veličiny jsou vektory pro MIMO systémy.



Obrázek 2.2: Standardní regulační obvod H_∞ řízení

Popis jednotlivých veličin pro celý model automobilu:

u_1 – vstupní veličina (povrch vozovky vstupy: z_{r1} až z_{r4})
u_2 – akční veličina (požadovaná síla z generátorů síly: f_1 až f_4)
y_1 – řízený výstup (obsahuje vážení systému)
y_2 – měřený výstup (zpětnou vazbu tvoří rozdíly: z_{b1}-z_{w1} až z_{b4}-z_{w4})

Přenosová matice systému G rozšířená o váhové funkce a přenosová matice regulátoru K z obrázku 2.3 jsou reálné, racionální a ryzí. Přenos ze vstupní veličiny u_1 na řízený výstup y_1 nazvu T_{u1y1}, pak optimálním H_∞ řízením je:

Nalezení všech přípustných regulátorů $K(s)$, které budou minimalizovat $\left\| T_{u1y1} \right\|_\infty$. Přípustný regulátor je takový, který vnitřně stabilizuje systém.

Optimální H_∞ regulátor, který byl definován, není obecně jediný pro MIMO systém. Nalezení optimálního H_∞ regulátoru je často numericky a analyticky velmi náročné. Znalost optimálního H_∞ regulátoru může být užitečné, ale praxi často není nezbytné a může být dokonce nežádoucí navrhovat optimální regulátor. Z tohoto důvodu se častěji využívají regulátory sub-optimální, které získáme snadněji a jejich řešení H_∞ regulátoru se blíží k optimálnímu řešení.

Sub-optimální H_∞ regulátor: Pro $\gamma > 0$, najdi všechny přípustné regulátory $K(s)$ takové,

že $\left\| T_{u1y1} \right\|_\infty < \gamma$, pokud existují.

Zjednodušený návrh H∞ regulátoru

Zjednodušený návrh sub-optimálního H_∞ regulátoru závisí na požadavcích, které jsou vzneseny na vlastnosti a formu stavové realizace systému. Odvození a důkaz sub-optimálního H_∞ regulátoru nalezneme v [2]. Přenosová funkce systému G z obrázku 2.2 lze zapsat pro návrh sub-optimálního H_∞ regulátoru ve formě:

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right], \tag{2.10}$$

kde následující předpoklady jsou:

I. Dvojice matic (A, B_1) je řiditelná a dvojice matic (C_1, A) je pozorovatelná;
II. Dvojice matic (A, B_2) je dosažitelná a dvojice matic (C_2, A) je rekonstruovatelná;
III. $D_{12}^*\begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$;
IV. $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$.

Tyto předpoklady doplňují dvě další podmínky přijaté v realizaci *G(s)* a to $D_{11}=0$ a $D_{22}=0$. Blíže o těchto podmínkách v kapitole 5. Řešení H_∞ zahrnuje následující dvě matice Hamiltoniánu:

$$\begin{aligned} H_\infty &= \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^* - B_2 B_2^* \\ C_1 C_1^* & -A^* \end{bmatrix}, \\ J_\infty &= \begin{bmatrix} A^* & \gamma^{-2} C_1 C_1^* - C_2 C_2^* \\ -B_1 B_1^* & -A \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Smysl této formy dále vysvětluje věta 3 (převzato z [1]):

Věta 3: *Existuje přípustný regulátor takový, že* $\left\|T_{u1y1}\right\|_\infty < \gamma$ *a následující tři podmínky jsou splněny:*

I. $H_\infty \in dom(Ric)$ a $X_\infty := Ric(H_\infty) > 0$,

II. $J_\infty \in dom(Ric)$ a $Y_\infty := Ric(J_\infty) > 0$,

III. $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$,

pak při dodržení těchto podmínek existuje jeden takový regulátor

$$K_{sub}(s) := \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array}\right], \tag{2.12}$$

kde

$$\begin{gathered} \hat{A}_\infty := A + \gamma^{-2} B_1 B_1^* X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 \\ F_\infty := -B_2^* X_\infty,\ L_\infty := -Y_\infty C_2^*,\ Z_\infty := \left(I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty\right)^{-1}. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Pojmy ve větě jsou:

- *dom(Ric)* je oblast, která se sestává z matice Hamiltoniánu H se dvěma atributy:
  a) vlastní čísla matice H neleží na imaginární ose,
  b) podprostory $X_\infty(H) = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ a $\mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ jsou komplementární
- *Im(A)* je obraz matice, který je definován: $\mathrm{Im}(A) = \{y \in C : Ax = y, x \in C\}$.
- *Ric(H)* je stabilizující řešení algebraické Riccatiho rovnice
- ρ je spektrální poměr, definice: $\rho(A) = \max|\lambda_i|$, kde λ_i jsou vlastní matice *A*.

2.5 Funkce hiflmi()

Pro výpočet regulátoru pomocí H_∞ normy používám funkci *hinflmi()* implementované v LMI Control Toolboxu simulačního softwaru Matlab R14. Výše zmíněná funkce hledá pomocí lineárních maticových nerovnosti sub-optimální H_∞ regulátor pro snižující se γ. Specifikace funkce je převzata z [4] a nápovědy k funkci.

Implementace:

[gopt,K] = hinflmi(P,r,g,tol,options);

Výstupy funkce:

gopt	-	gama optimální
K	-	přenos regulátoru

Vstupy funkce:

P	-	matice zabaleného systému pomocí příkazu P = pck(A,B,C,D);
r	-	vektor 1x2, který specifikuje velikost matice D_{22}
g	-	gama, uživatelem nastavená kvalita regulace
tol	-	tolerance gama v procentech
options	-	vektor 1x3, kontrolních parametrů

options (1): Hodnota (0÷1), redukuje normu *R* při zvýšení koeficientu → zpomaluje dynamiku *K* .

options (2): Stejná funkce jako v případě options (1), ale pro *S*.

options (3): Redukce řádu regulátoru je vykonána, když

$\sigma(X * Y) \geq (1 - otions(3)) * gopt^2$,

kde $X = \frac{X_2}{X_1}$ a $Y = \frac{Y_2}{Y_1}$ jsou výsledky dvou H_∞ Riccatiho nerovností pro gama

$R=X_1$ a $S=Y_1$ jsou výsledky LMI (Linear metrix inequality – lineární maticové nerovnosti), $X_2 = Y_2 = gopt*eye$, *eye* – jednotková matice velikosti *gopt*.

Lineární maticová nerovnost převzato z [4]:

$$A(x) := A_0 + x_1 A_1 + \ldots + x_N A_N < 0\,, \tag{2.14}$$

kde

$x = (x_1, \ldots, x_N)$ je vektor neznámých skalárů (optimalizované parametry),

$A_0, \ldots, A_N$ jsou symetrické matice,

< 0 značí, že *A(x)* je negativně definitní tj. největší vlastní číslo *A(x)* je negativní.

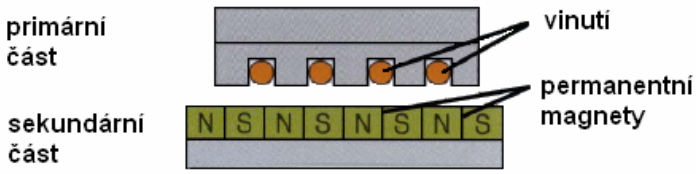
Kapitola 3

Lineární motor v aktivním tlumení

Aktivní tlumení je realizováno pomocí řízených akčních členů, které jsou zdrojem proměnné síly. Tato síla působí mezi odpružené částí automobilu (karosérií) a neodpruženou částí automobilu (kolem). Aktivní tlumení může zlepšit vlastnosti pasivního a semi-aktivního tlumení např. v překmitu či době ustálení. Nevýhodou aktivního tlumení je energie, kterou je nutné dodat tomuto zdroji síly. Zdroje síly se vyznačují velkou rychlostí v řádech m/s a velikostí dodané síly, která je v řádech kN. Základním požadavkem aktivního tlumení je minimalizace vertikálních vibrací odpružené části automobilu u čtvrtinového modelu, u polovičního modelu se navíc redukuje předklánění automobilu a u celého modelu se dále redukuje náklon automobilu. Pro realizace řízených zdrojů síly se používají lineární motory. Stabilita a řiditelnost automobilu charakterizuje potlačení naklánění automobilu při zatáčení a předklánění při brzdění.

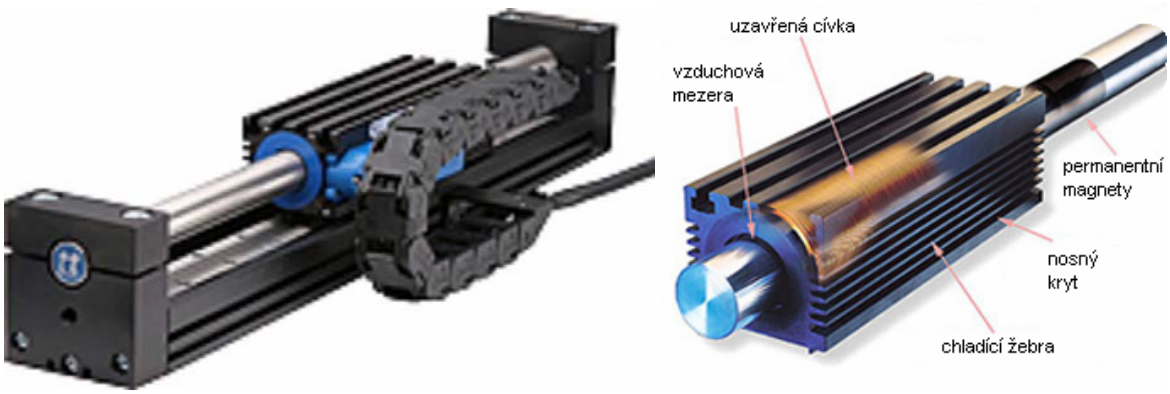
3.1 Lineární motor

Lineární motor funguje na principu elektromagnetické indukce. Přeměňuje se v něm elektrická energie na mechanickou ve formě přímočarého pohybu. Konstrukčně se odlišuje od rotačních elektromotorů tím, že jeho primární ani sekundární část není kruhová, ale lineární tedy přímková. Jde o rotační motor o nekonečném poloměru, kde primární část vykonává místo rotačního pohybu pohyb přímočarý a sekundární část je pevná. Primární část lineárních motorů je složena z feromagnetických plechů v jejíž drážkách je uloženo trojfázové vinutí zapojené do hvězdy. Sekundární část je reprezentována permanentními magnety. Lineární motor lze provozovat v režimu řízení síly nebo polohy.



Obrázek 3.1: Konstrukce části lineárního motoru

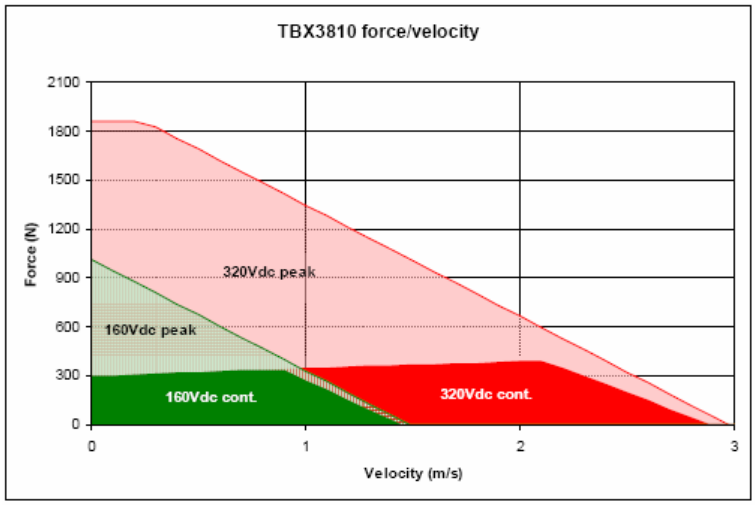
Po přivedení řídicího proudu do třífázového vinutí v primární části lineárního motoru dojde ke vzniku magnetického pole mezi primární a sekundární částí. Výsledkem je přímočarý pohyb primární části. Dodávaná síla je řízena velikostí řídicího proudu. Přes velké zrychlení dosahuje lineární motor velmi přesného polohování.



Obrázek 3.2: Lineární synchronní třífázový motor ThrustTube TBX 3810

Parametry lineární motoru ThrustTube TBX 3810 převzaty z [6]:

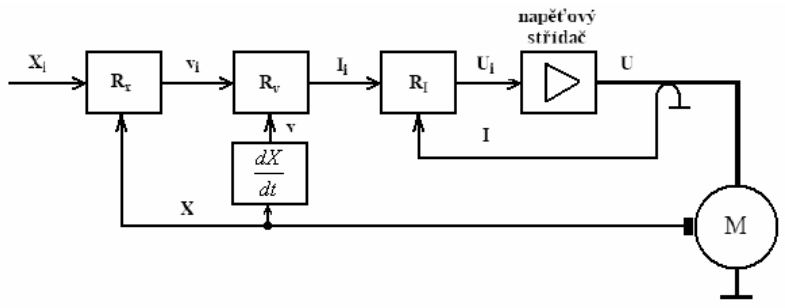
- maximální špičková síla = *2027N*
- trvalá síla = *293,2N*
- maximální špičkový proud = *21,8A*
- trvalý proud = *3,15A*
- maximální napětí = *320V DC*
- maximální teplota = *100 °C*



Obrázek 3.3: Závislost síly na rychlosti u TBX3810, převzato z [6]

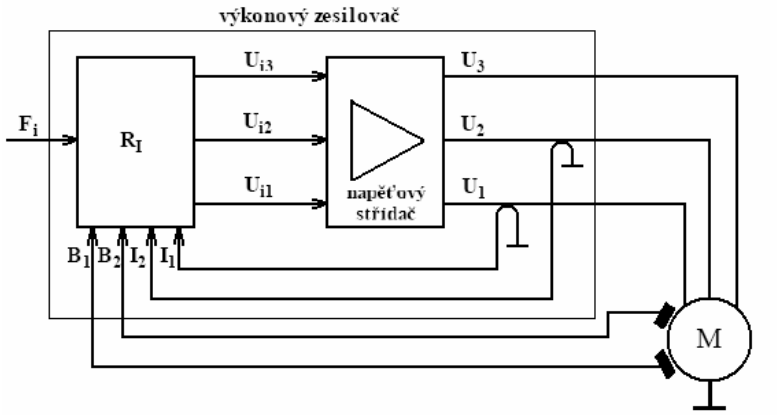
3.2 Principy řízení

Pro řízení lineárních motorů lze použít číslicové regulátory s kaskádovým uspořádáním tří zpětnovazebních smyček. První proudová smyčka řídí proud, který protéká vinutím lineárního motoru. Druhá zpětnovazební smyčka řídí rychlost posuvu, kterou lze získat derivací polohy podle času získanou např. optickým senzorem. Třetí zpětnovazební smyčka slouží k řízení polohy. Schéma polohového zpětnovazebního řízení lineárního motoru je zobrazeno na obrázku 3.4.



Obrázek 3.4: Polohové zpětnovazební řízení lineárního motoru

Při použití lineárního motoru v režimu řízení síly zobrazeném na obrázku 3.5 se využívá pouze první proudová smyčka ze schématu na obrázku 3.4. U lineárního třífázového synchronního motoru se využívá proudová smyčka pro dvě ze tří fází. Proud třetí fáze je konstantní. Vyvozená síla synchronního motoru závisí na velikosti proudu protékajícím vinutím primární části motoru a na poloze tohoto vinutí vůči permanentním magnetům. Z výše uvedeného důvodu je komutace proudů řízena v závislosti na intenzitě magnetického pole. V prvních dvou smyčkách je zapojen Hallův senzor, který přímo měří velikost intenzity magnetického pole *B*. Alternativně lze místo Hallova senzoru použít snímač absolutní polohy a velikost intenzity magnetického pole pak dopočítat. Napěťový střídač z obrázků 3.4 užívá pro generování napětí *U* pulzně šířkové modulace a je napájen ze stejnosměrného zdroje U_0. Při řízení jednofázového lineárního motoru z obrázku 3.4 se využije pouze třetiny spínaného mostu z obrázku 3.6 a to výstupu U_1, který je ovládán tranzistory T_1 a T_{1b}. Pro spínání se užívají unipolární tranzistory NMOS popřípadě IGBT u vyšších spínaných proudů.

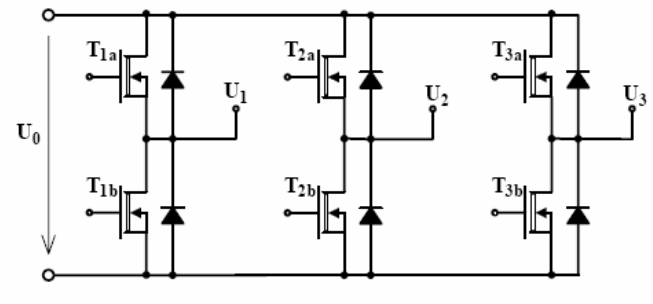


Obrázek 3.5: Silové zpětnovazební řízení lineárního motoru, převzato z [7]

Pro třífázové řízení pomocí napěťového střídače se používá zapojení dle obrázku 3.6 – tzv. spínaný most. Spínaný most vyžaduje pro svou funkci stejnosměrné napájení. Princip fungování spínaného mostu je následující:

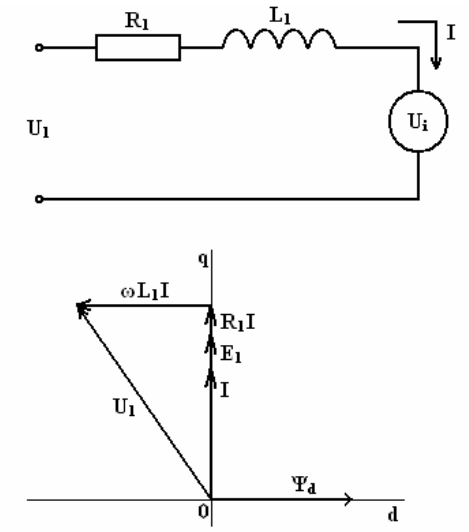
V prvním úseku periody dojde k sepnutí tranzistoru T_{1a}, rozepne se T_{1b} a výstupu U_1 se rovná napětí U_0 po dobu t_{1a}. V druhém úseku periody se T_{1a} rozepne, T_{2b} sepne a napětí U_0 je nulové po dobu t_{2b}. Výsledné napětí U_1 je rovné střední hodnotě pulzní funkce:

$$U_1 = \frac{t_{1a}}{t_{1a} + t_{2b}} U_0 \,. \tag{3.1}$$



Obrázek 3.6: Spínaný most, převzato z [7]

Pro řízení třífázových synchronních motorů se používá vektorové řízení. Řídicí napětí U_i individuálních fází jsou vyjádřena fázorem $\boldsymbol{U_1}$, proudy fázorem $\boldsymbol{I}$, indukované elektromotorická napětí fázorem $\boldsymbol{E_1}$ a magnetické toky permanentních magnetů uložených ve statoru fázorem $\boldsymbol{\Psi_d}$. Pracovní status motoru lze zobrazit pomocí fázorového diagramu z obrázku 3.7 včetně schéma,

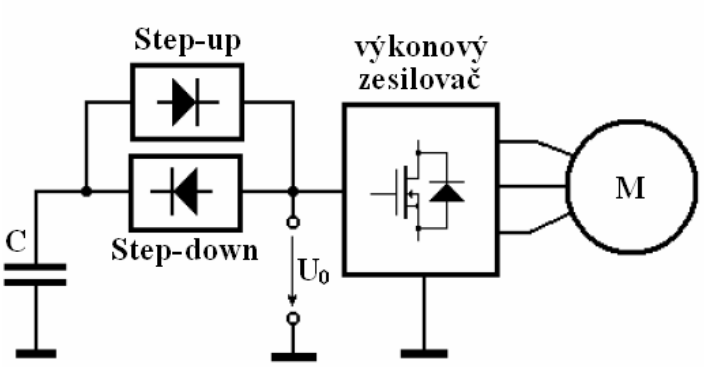


Obrázek 3.7: Vektorové řízení synchronního motoru

kde rychlost otáčení motoru je ω. L_1 a R_1 představují indukčnost a stejnosměrný odpor vinutí. Hlavním úkolem vektorového řízení je generace fázoru $\boldsymbol{U_1}$ tak, aby se zachovala kolmost fázorů $\boldsymbol{I}$ a $\boldsymbol{\Psi_d}$. Při splnění této podmínky a při dané velikosti fázoru $\boldsymbol{I}$ je docíleno maximální vyvozené síly. Fázor $\boldsymbol{\Psi_d}$ je konstantní díky časové invarianci intenzity magnetického toku permanentních magnetů a volbě souřadnic. Velikost síly je přímo úměrná fázoru $\boldsymbol{I}$ a úhel natočení fázoru $\boldsymbol{I}$ je závislý na poloze primárná části, sekundárná části a na okamžité hodnotě proudů v individuálních vinutích. Generování napětí $\boldsymbol{U_1}$ je přeměněno na posloupnost spínání tranzistorů ve spínaném mostu. Další podrobnosti o řízení lineárních motorů v [7].

3.3 Akumulace energie:

Pokud motor pracuje v režimu akčního členu, je nutné mu dodávat energii. Ta je přiváděna na svorky U_0. Motor v režimu brzdění (rekuperace energii) umí zpětně akumulovat energii ze svorek U_0. K dosažení správné funkčnosti výkonového zesilovače nesmí úroveň napětí U_0 přesáhnout povolený interval. Omezením napětí U_0 je zároveň omezena i maximální síla lineárního motoru a je proto výhodné udržovat hodnotu napětí U_0 v horní hranici intervalu. Existuje mnoho způsobů akumulace elektrické energie, ale některé z nich neumožňují udržení napětí U_0 na maximální hodnotě napěťového intervalu.

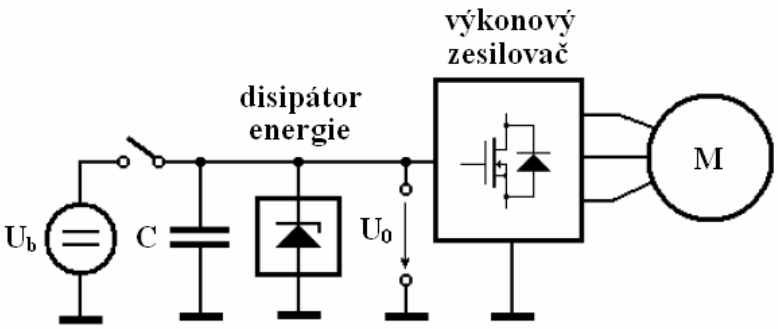


Obrázek 3.8: Akumulace energie s DC/DC měniči, převzato z [5]

Jedna z možností akumulace energie je ukázána na obrázku 3.8. Zde je napětí U_0 udržováno konstantní na úrovni rovnající se U_{max}. Elektrická energie je přiváděna skrz svorky U_0 z napájecí sítě automobilu, kterou zde představuje kondenzátor C a DC/DC step-up měnič. Napětí kondenzátoru C je udržováno v intervalu 0 až U_{max} [V]. Uvažujme s průměrnou účinností každého jednotlivého měniče $\eta=0,85$. Rekuperovaná energie může být znovu využita s účinností $\eta^2=0,72$. Nevýhodou je 28 procentní ztráta rekuperované energie během jednoho cyklu akumulace energie, proto tento přístup není vhodný pro častou akumulaci elektrické energie. Napěťová síť automobilu reprezentovaná kondenzátorem C s napěťovým rozsahem 0 až U_{max} umožňuje akumulovat energii o velikosti:

$$E_{C1} = \frac{1}{2} C U_{\max}^2 . \tag{3.2}$$

Další možnost, jak akumulovat elektrickou energii je zobrazena na obrázku 3.9, který využívá disipátor energie. Disipátor energie zastává funkci přepěťové ochrany v podobě Zenerovy diody.



Obrázek 3.9: Akumulace energie s disipátorem, převzato z [5]

V tomto případě se předpokládá, že napětí U_0 nemusí nevyhnutelně být časově neměnné a udržované na úrovni U_{max}, ale pohybuje se v rozmezích U_{min} až U_{max}. Nyní je kondenzátor C připojen přímo na svorky U_0. Pomocný napájecí zdroj U_b dimenzován na špičkový výkon není aktivní pro $U_0 > U_{min}$. Naopak disipátor energie rozptyluje elektrickou energii na teplo v případě, kdy napětí $U_0 > U_{max}$ kondenzátoru C. Hlavní výhody tohoto způsobu akumulace energie jsou: jednoduchost řešení, energie ze svorek U_0 je akumulována s účinností 100 procent při zanedbání odporu kondenzátoru C a nejsou zde problémy s účinností, rušením a chlazením step-up a step-down měničů. Hlavní nevýhodou tohoto zapojení je velikost akumulace elektrické energie odpovídající rozdílům energií kondenzátoru pro dvě napěťové úrovně U_{max} a U_{min} dané vztahem:

$$E_{C2} = \frac{1}{2} C \left(U_{\max}^2 - U_{\min}^2 \right). \tag{3.3}$$

Pro uložení stejného množství energie jako v prvně uvedeném případě akumulace energie je nezbytné použít kondenzátor s E_{C1}/E_{C2} násobně vyšší kapacitou. Více k akumulaci energie v [5].

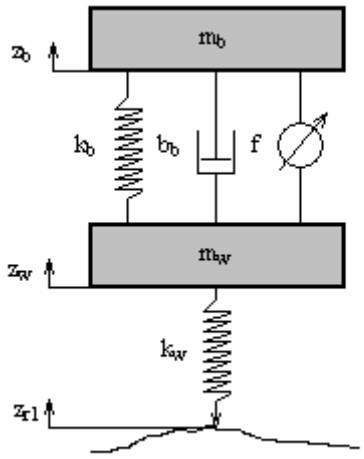
Kapitola 4

Modely automobilů

Pro účely simulací aktivního tlumení pérování automobilu lze použít čtvrtinový model, poloviční model nebo úplný model, na kterých simuluji chování tlumení pérování automobilu. Čtvrtinový model obsahuje pouze čtvrtinu odpružené hmotnosti automobilu (karosérie) a jedno kolo. Tento model může simulovat pouze vertikální pohyb karosérie. Poloviční model popisuje levou nebo pravou popřípadě přední nebo zadní polovinu automobilu a obsahuje tedy dva pevně spojené čtvrtinové modely. Polovičním model může navíc simulovat předklánění automobilu při rozjedu a brzdění. Úplný model je pevným spojením dvou polovičních modelů a umožňuje nejlépe simulovat chování automobilu, tedy vertikální pohyb karoserie, předklánění i naklánění při jízdě do zatáčky.

4.1 Čtvrtinový model

Čtvrtinový model je nejmenší model aktivního tlumení, na kterém lze ukázat chování automobilu a simulovat rozdílné vlastnosti regulátorů. Model se skládá ze čtvrtiny hmotnosti automobilu, pružiny, tlumiče, lineárního motoru a kola. Čtvrtinový model automobilu popisují dvě diferenciální pohybové rovnice, jejichž význam je patrný z obrázku 4.1. Tento model je omezený, může simulovat pouze vertikální pohyb automobilu.



Obrázek 4.1: Čtvrtinový model automobilu

Diferenciální pohybové rovnice pro čtvrtinový model automobilu:

$$\begin{aligned} m_b\ddot{z}_b &= f - k_b(z_b - z_w) - b_b(\dot{z}_b - \dot{z}_w) \\ m_w\ddot{z}_w &= -f + k_b(z_b - z_w) - k_w(z_w - z_r) + b_b(\dot{z}_b - \dot{z}_w) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Význam konstant a symbolů:

z_b - poloha odpružené části automobilu [m]

z_w - poloha neodpružené části automobilu [m]

z_r - poloha nerovnosti vozovky [m]

m_w - hmotnost neodpružené části automobilu = 35 [kg]

m_b - hmotnost odpružené části automobilu = 380 [kg]

k_b - konstanta tuhosti pružiny = 22 700 [N/m]

k_w - konstanta tuhosti pneumatiky = 115 000 [N/m]

b_b - konstanta tlumení tlumiče = 980 [Ns/m]

f - síla vyvolaná lineárním motorem [N]

Stavové a vstupní proměnné:

$$\begin{aligned} x_1 &= z_b - z_w \\ x_2 &= z_w - z_r \qquad & u_1 &= \dot{z}_r \\ x_3 &= \dot{z}_b & u_2 &= f \\ x_4 &= \dot{z}_w \end{aligned} \tag{4.2}$$

Stavový popis pro proměnné z (4.2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 - x_4 \\ \dot{x}_2 &= x_4 - u_1 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{k_b}{m_b}x_1 - \frac{b_b}{m_b}x_3 + \frac{b_b}{m_b}x_4 - \frac{1}{m_b}u_2 \\ \dot{x}_4 &= \frac{k_b}{m_w}x_1 - \frac{k_w}{m_w}x_2 + \frac{b_b}{m_w}x_3 - \frac{b_b}{m_w}x_4 - \frac{1}{m_w}u_2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

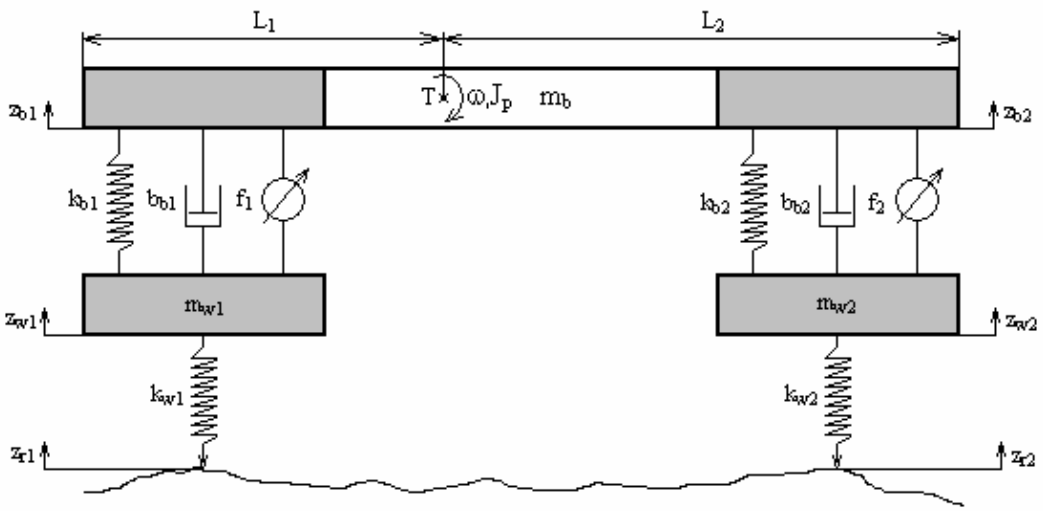
Stavový popis (4.3) lze zapsat v maticovém tvaru (4.4) s rozepsanými vstupy:

$$\dot{x} = Ax + B_1 u_1 + B_2 u_2 \tag{4.4}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k_b}{m_b} & 0 & -\dfrac{b_b}{m_b} & \dfrac{b_b}{m_b} \\ \dfrac{k_b}{m_w} & -\dfrac{k_w}{m_w} & \dfrac{b_b}{m_w} & -\dfrac{b_b}{m_w} \end{bmatrix}, \; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{1}{m_b} \\ -\dfrac{1}{m_w} \end{bmatrix}$$

4.2 Poloviční model

Poloviční model se skládá ze dvou čtvrtinových modelů, které jsou pevně spojeny za sebou. Hmotnost m_b se díky tomu zdvojnásobila. Každý ze čtvrtinových modelů simuluje jinou část automobilu – první čtvrtinový model simuluje přední část automobilu a druhý čtvrtinový model zadní část automobilu. Nově u polovičního modelu přibyla rovnice předklánění a rovnice pohybu těžiště oproti čtvrtinovému modelu. Z těchto rovnic je patrné, že záleží na poloze těžiště T a jeho rychlost v_T. Model nově umožňuje pozorovat předklon automobilu ω společně s oboustrannou vazbou zadní a přední nápravy automobilu viz obrázek 4.2.



Obrázek 4.2: Poloviční model automobilu

Diferenciální rovnice popisující poloviční model:

$$\begin{aligned}
m_b\ddot{z}_{b1} &= f_1 + k_{b1}\left(z_{b1} - z_{w1}\right) - b_{b1}\left(\dot{z}_{b1} - \dot{z}_{w1}\right) \\
m_b\ddot{z}_{b2} &= f_2 + k_{b2}\left(z_{b2} - z_{w2}\right) - b_{b2}\left(\dot{z}_{b2} - \dot{z}_{w2}\right) \\
m_{w1}\ddot{z}_{w1} &= -f_1 + k_{b1}\left(z_{b1} - z_{w1}\right) - k_{w1}\left(z_{w1} - z_{r1}\right) + b_{b1}\left(\dot{z}_{b1} - \dot{z}_{w1}\right) \\
m_{w2}\ddot{z}_{w2} &= -f_2 + k_{b2}\left(z_{b2} - z_{w2}\right) - k_{w2}\left(z_{w2} - z_{r2}\right) + b_{b2}\left(\dot{z}_{b2} - \dot{z}_{w2}\right)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Rovnice předklánění:

$$m_b\ddot{z}_{b1}L_1 - m_b\ddot{z}_{b1}L_2 - J_p\dot{\omega} = 0 \tag{4.6}$$

Rovnice pohybu těžiště:

$$m_b\ddot{z}_{b1} + m_b\ddot{z}_{b2} - m_b\dot{v}_T = 0 \tag{4.7}$$

dále:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{b1} &= v_T + \omega L_1 \\
\dot{z}_{b2} &= v_T - \omega L_2
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Význam konstant a symbolů:

L_1 - vzdálenost těžiště T od předního kola v klidovém stavu = 1,5 [m]

L_2 - vzdálenost těžiště T od zadního kola v klidovém stavu = 2 [m]

ω - úhlová rychlost předklánění odpružené části automobilu [ms^{-1}]

v_T - rychlost pohybu těžiště T ve vodorovném směru [ms^{-1}]

m_b - hmotnost odpružené části automobilu = 760 [kg]

J_p - podélný moment setrvačnosti = 2700 [kgm^2]

$\dot{z}_{b1}$ - rychlost odpružené části nad prvním kolem [ms^{-1}]

$\dot{z}_{b2}$ - rychlost odpružené části nad druhým kolem [ms^{-1}]

Stavové a vstupní proměnné:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= z_{b1} - z_{w1} \\
x_2 &= z_{w1} - z_{r1} \\
x_3 &= \dot{z}_{w1} & u_{11} &= \dot{z}_{r1} \\
x_4 &= z_{b2} - z_{w2} & u_{12} &= \dot{z}_{r2} \\
x_5 &= z_{w2} - z_{r2} & u_{21} &= f_1 \\
x_6 &= \dot{z}_{w2} & u_{22} &= f_2 \\
x_7 &= v_T \\
x_8 &= \omega
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Stavový popis pro proměnné z (4.9):

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{z}_{b1} - \dot{z}_{w1} = v_T + L_1\omega - \dot{z}_{w1} = x_7 + L_1 x_8 - x_3 \\
\dot{x}_2 &= \dot{z}_{w1} - \dot{z}_{r1} = x_3 - u_{11} \\
\dot{x}_3 &= \frac{k_b}{m_{w1}} x_1 - \frac{k_w}{m_{w1}} x_2 + \frac{b_b}{m_{w1}}\left(x_7 + L_1 x_8 - x_3\right) - \frac{1}{m_{w1}} u_{11} \\
\dot{x}_4 &= \dot{z}_{b2} - \dot{z}_{w2} = v_T - L_2\omega - \dot{z}_{w2} = x_7 - L_2 x_8 - x_6 \\
\dot{x}_5 &= \dot{z}_{w2} - \dot{z}_{r2} = x_6 - u_{12} \\
\dot{x}_6 &= \frac{k_b}{m_{w2}} x_4 - \frac{k_w}{m_{w2}} x_5 + \frac{b_b}{m_{w2}}\left(x_7 - L_2 x_8 - x_6\right) - \frac{1}{m_{w1}} u_{12} \\
\dot{x}_7 &= -\frac{k_b}{m_b} x_1 + \frac{b_b}{m_b} x_3 - \frac{k_b}{m_b} x_4 + \frac{b_b}{m_b} x_6 - \frac{2b_b}{m_b} x_7 + \frac{b_b\left(L_2 - L_1\right)}{m_b} x_8 + \\
&+ \frac{1}{m_b} u_{11} + \frac{1}{m_b} u_{22} \\
\dot{x}_8 &= -\frac{k_b L_1}{J_p} x_1 + \frac{b_b L_1}{J_p} x_3 + \frac{k_b L_2}{J_p} x_4 - \frac{b_b L_2}{J_p} x_6 - \frac{b_b\left(L_2 - L_1\right)}{J_p} x_7 + \\
&- \frac{b_b\left(L_2^{\,2} + L_1^{\,2}\right)}{J_p} x_8 + \frac{L_1}{J_p} u_{11} - \frac{L_2}{J_p} u_{22}
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Stavový popis (4.10) lze zapsat v maticovém tvaru (4.11) s rozepsanými vstupy:

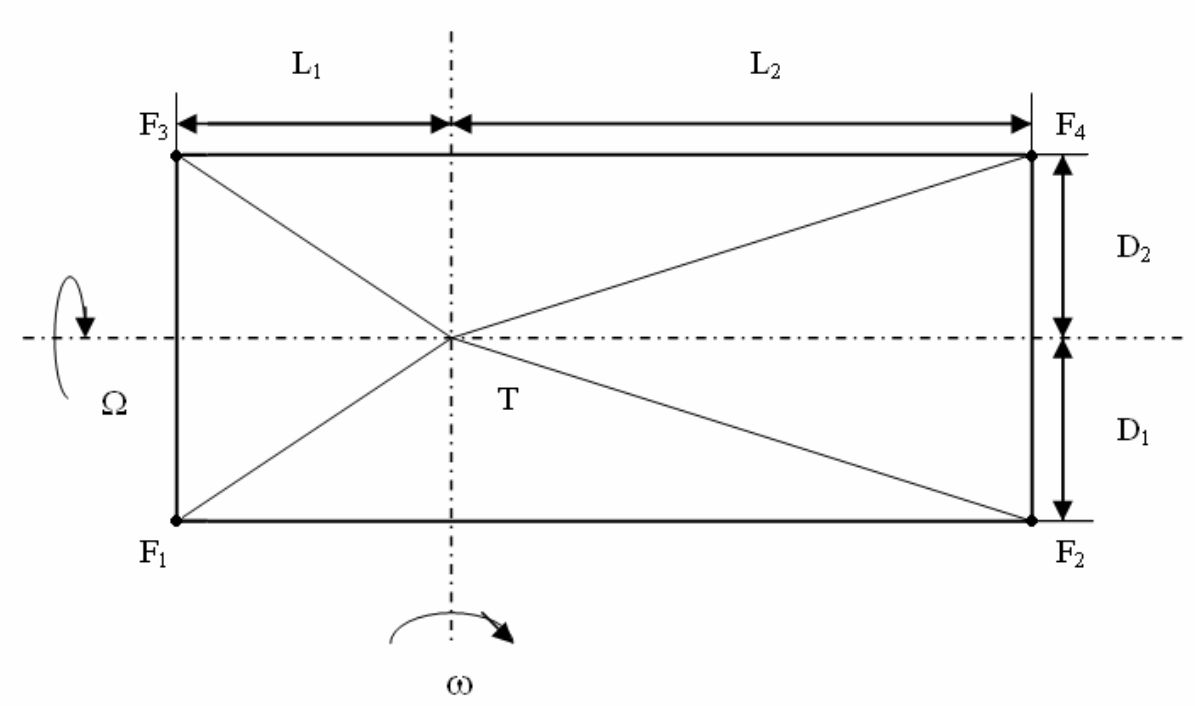
$$\dot{x} = Ax + B_1 u_1 + B_2 u_2 \tag{4.11}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_b}{m_{w1}} & -\frac{k_w}{m_{w1}} & -\frac{b_b}{m_{w1}} & 0 & 0 & 0 & \frac{b_b}{m_{w1}} & \frac{b_b L_1}{m_{w1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_b}{m_{w2}} & -\frac{k_w}{m_{w2}} & -\frac{b_b}{m_{w2}} & \frac{b_b}{m_{w2}} & -\frac{b_b L_2}{m_{w2}} \\ -\frac{k_b}{m_b} & 0 & \frac{b_b}{m_b} & -\frac{k_b}{m_b} & 0 & \frac{b_b}{m_b} & -\frac{2b_b}{m_b} & \frac{b_b(L_2 - L_1)}{m_b} \\ -\frac{k_b L_1}{J_p} & 0 & \frac{b_b L_1}{J_p} & \frac{k_b L_2}{J_p} & 0 & -\frac{b_b L_2}{J_p} & -\frac{b_b(L_2 - L_1)}{J_p} & -\frac{b_b\left(L_2^{\,2} + L_1^{\,2}\right)}{J_p} \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{m_{w1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_{w2}} \\ \frac{1}{m_b} & \frac{1}{m_b} \\ \frac{L_1}{J_p} & -\frac{L_2}{J_p} \end{bmatrix}$$

4.3 Úplný model

Úplný model se skládá ze dvou polovičních modelů spojených pevně k sobě, tedy i hmotnost se zdvojnásobila na celkovou hmotnost automobilu m_c. Jedna polovina celého modelu představuje pravou a druhá levou část automobilu. Nově u úplného modelu přibyla rovnice naklánění automobilu. Tímto spojením navíc dostáváme možnost sledování náklonu automobilu Ω a vzájemnou provázanost přední a zadní nápravy, nebo levé a pravé části automobilu, ale také všech kol navzájem viz obrázek 4.3.



Obrázek 4.3: Úplný model automobilu (půdorys)

Diferenciální rovnice úplného modelu:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= m_c \ddot{z}_{b1} = f_1 + k_{b1}\left(z_{b1} - z_{w1}\right) - b_{b1}\left(\dot{z}_{b1} - \dot{z}_{w1}\right) \\
F_2 &= m_c \ddot{z}_{b2} = f_2 + k_{b2}\left(z_{b2} - z_{w2}\right) - b_{b2}\left(\dot{z}_{b2} - \dot{z}_{w2}\right) \\
F_3 &= m_c \ddot{z}_{b3} = f_3 + k_{b3}\left(z_{b3} - z_{w3}\right) - b_{b3}\left(\dot{z}_{b3} - \dot{z}_{w3}\right) \\
F_4 &= m_c \ddot{z}_{b4} = f_4 + k_{b4}\left(z_{b4} - z_{w4}\right) - b_{b4}\left(\dot{z}_{b4} - \dot{z}_{w4}\right) \\
m_{w1}\ddot{z}_{w1} &= -f_1 + k_{b1}\left(z_{b1} - z_{w1}\right) - k_{w1}\left(z_{w1} - z_{r1}\right) + b_{b1}\left(\dot{z}_{b1} - \dot{z}_{w1}\right) \\
m_{w2}\ddot{z}_{w2} &= -f_2 + k_{b2}\left(z_{b2} - z_{w2}\right) - k_{w2}\left(z_{w2} - z_{r2}\right) + b_{b2}\left(\dot{z}_{b2} - \dot{z}_{w2}\right) \\
m_{w3}\ddot{z}_{w3} &= -f_3 + k_{b3}\left(z_{b3} - z_{w3}\right) - k_{w3}\left(z_{w3} - z_{r3}\right) + b_{b3}\left(\dot{z}_{b3} - \dot{z}_{w3}\right) \\
m_{w4}\ddot{z}_{w4} &= -f_4 + k_{b4}\left(z_{b4} - z_{w4}\right) - k_{w4}\left(z_{w4} - z_{r4}\right) + b_{b4}\left(\dot{z}_{b4} - \dot{z}_{w4}\right)
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Rovnice předklánění:

$$F_1 L_1 - F_2 L_2 + F_3 L_1 - F_4 L_2 - J_p \dot{\omega} = 0 \tag{4.13}$$

Rovnice naklánění:

$$F_1 D_1 + F_2 D_2 - F_3 D_1 - F_4 D_2 - J_{pr} \dot{\Omega} = 0 \tag{4.14}$$

Rovnice pohybu těžiště:

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - m_c \dot{v}_T = 0 \tag{4.15}$$

dále:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{b1} &= v_T + \omega L_1 + \Omega D_1 \\ \dot{z}_{b2} &= v_T - \omega L_2 + \Omega D_1 \\ \dot{z}_{b3} &= v_T + \omega L_1 - \Omega D_2 \\ \dot{z}_{b4} &= v_T - \omega L_2 - \Omega D_2 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Význam konstant a symbolů:

m_c - hmotnost odpružené části automobilu = 1540 [kg]

D_1 - vzdálenost podélné osy těžiště k prvnímu resp. druhému kolu = 1 [m]

D_2 - vzdálenost podélné osy těžiště k třetímu resp. čtvrtému kolu = 1 [m]

J_{pr} - příčný moment setrvačnosti = 578 [kgm^2]

Ω - úhlová rychlost naklánění odpružené části automobilu [rads^{-1}]

$\dot{z}_{b1}$ - rychlost odpružené části nad prvním kolem [ms^{-1}]

$\dot{z}_{b2}$ - rychlost odpružené části nad druhým kolem [ms^{-1}]

$\dot{z}_{b3}$ - rychlost odpružené části nad třetím kolem [ms^{-1}]

$\dot{z}_{b4}$ - rychlost odpružené části nad čtvrtým kolem [ms^{-1}]

Stavové a vstupní proměnné:

$$\begin{array}{llllll} x_1 = z_{b1} - z_{w1} & x_7 = z_{b3} - z_{w3} & & & \\ x_2 = z_{w1} - z_{r1} & x_8 = z_{w3} - z_{r3} & & u_{11} = \dot{z}_{r1} & u_{21} = f_1 \\ x_3 = \dot{z}_{w1} & x_9 = \dot{z}_{w3} & x_{13} = v_T & u_{12} = \dot{z}_{r2} & u_{22} = f_2 \\ x_4 = z_{b2} - z_{w2} & x_{10} = z_{b4} - z_{w4} & x_{14} = \omega & u_{13} = \dot{z}_{r3} & u_{23} = f_3 \\ x_5 = z_{w2} - z_{r2} & x_{11} = z_{w4} - z_{r4} & x_{15} = \Omega & u_{14} = \dot{z}_{r4} & u_{24} = f_4 \\ x_6 = \dot{z}_{w2} & x_{12} = \dot{z}_{w4} & & & \end{array} \tag{4.17}$$

Stavový popis pro proměnné z (4.17):

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{z}_{b1} - \dot{z}_{w1} = v_T + L_1\omega + D_1\Omega - \dot{z}_{w1} = x_{13} + L_1 x_{14} + D_1 x_{15} - x_3 \\
\dot{x}_2 &= \dot{z}_{w1} - \dot{z}_{r1} = x_3 - u_{11} \\
\dot{x}_3 &= \frac{k_b}{m_{w1}} x_1 - \frac{k_w}{m_{w1}} x_2 + \frac{b_b}{m_{w1}} \left(x_{13} + L_1 x_{14} + D_1 x_{15} - x_3 \right) - \frac{1}{m_{w1}} u_{21} \\
\dot{x}_4 &= \dot{z}_{b2} - \dot{z}_{w2} = v_T - L_2\omega + D_1\Omega - \dot{z}_{w2} = x_{13} - L_2 x_{14} + D_1 x_{15} - x_6 \\
\dot{x}_5 &= \dot{z}_{w2} - \dot{z}_{r2} = x_6 - u_{12} \\
\dot{x}_6 &= \frac{k_b}{m_{w2}} x_4 - \frac{k_w}{m_{w2}} x_5 + \frac{b_b}{m_{w2}} \left(x_{13} - L_2 x_{14} + D_1 x_{15} - x_6 \right) - \frac{1}{m_{w2}} u_{22} \\
\dot{x}_7 &= \dot{z}_{b3} - \dot{z}_{w3} = v_T + L_1\omega - D_2\Omega - \dot{z}_{w3} = x_{13} + L_1 x_{14} - D_2 x_{15} - x_9 \\
\dot{x}_8 &= \dot{z}_{w3} - \dot{z}_{r3} = x_9 - u_{13} \\
\dot{x}_9 &= \frac{k_b}{m_{w3}} x_7 - \frac{k_w}{m_{w3}} x_8 + \frac{b_b}{m_{w3}} \left(x_{13} + L_1 x_{14} - D_2 x_{15} - x_9 \right) - \frac{1}{m_{w3}} u_{23} \\
\dot{x}_{10} &= \dot{z}_{b4} - \dot{z}_{w4} = v_T - L_2\omega - D_2\Omega - \dot{z}_{w4} = x_{13} + L_2 x_{14} - D_2 x_{15} - x_{12} \\
\dot{x}_{11} &= \dot{z}_{w4} - \dot{z}_{r4} = x_{12} - u_{14} \\
\dot{x}_{12} &= \frac{k_b}{m_{w4}} x_{10} - \frac{k_w}{m_{w4}} x_{11} + \frac{b_b}{m_{w4}} \left(x_{13} + L_1 x_{14} - D_2 x_{15} - x_{12} \right) - \frac{1}{m_{w4}} u_{24} \\
\dot{x}_{13} &= -\frac{k_b}{m_c} x_1 + \frac{b_b}{m_c} x_3 - \frac{k_b}{m_c} x_4 + \frac{b_b}{m_c} x_6 - \frac{k_b}{m_c} x_7 + \frac{b_b}{m_c} x_9 - \frac{k_b}{m_c} x_{10} + \\
&+ \frac{b_b}{m_c} x_{12} - \frac{4b_b}{m_c} x_{13} + \frac{2b_b \left(L_2 - L_1 \right)}{m_c} x_{14} + \frac{2b_b \left(D_2 - D_1 \right)}{m_c} x_{15} + \\
&+ \frac{1}{m_c} \left(u_{21} + u_{22} + u_{23} + u_{24} \right) \\
\dot{x}_{14} &= -\frac{k_b L_1}{J_p} x_1 + \frac{b_b L_1}{J_p} x_3 + \frac{k_b L_2}{J_p} x_4 - \frac{b_b L_2}{J_p} x_6 - \frac{k_b L_1}{J_p} x_7 + \frac{b_b L_1}{J_p} x_9 + \frac{k_b L_2}{J_p} x_{10} + \\
&- \frac{b_b L_2}{J_p} x_{12} + \frac{b_b \left(2L_2 - 2L_1 \right)}{J_p} x_{13} - \frac{2b_b \left(L_1^{\,2} - L_2^{\,2} \right)}{J_p} x_{14} + \\
&- \frac{b_b \left(L_1 D_1 - L_2 D_1 - L_1 D_2 + L_2 D_2 \right)}{J_p} x_{15} + \frac{L_1}{J_p} \left(u_{21} + u_{23} \right) - \frac{L_2}{J_p} \left(u_{22} + u_{24} \right) \\
\dot{x}_{15} &= -\frac{k_b D_1}{J_{pr}} x_1 + \frac{b_b D_1}{J_{pr}} x_3 - \frac{k_b D_2}{J_{pr}} x_4 + \frac{b_b D_2}{J_{pr}} x_6 + \frac{k_b D_1}{J_{pr}} x_7 - \frac{b_b D_1}{J_{pr}} x_9 + \frac{k_b D_2}{J_{pr}} x_{10} + \\
&- \frac{b_b D_2}{J_{pr}} x_{12} + \frac{2b_b \left(D_2 - D_1 \right)}{J_{pr}} x_{13} + - \frac{b_b \left(D_1 L_1 - D_1 L_2 - D_2 L_1 + D_2 L_2 \right)}{J_{pr}} x_{14} + \\
&- \frac{2b_b \left(D_1^{\,2} + D_2^{\,2} \right)}{J_{pr}} x_{15} + \frac{D_1}{J_{pr}} \left(u_{21} + u_{22} \right) - \frac{D_2}{J_{pr}} \left(u_{23} + u_{24} \right)
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Stavový popis (4.18) lze zapsat v maticovém tvaru (4.19) s rozepsanými vstupy :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{1-6} \\ \bar{x}_{7-12} \\ \bar{x}_{13-15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{13} \end{bmatrix} \bar{u}_1 + \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \\ B_{23} \end{bmatrix} \bar{u}_2 \tag{4.19}$$

Submatice v matici A:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_{b1}}{m_{w1}} & \frac{-k_{w1}}{m_{w1}} & \frac{-b_{b1}}{m_{w1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_{b2}}{m_{w2}} & \frac{-k_{w2}}{m_{w2}} & \frac{-b_{b2}}{m_{w2}} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 1 & L_1 & D_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{b_{b1}}{m_{w1}} & \frac{b_{b1}L_1}{m_{w1}} & \frac{b_{b1}D_1}{m_{w1}} \\ 1 & -L_2 & D_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{b_{b2}}{m_{w2}} & \frac{-b_{b2}L_2}{m_{w2}} & \frac{b_{b2}D_1}{m_{w2}} \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_{b3}}{m_{w3}} & \frac{-k_{w3}}{m_{w3}} & \frac{-b_{b3}}{m_{w3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_{b4}}{m_{w4}} & \frac{-k_{w4}}{m_{w4}} & \frac{-b_{b4}}{m_{w4}} \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 1 & L_1 & -D_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{b_{b3}}{m_{w3}} & \frac{b_{b3}L_1}{m_{w3}} & \frac{-b_{b3}D_2}{m_{w1}} \\ 1 & -L_2 & -D_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{b_{b4}}{m_{w4}} & \frac{-b_{b4}L_2}{m_{w4}} & \frac{-b_{b4}D_2}{m_{w4}} \end{bmatrix},$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} \frac{-k_{b1}}{m_c} & 0 & \frac{b_{b1}}{m_c} & \frac{-k_{b2}}{m_c} & 0 & \frac{b_{b1}}{m_c} \\ \frac{-k_{b1}L_1}{J_p} & 0 & \frac{b_{b1}L_1}{J_p} & \frac{k_{b2}L_2}{J_p} & 0 & \frac{-b_{b2}L_2}{J_p} \\ \frac{-k_{b1}D_1}{J_{pr}} & 0 & \frac{b_{b1}D_1}{J_{pr}} & \frac{-k_{b2}D_1}{J_{pr}} & 0 & \frac{b_{b2}D_1}{J_{pr}} \end{bmatrix},$$

$$A_{32} = \begin{bmatrix} \frac{-k_{b3}}{m_c} & 0 & \frac{b_{b3}}{m_c} & \frac{-k_{b4}}{m_c} & 0 & \frac{b_{b4}}{m_c} \\ \frac{-k_{b3}L_1}{J_p} & 0 & \frac{b_{b3}L_1}{J_p} & \frac{k_{b4}L_2}{J_p} & 0 & \frac{-b_{b4}L_2}{J_p} \\ \frac{k_{b3}D_2}{J_{pr}} & 0 & \frac{-b_{b3}D_2}{J_{pr}} & \frac{k_{b4}D_2}{J_{pr}} & 0 & \frac{-b_{b2}D_2}{J_{pr}} \end{bmatrix},$$

$$A_{33} = \begin{bmatrix} \frac{-b_{b1}-b_{b2}-b_{b3}-b_{b4}}{m_c} & \frac{-b_{b1}L_1+b_{b2}L_2-b_{b3}L_1+b_{b4}L_2}{m_c} & \frac{-b_{b1}D_1-b_{b2}D_2-b_{b3}L_1+b_{b4}L_2}{m_c} \\ \frac{-b_{b1}L_1+b_{b2}L_2-b_{b3}L_1+b_{b4}L_2}{J_p} & \frac{-b_{b1}L_1^2-b_{b2}L_2^2-b_{b3}L_1^2-b_{b4}L_2^2}{J_p} & \frac{-b_{b1}L_1D_1+b_{b2}L_2D_1+b_{b3}L_1D_2-b_{b4}L_2D_2}{J_p} \\ \frac{-b_{b1}D_1-b_{b2}D_2+b_{b3}D_1+b_{b4}D_2}{J_{pr}} & \frac{-b_{b1}L_1D_1+b_{b2}L_2D_1+b_{b3}L_1D_2-b_{b4}L_2D_2}{J_{pr}} & \frac{-b_{b1}D_1^2-b_{b2}D_1^2-b_{b3}D_2^2-b_{b4}D_2^2}{J_{pr}} \end{bmatrix},$$

Submatice matice B_1:

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Submatice matice B_2:

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{m_{w1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{m_{w2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{m_{w3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{m_{w4}} \end{bmatrix}, B_{23} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_c} & \frac{1}{m_c} & \frac{1}{m_c} & \frac{1}{m_c} \\ \frac{L_1}{J_p} & \frac{-L_2}{J_p} & \frac{L_1}{J_p} & \frac{-L_2}{J_p} \\ \frac{D_1}{J_{pr}} & \frac{D_1}{J_{pr}} & \frac{-D_2}{J_{pr}} & \frac{-D_2}{J_{pr}} \end{bmatrix}$$

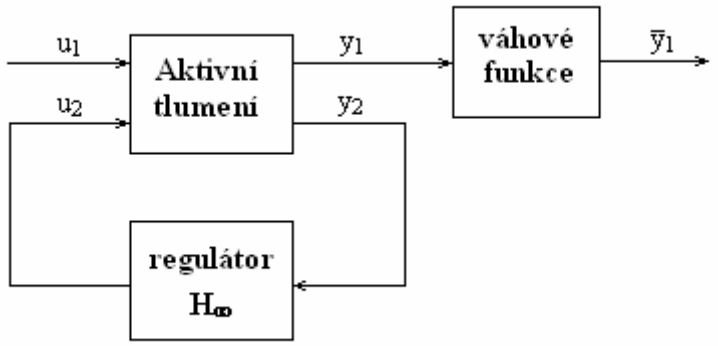
Kapitola 5

Regulátory a váhové funkce

H_∞ regulátor se analyticky vypočítá pomocí minimalizace normy $\left\|T_{y1u1}\right\|_\infty$ přenosu ze vstupu u_1 na výstup y_1. Vlastnosti uzavřené smyčky jsou upravovány pomocí váhových funkcí. Regulace eliminující vstupní poruchové veličiny nelze tedy využít funkce *augss()* popřípadě *augtf()* z Robust Control Toolboxu pro rozšíření soustavy. Pro návrh regulátorů je použito funkce *hinflmi()*, která je součástí LMI Control Toolboxu a vypočítává sub-optimální H_∞ regulátor pomocí lineárních maticových nerovností při zmenšování γ. Bližší popis funkce je uveden v kapitole 2.

5.1 Čtvrtinový model

Rozšíření systému jsem provedl pomocí postupného sestavování jednotlivých matic rozšířeného systému, řešení pomocí výše napsaných příkazů Matlabu nelze použít, jelikož zde nejde o regulaci na požadovanou hodnotu. Vstupem do soustavy je rychlost poruchy nerovnosti u_1 a akční zásah lineárního motoru u_2. Výstup soustavy je tvořen výstupem y_1 složen z veličin k vážení, které poté prochází váhovými funkcemi a vzniká výstup $\bar{y}_1$ a nakonec výstup y_2, kterou tvoří zpětná vazba.



Obrázek 5.1: Schéma rozšířeného systému čtvrtinového modelu

Na počátku návrhu regulátoru jsem zvolil veličiny, které budou následně použity pro vážení. Některé veličiny vážím pomocí konstant a další pomocí funkcí představující frekvenční filtry.

Výstup y_1 obsahuje veličiny:

- $x_2 = z_w - z_r$, představující rozdíl polohy kola a nerovnosti vozovky, vážením konstantou k_1 zlepšuji průběh ustálené odchylky.
- $\dot{x}_3 = \ddot{z}_b$, představuje zrychlení odpružené části automobilu ve vertikálním směru, vážím pomocí funkce W_1, čímž dochází ke zlepšení pohodlí řidiče pomocí odfiltrování nežádoucích frekvencí.
- $u_2 = f$, představuje akční zásah, vážím pomocí funkce W_2, omezuji vyšší frekvence akčního zásahu lineárního motoru.
- $\dot{x}_4 = \ddot{z}_w$, představuje zrychlení neodpružené části automobilu a vážením konstantou k_4 zlepšuji schopnost kola udržet se na vozovce.

Stavový popis (4.4) doplním výstupními rovnicemi v maticovém tvaru:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 x + D_{11} u_1 + D_{12} u_2 \\ y_2 &= C_2 x + D_{21} u_1 + D_{22} u_2 \end{aligned} . \tag{5.1}$$

Za matice z (5.1) dosadím podle výstupních veličin y_1 a zpětné vazby y_2, pro kterou jsem zvolil rozdíl mezi odpruženou a neodpruženou částí automobilu $x_1 = z_b - z_w$:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_b}{m_b} & 0 & -\dfrac{b_b}{m_b} & \dfrac{b_b}{m_b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{k_b}{m_w} & -\dfrac{k_w}{m_w} & \dfrac{b_b}{m_w} & -\dfrac{b_b}{m_w} \end{bmatrix}, \\
C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
D_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\
D_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{m_b} & -1 & \dfrac{1}{m_w} \end{bmatrix}^T, \\
D_{21} &= 0, \\
D_{22} &= 0.
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Vážení jednotlivých výstupních veličin je rozděleno na dvě kategorie: veličiny vážené konstantou a veličiny vážené váhovou funkcí. Veličiny, které jsou vážené pouze konstantami (k_1 až k_4) nezavádí do soustavy žádnou dynamiku, na druhou stranu váhové funkce dynamiku W_1 a W_2 zavádí. Váhové funkce představující frekvenční filtry převedu na maticový tvar přidávané dynamiky W. Každý filtr je reprezentován čtveřicí matic ve stavovém popisu, které jsem získal převodem z přenosové funkce pomocí příkazů (5.3).

$$
\begin{aligned}
&[W_{1A}, W_{1B}, W_{1C}, W_{1D}] = \mathrm{tf2ss}(\mathrm{W_1num}, \mathrm{W_1den}); \\
&[W_{2A}, W_{2B}, W_{2C}, W_{2D}] = \mathrm{tf2ss}(\mathrm{W_2num}, \mathrm{W_2den});
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Nejdříve jsem sloučil dynamiku váhových funkcí ve stavovém popisu a poté ji slučuji s dynamikou stavového popisu lineárního motoru. Vznikne dynamický MIMO systém (obrázek 5.1) se čtyřmi vstupy y_1, čtyřmi výstupy $\bar{y}_1$ a dynamikou $\dot{x}_w$, maticově:

$$
\begin{aligned}
W_A &= \begin{bmatrix} W_{1A} & Z \\ Z & W_{2A} \end{bmatrix}, \\
W_B &= \begin{bmatrix} \overline{0} & W_{1B} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & W_{2B} & \overline{0} \end{bmatrix}, \\
W_C &= \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ W_{1C} & \overline{0} \\ \overline{0} & W_{2C} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}, \\
W_D &= diag\begin{bmatrix} k_1 & k_2 W_{1D} & k_3 W_{2D} & k_4 \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

kde Z představuje nulovou matici a $\overline{0}$ nulový vektor. Dále rozšiřuji systém (4.4) a (5.1) o stavový popis váhových funkcí. Výsledný rozšířený systém (5.5) se stavy:

$$
\dot{x} = \begin{bmatrix} x_w \\ x \end{bmatrix}
$$

Rozšíření stavových rovnic s rozepsaným vstupem o nové rovnice váhových funkcí:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B_1 u_1 + B_2 u_2 \\
y_1 &= C_1 + D_{11} u_1 + D_{12} u_2 \\
y_2 &= C_2 + D_{21} u_1 + D_{22} u_2 \\
\dot{x}_w &= W_A x_w + W_B y_1 \\
\overline{y}_1 &= W_C x_w + W_D y_1
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

Dosazením matic (5.4) do nových rovnic v (5.5) dostanu (5.6):

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_w &= W_A x_w + W_B \left(C_1 x + D_{12} u_2 \right) = W_A x_w + W_B C_1 x + W_B D_{12} u_2 , \\
\overline{y}_1 &= W_C x_w + W_D \left(C_1 x + D_{12} u_2 \right) = W_C x_w + W_D C_1 x + W_D D_{12} u_2 .
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Přepsání rovnic (5.5) do maticového tvaru:

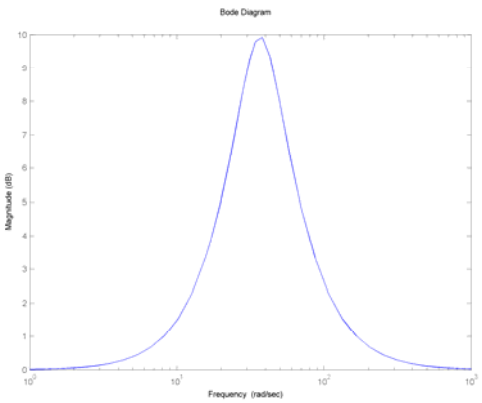
$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} W_A & W_B C_1 \\ Z & A \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_w \\ x \end{bmatrix}}_{\bar{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} W_B D_{11} \\ B_1 \end{bmatrix}}_{\bar{B}_1} u_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} W_B D_{12} \\ B_2 \end{bmatrix}}_{\bar{B}_2} u_2, \\
\bar{y}_1 &= \underbrace{\begin{bmatrix} W_C & W_D C_1 \end{bmatrix}}_{\bar{C}_1} \bar{x} + \underbrace{W_D D_{11}}_{\bar{D}_{11}} u_1 + \underbrace{W_D D_{12}}_{\bar{D}_{12}} u_2, \\
y_2 &= \underbrace{\begin{bmatrix} Z & C_2 \end{bmatrix}}_{\bar{C}_2} \bar{x} + D_{21} u_1 + D_{22} u_2.
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

Po zavedení rozšířených matic v (5.7) je stavový popis:

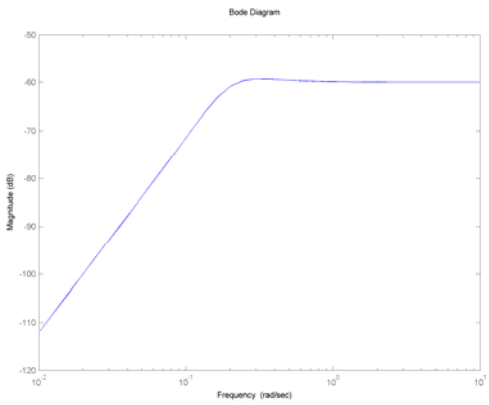
$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}_1 u_1 + \bar{B}_2 u_2, \\
\bar{y}_1 &= \bar{C}_1 + D_{11} u_1 + \bar{D}_{12} u_2, \\
y_2 &= \bar{C}_2 + D_{21} u_1 + D_{22} u_2.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Váhové funkce a váhové konstanty

Vážení pomocí váhových funkcí umožňuje ovlivnit chování systému v uzavřené smyčce. Váhová funkce W_1 zobrazena na obrázku 5.2 váží velikost zrychlení odpružené části automobilu na různých frekvencích. Váhovou funkci W_1 reprezentuje pásmová propust s frekvenčním rozsahem 2 až 14Hz (12,56 až 87,92 rads^{-1}) popisující citlivost lidského těla na tyto frekvence. Druhá váhová funkce W_2 zobrazena na obrázku 5.3 váží vyšší frekvence akčního zásahu lineárního motoru. Jde o horní propust se zlomovou frekvencí 0.22 rads^{-1}, kterou jsem určil metodou pokusu a omylu.

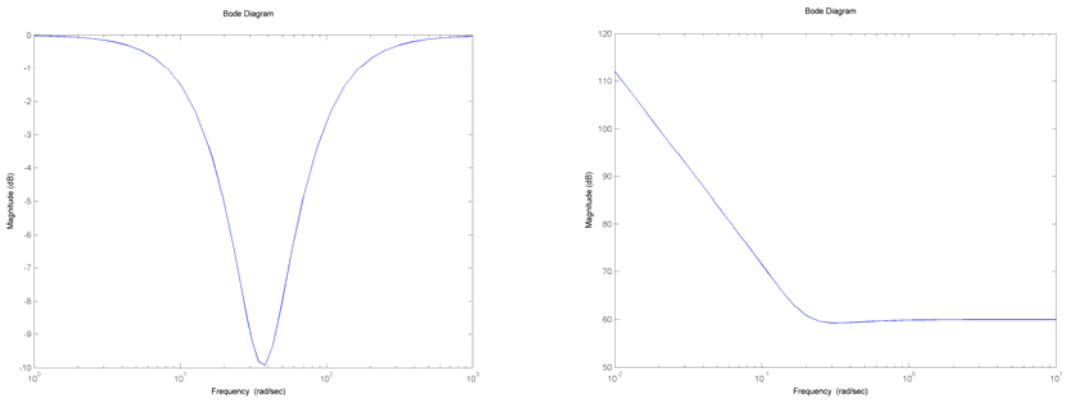


Obrázek 5.2: Amplitudová frekvenční charakteristika váhové funkce W_1



Obrázek 5.3: Amplitudová frekvenční charakteristika váhové funkce W_2

Význam použití doplňkových funkcí vyplývá z výpočtu H_∞ regulátoru pomocí minimalizace normy $\left\|T_{y1u1}\right\|_\infty$, kde pro zjednodušení uvažuji pouze s jednou váhou W_1 a přenosem v otevřené smyčce L. Nekonečná norma vážené citlivostní funkcí S je $\left\|\frac{W_1}{1+L}\right\|_\infty$. Snažím se nalézt největší možné γ pro $\left\|\frac{W_1}{1+L}\right\|_\infty < \frac{1}{\gamma}$. Postupnými úpravami získám nerovnici $\left|\frac{\gamma}{1+L(j\omega)}\right| < \left|\frac{1}{W_1(j\omega)}\right|$, která platí přes všechny ω. Z nerovnice vyplývá, že přenos uzavřené smyčky musí být na všech frekvencích menší než přenos doplňkové váhové funkce. Význam váhových funkcí W_1 a W_2 je nyní patrný při zobrazení jejich doplňkových funkcí $\frac{1}{W_1}$ a $\frac{1}{W_2}$ na obrázcích 5.4.



Obrázek 5.4: Amplitudové frekvenční charakteristiky doplňkové váhových funkcí $1/W_1$ a $1/W_2$

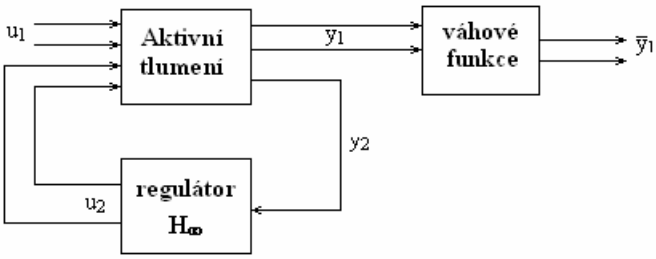
Váhové konstanty v matici W_D navrhuje experimentálně. Požadavky na řízení i vliv jednotlivých konstant mají protichůdné účinky a proto vybírám kompromis mezi velikostí akčního zásahu a velikostí překmitu polohy odpružené části automobilu.

Konstanty na diagonále matice W_D dle (5.4):

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 9.9 & 2.8 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

5.2 Poloviční model

Schéma rozšířeného systému polovičního modelu (obrázek 5.5) se od schématu čtvrtinového liší v rozměrech vstupních a výstupních vektorů. Vstup u_1 se zvětšuje a nově vstupuje do systému veličina $\dot{z}_{r2}$ rychlost poruchy vozovky pod druhým kolem a akční zásah u_2 se rozšiřuje o veličinu f_2.



Obrázek 5.5: Schéma rozšířeného systému polovičního modelu

Na místo výstup y_2 tedy zpětné vazby jsem zvolil rozdíly mezi odpruženými a neodpruženými částmi automobilu a to: z_{b1}-z_{w1} = x_1 a z_{b2}-z_{w2} = x_4 . Výstup y_1 obsahující vážené veličiny volím stejné jako v případě čtvrtinového modelu. Vektor vážení se však rozšíří o vektor vážení druhého kola a ω reprezentující předklon polovičního modelu automobilu. Stavový popis (4.11) polovičního modelu doplním o výstupní rovnice (5.1), kde výstup y_1 je tvořen vektorem:

$$\begin{aligned} y_1 &= \left[z_{w1} - z_{r1}, \quad \ddot{z}_{b1}, \quad f_1, \quad \ddot{z}_{w1}, \quad z_{w2} - z_{r2}, \quad \ddot{z}_{b2}, \quad f_2, \quad \ddot{z}_{w2}, \quad \omega \right]^T = \\ &= \left[x_2, \quad \dot{x}_7 + L_1 \dot{x}_8, \quad u_{21}, \quad \dot{x}_3, \quad x_4, \quad \dot{x}_7 - L_2 \dot{x}_8, \quad u_{22}, \quad \dot{x}_6, \quad x_8 \right]^T. \end{aligned}$$

Pomocí znalosti vektorů y_1 a y_2 je možné snadno dopočítat konkrétní matice C_1, C_2 a matice D_{11} až D_{22}. Frekvenčně vážím veličiny: $\ddot{z}_{b1}, \ddot{z}_{b2}, f_1$ a f_2. Další výstupní veličiny y_1 polovičního modelu vážím pomocí konstant. Filtry jsou opět reprezentovány čtveřicí matic ve stavovém popisu, které jsem získal převodem z přenosových funkcí pomocí příkazů (5.9).

$$
\begin{aligned}
&[W_{11A}, W_{11B}, W_{11C}, W_{11D}] = \mathrm{tf2ss}(\mathrm{W_{11}num}, \mathrm{W_{11}den});\\
&[W_{12A}, W_{12B}, W_{12C}, W_{12D}] = \mathrm{tf2ss}(\mathrm{W_{12}num}, \mathrm{W_{12}den});\\
&[W_{21A}, W_{21B}, W_{21C}, W_{21D}] = \mathrm{tf2ss}(\mathrm{W_{21}num}, \mathrm{W_{21}den});\\
&[W_{22A}, W_{22B}, W_{22C}, W_{22D}] = \mathrm{tf2ss}(\mathrm{W_{22}num}, \mathrm{W_{22}den});
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

První index u váhových funkcí polovičního modelu značí, zda jde o funkci zrychlení odpružené části automobilu nebo akční zásah lineárního motoru. Druhý index rozlišuje, zda se jedná o přední kolo nebo zadní kolo. Maticový zápis vážícího MIMO systému:

$$
\begin{aligned}
W_A &= \begin{bmatrix} W_{11A} & Z & Z & Z \\ Z & W_{21A} & Z & Z \\ Z & Z & W_{12A} & Z \\ Z & Z & Z & W_{22A} \end{bmatrix},\\
W_B &= \begin{bmatrix} \bar{0} & W_{11B} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & W_{21B} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & W_{12B} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & W_{22B} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix},\\
W_C &= \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ W_{11C} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & W_{21C} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & W_{12C} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & W_{22C} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix},\\
W_D &= diag\begin{bmatrix} k_1 & k_2 W_{11D} & k_3 W_{21D} & k_4 & k_5 & k_6 W_{12D} & k_7 W_{22D} & k_8 & k_9 \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

kde Z představuje nulovou matici a $\overline{0}$ nulový vektor. Konstanty vážení k_1 až k_9 náleží k totožně očíslovaným výstupům y_1. Tento vážící MIMO systém rozšíří stavové rovnice (4.11) a (5.1) podobně jako u čtvrtinového modelu. Rozšířené stavové rovnice MIMO systému:

$$\begin{aligned} \dot{\overline{x}} &= \overline{A}\overline{x} + \overline{B}_1 u_1 + \overline{B}_2 u_2, \\ \overline{y}_1 &= \overline{C}_1 + D_{11} u_1 + \overline{D}_{12} u_2, \\ y_2 &= \overline{C}_2 + D_{21} u_1 + D_{22} u_2, \end{aligned} \tag{5.11}$$

kde rozšířené matice váženého systému se rovnají:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} W_A & W_B C_1 \\ Z & A \end{bmatrix},$$

$$\overline{B}_1 = \begin{bmatrix} W_B D_{11} \\ B_1 \end{bmatrix},$$

$$\overline{B}_2 = \begin{bmatrix} W_B D_{12} \\ B_2 \end{bmatrix},$$

$$\overline{C}_1 = \begin{bmatrix} W_C & W_D C_1 \end{bmatrix},$$

$$\overline{C}_2 = \begin{bmatrix} Z & C_2 \end{bmatrix},$$

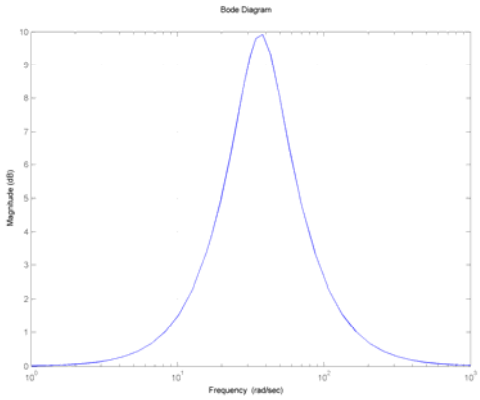
$$\overline{D}_{11} = \begin{bmatrix} W_D D_{11} \end{bmatrix},$$

$$\overline{D}_{12} = \begin{bmatrix} W_D D_{12} \end{bmatrix},$$

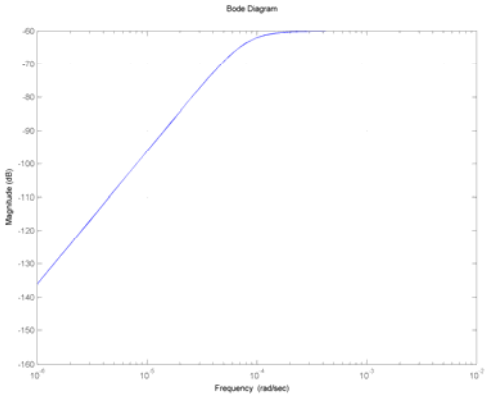
Váhové konstanty a funkce

Pro váhové funkce u polovičního modelu volím stejné typy jako u čtvrtinového modelu, protože vážím stejné funkce jen pro různá kola (přední a zadní). Váhy W_{11} a W_{12} jsou shodné s první váhovou funkcí čtvrtinového modelu W_1, kde vážím zrychlení odpružené části automobilu. Tyto funkce vyjadřují pohodlí řidiče a spolujezdců, pomocí vážení zrychlení $\ddot{z}_{b1}$ a $\ddot{z}_{b2}$. Amplitudová frekvenční charakteristika těchto filtrů je uvedena na obrázku 5.6. Váhové funkce W_{21} a W_{22} charakterizují stejný typ horní propusti jako funkci W_2, ale jejich zlomová frekvence je nižší a to $2{,}5 \cdot 10^{-4}$ rads^{-1}, kterou jsem nalezl empiricky. Amplitudová část frekvenční charakteristiky těchto váhových funkcí je na obrázku 5.7. Amplitudové

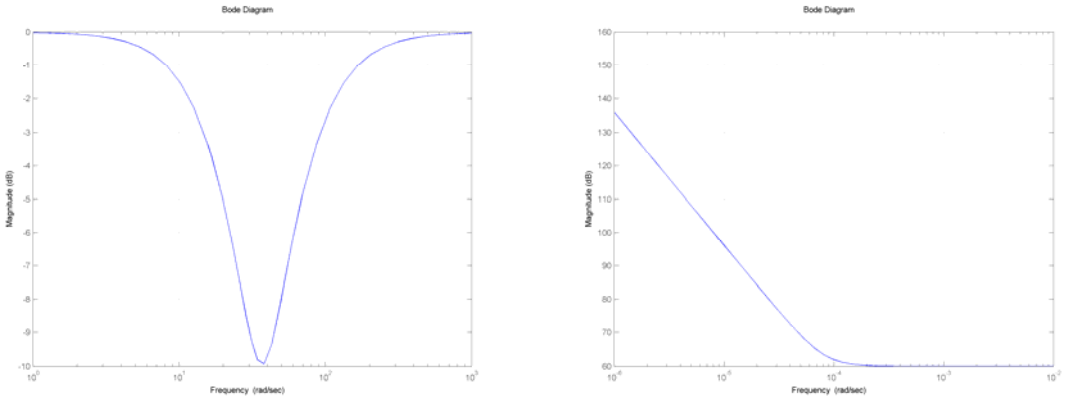
frekvenční charakteristiky doplňkových funkcí $\frac{1}{W_{11}} = \frac{1}{W_{12}}$ a $\frac{1}{W_{21}} = \frac{1}{W_{22}}$ jsou pro jejich význam zobrazeny na obrázku 5.8.



Obrázek 5.6: Amplitudová frekvenční charakteristika váhových funkcí W_{11} a W_{12}



Obrázek 5.7: Amplitudová frekvenční charakteristika váhových funkcí W_{21} a W_{22}



Obrázek 5.8: Amplitudové frekvenční charakteristiky váhových funkcí $1/W_{11}$ a $1/W_{22}$ (vlevo), $1/W_{21}$ a $1/W_{22}$ (vpravo)

Váhové konstanty v matici W_D se liší od čtvrtinového modelu díky vzájemnému ovlivnění zadního kola předním kolem a naopak. Konstanty navrhuji experimentálně a vybírám kompromis mezi velikostí akčního zásahu, velikostí překmitu polohy odpružených části automobilu nad předním/zadním kolem a nově předkláněním automobilu ω. Konstanty na diagonále matice W_D dle (5.9) jsou:

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 12 & 3.8 & 0.9 & 0.3 & 12 & 1.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Další poloviční model se zjednodušeně získám úpravou polovičního modelu pravé a levé strany automobilu na přední a zadní část automobilu pomocí záměny L_1 a L_2 za D_1 a D_2 u modelu automobilu. Nyní však kola automobilu nesměřují ve směru jízdy, proto musím otočit osy kartézských souřadnic o 90° směrem doprava. Pro názornost označím jednotlivá kola: LZ – levé zadní, LP – levé přední, PP – pravé přední a PZ – pravé zadní. Rotace probíhá následujícím způsobem:

$$LZ \rightarrow LP, LP \rightarrow PP, PP \rightarrow PZ, PZ \rightarrow LZ.$$

Nový poloviční model přední a zadní části automobilu mi umožňuje řídit náklon automobilu Ω při zatáčení. Váhové funkce zůstávají stejné, ale váhové konstanty na diagonále matice W_d se změní na:

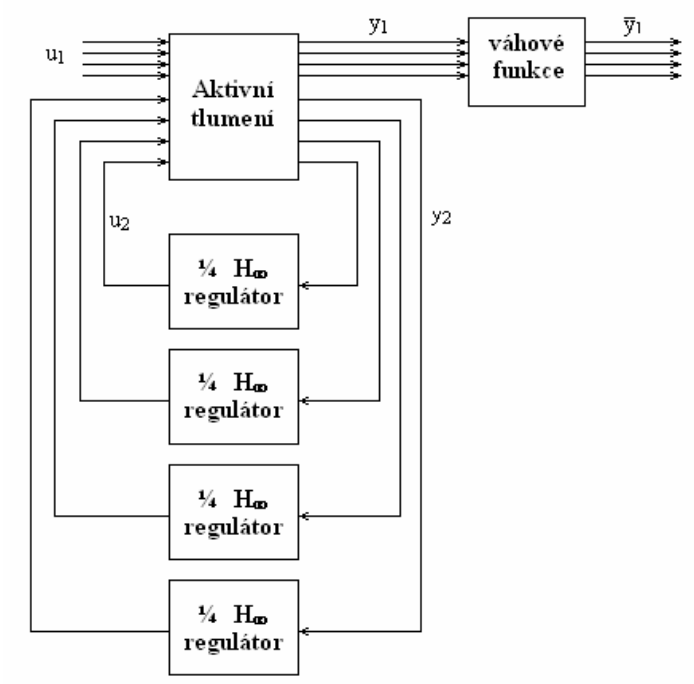
$$\begin{bmatrix} 0.5 & 9.7 & 1.5 & 0.9 & 0.5 & 9.9 & 1.5 & 0.9 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

5.3 Úplný model

Pro řízení celého modelu používám čtvrtinové a poloviční H_∞ regulátory, které jsem navrhl výše. Podmínky sub-optimálního regulátoru z kapitoly 2 nejsou pro celý model splněny díky rozdílným velikostem matic C_1, C_2 a matice A. Z toho vyplývá, že některé módy jsou nepozorovatelné.

Schéma regulace s použitím čtvrtinových regulátorů je na obrázku 5.9. Použití čtvrtinových regulátorů, každý na jednotlivé kolo je výhodné pouze pro řízení zrychlení odpružené části, ale nevhodné pro řízení předklonu. Váhové funkce zůstávají stejné, ale váhové konstanty na diagonále matice W_d se změní díky regulaci úplného modelu a ne čtvrtinového modelu na:

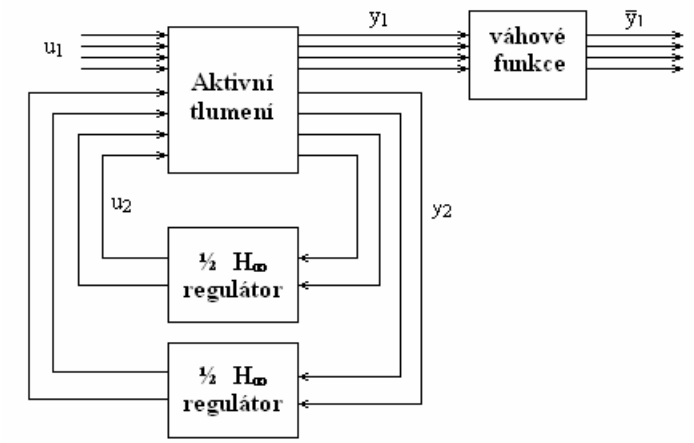
$$\begin{bmatrix} 0.3 & 2.8 & 1.8 & 0.35 \end{bmatrix}.$$



Obrázek 5.9: Blokové schéma řízení celého modelu čtvrtinovými H_∞ regulátory

Řízení pomocí polovičních regulátorů je dále rozděleno na řízení pomocí regulátorů složených z pravé a levé strany automobilu a po úpravě modelu i regulátoru na poloviční regulátor přední a zadní nápravy automobilu. Blokové schéma zapojení polovičních H_∞ regulátorů je na obrázku 5.10. Váhové funkce zůstávají stejné, ale váhové konstanty na diagonále matice W_d se změní díky regulaci úplného modelu a ne polovičního modelu na:

$$\begin{bmatrix}0.3 & 8 & 1.8 & 0.8 & 0.3 & 2.5 & 1.3 & 1.1 & 0.8\end{bmatrix}.$$



Obrázek 5.10: Blokové schéma řízení celého modelu polovičními H_∞ regulátory

Kapitola 6

Výpočty a simulace

Pro posouzení kvality návrhů regulátorů používám několik matematických funkcí charakterizující amplitudové vlastnosti zrychlení odpružené části a předklonu automobilu. Všechny výpočty kvality regulace jsou pro jednotkový skok představující poruchu o výšce 10 cm. Simulace provádím při 45 km/h rychlosti automobilu pro dvě vstupní poruchy v podobě 10 cm velkého skoku a poruchy v podobě zpomalovacího retardéru.

6.1 Simulace

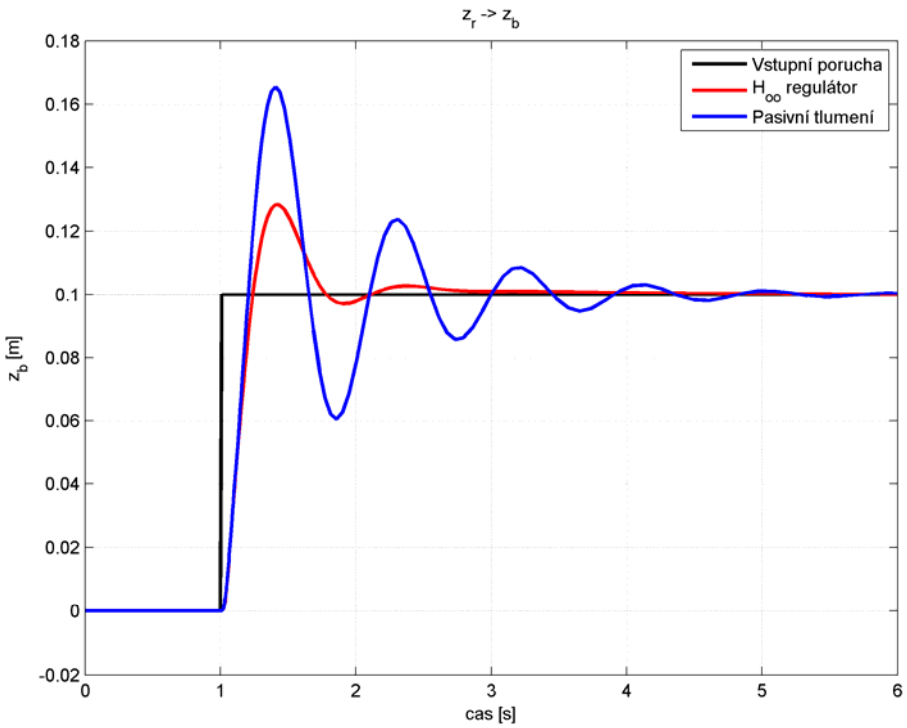
Simulinková schémata propojení čtvrtinového modelu, polovičního modelu a úplného modelu s regulátorem jsou součástí přílohy A. Simulace provedené na úplném modelu jsou zobrazeny pouze na pravé polovině úplného modelu automobilu, protože levá polovina se velmi málo odlišuje. Simulace na polovičním a úplném modelu jsem provedl při rychlosti pohybu automobilu v = 45 [km/h] = 12,5 [m/s]. Pro výpočet zpoždění mezi předním a zadním kolem při najetí na vstupní poruchu jsem použil následující vztah:

$$t_z = \frac{L_1 + L_2}{v} = \frac{1.5 + 2}{12.5} = 0.28[s]. \tag{6.6}$$

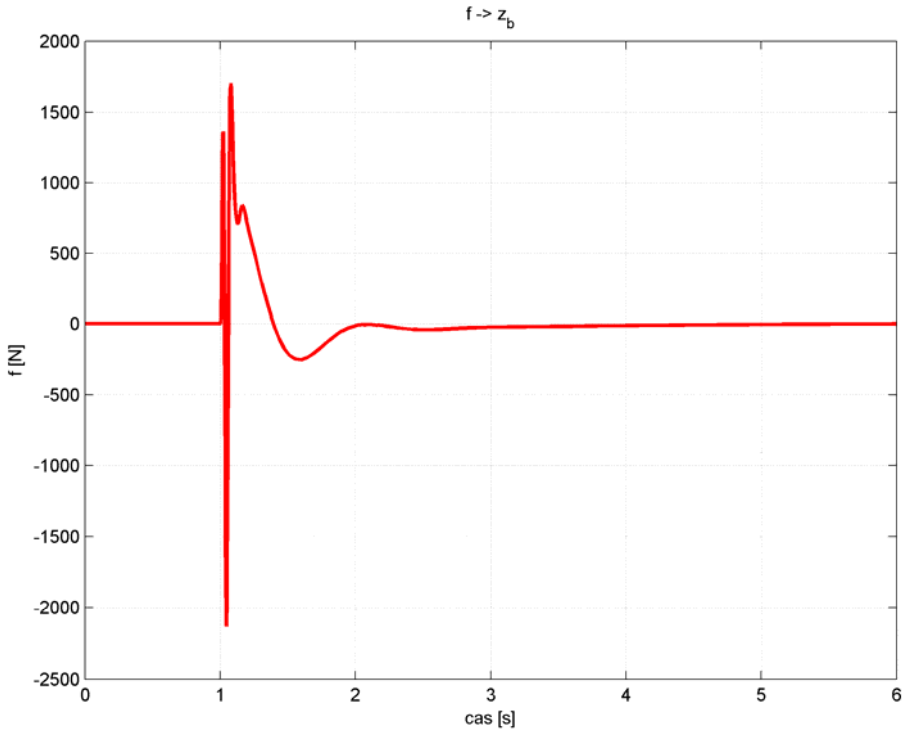
Vstupní poruchy:

a) Skok velký 10 cm, který simuluje vjezd na obrubník.
b) Zpomalovací retardér o rozměrech (0.5 x 0.45 x 0.05) m simulovaný pomocí poloviny periody sinusové funkce sin(75.36·t), pro danou rychlost v.

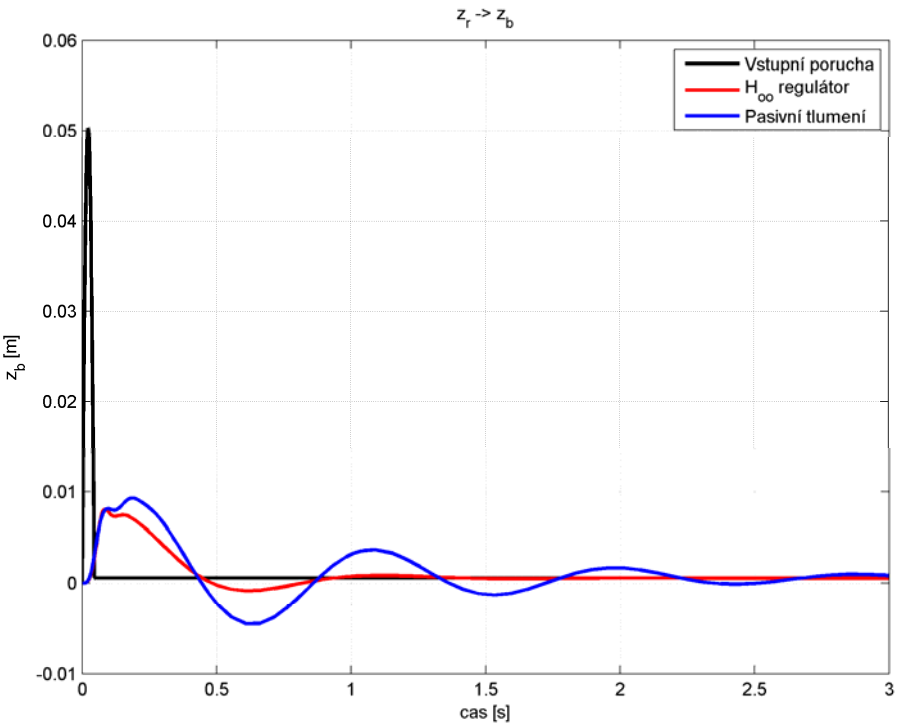
Čtvrtinový model:



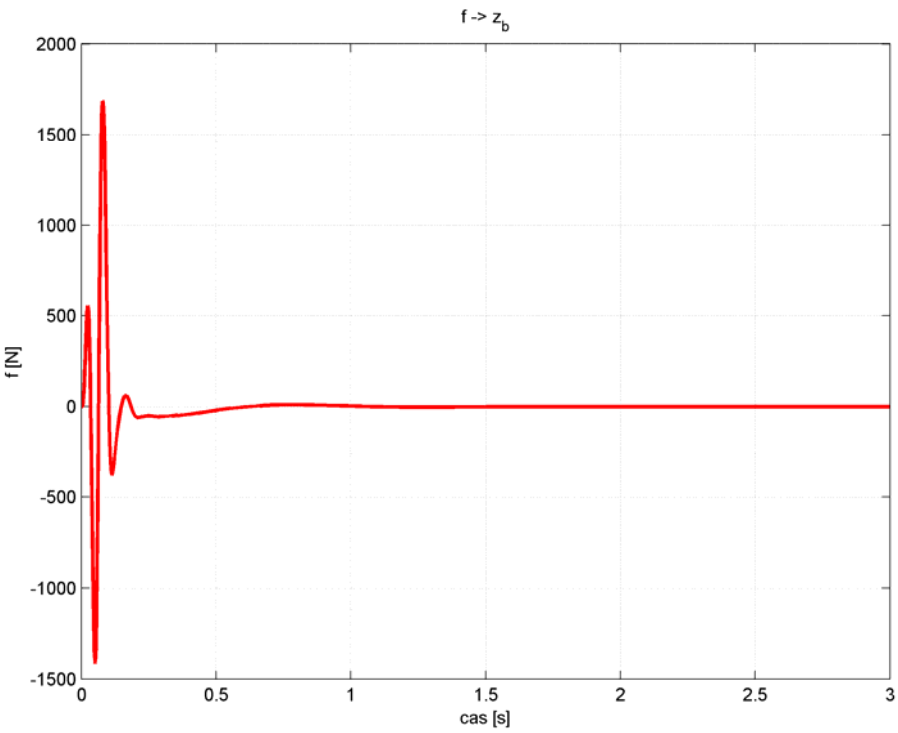
Obrázek 6.1: Odezva polohy odpružené části na 10 cm skok poruchy



Obrázek 6.2: Akčního zásah na 10 cm skok poruchy

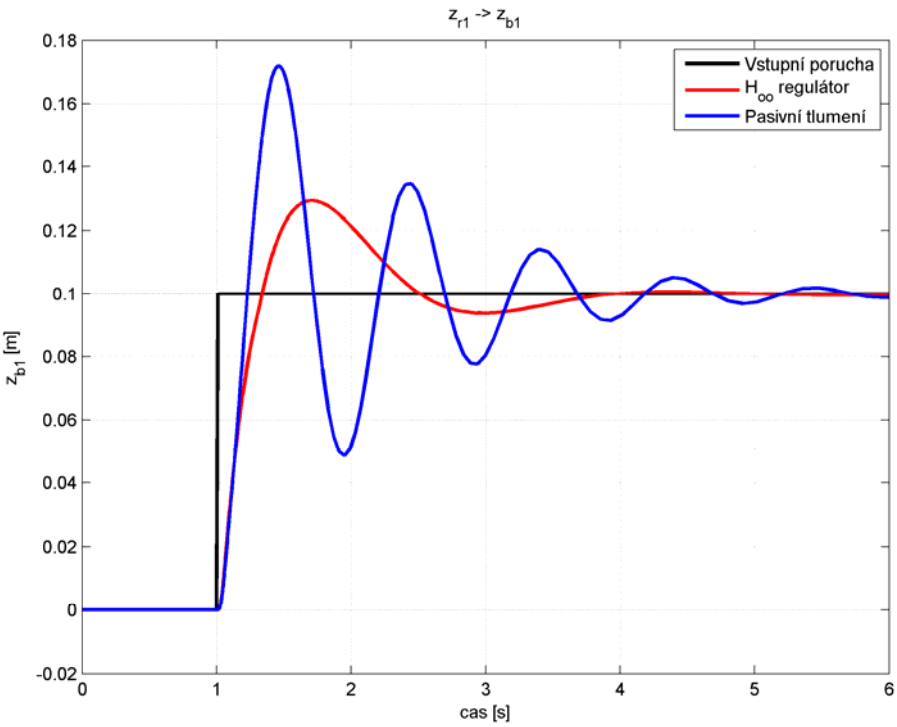


Obrázek 6.3: Odezva polohy odpružené části na poruchu zpomalovacího retardéru

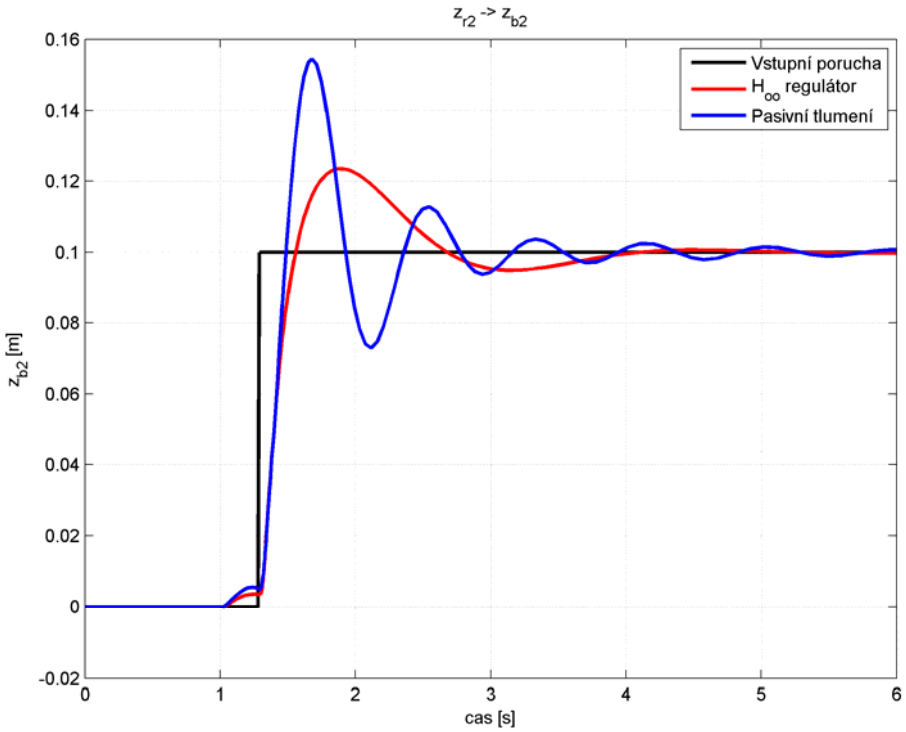


Obrázek 6.4: Akčního zásah na poruchu zpomalovacího retardéru

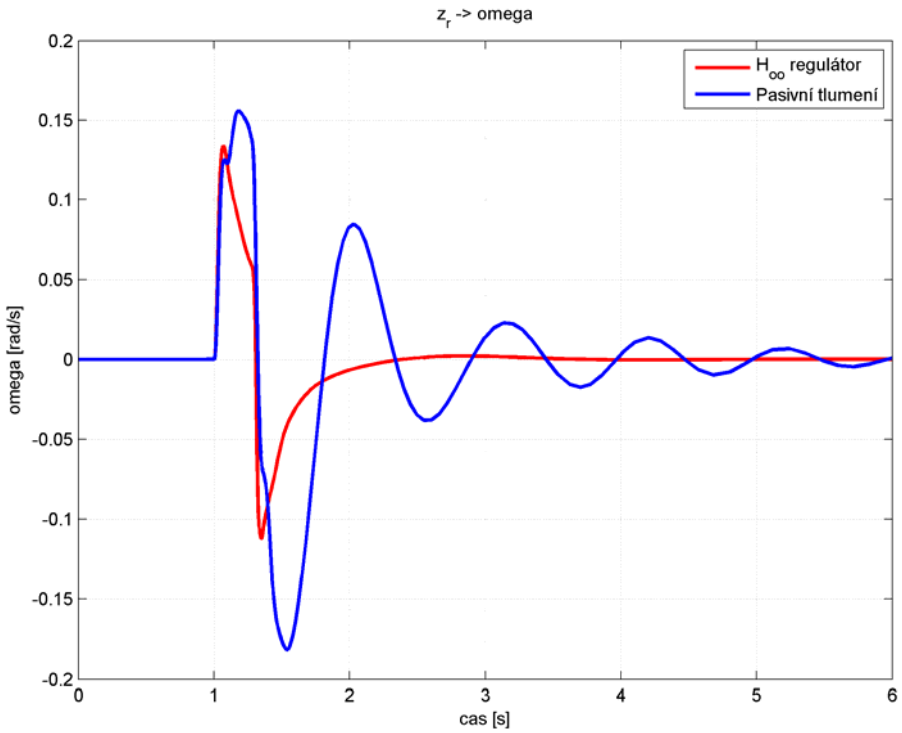
Poloviční model:



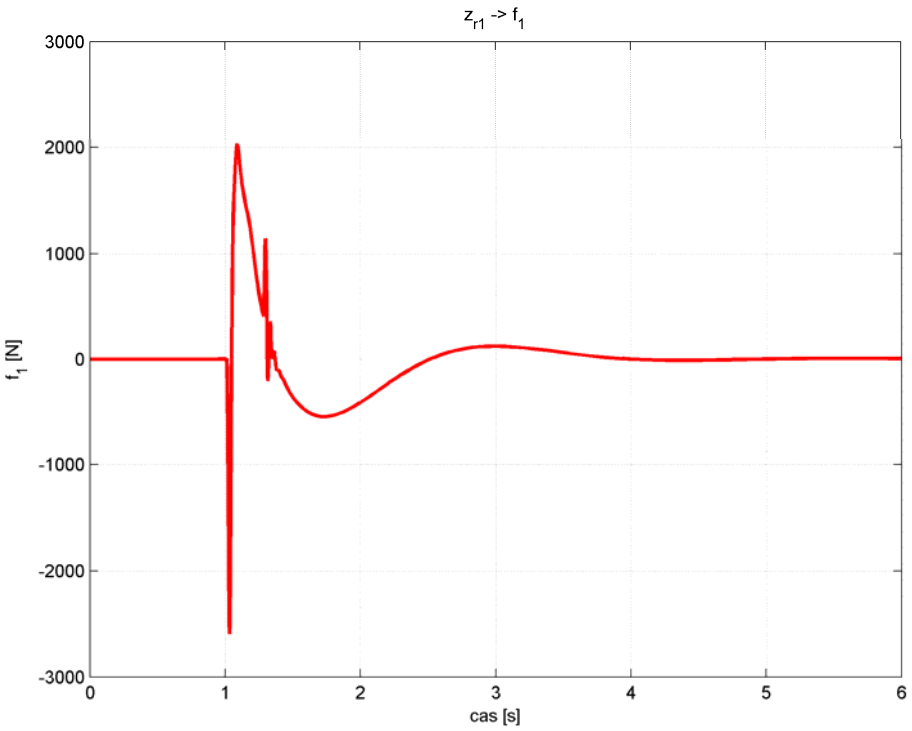
Obrázek 6.5: Přední kolo - odezva polohy odpružené části na 10 cm skok poruchy



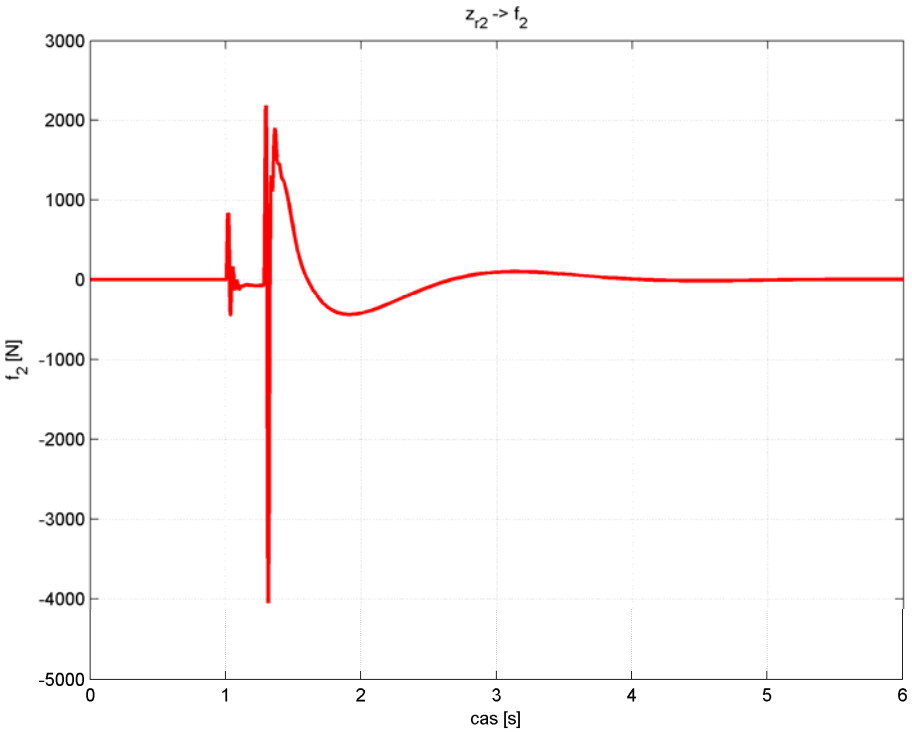
Obrázek 6.6: Zadní kolo - odezva polohy odpružené části na 10 cm skok poruchy



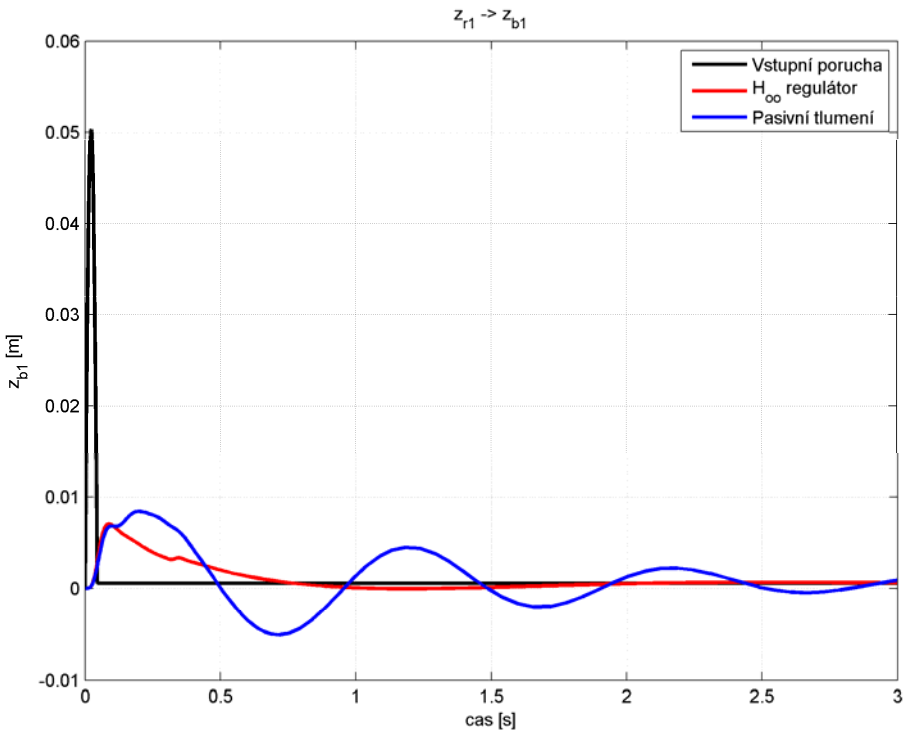
Obrázek 6.7: Předklánění automobilu na 10 cm skok poruchy



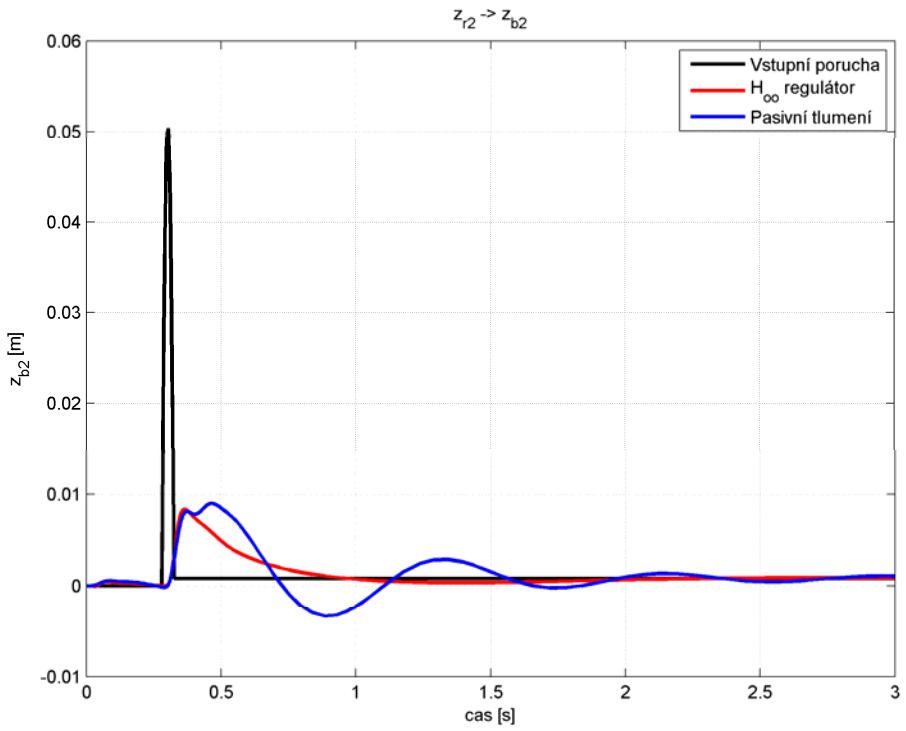
Obrázek 6.8: Přední kolo - akční zásah na 10 cm skok poruchy



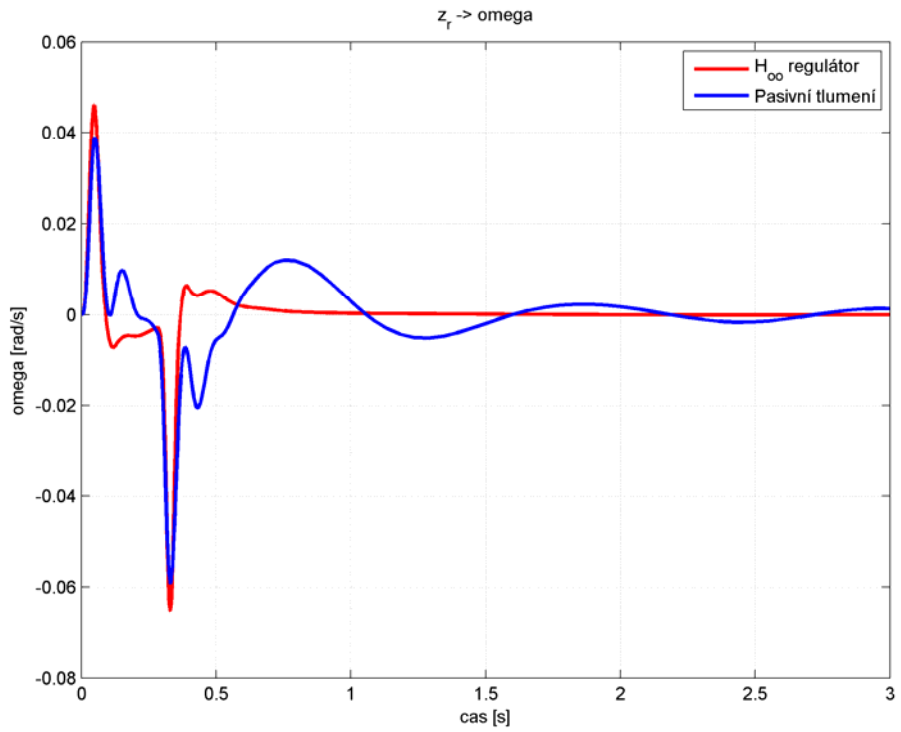
Obrázek 6.9: Zadní kolo - akční zásah na 10 cm skok poruchy



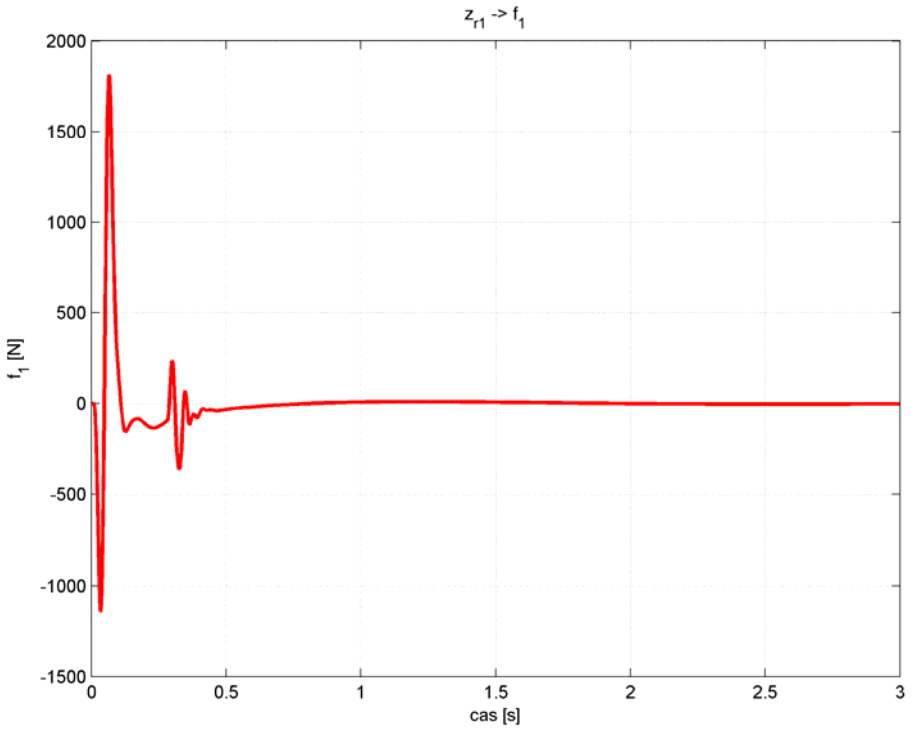
Obrázek 6.10: Přední kolo - odezva polohy odpružené části na poruchu zpomalovacího retardéru



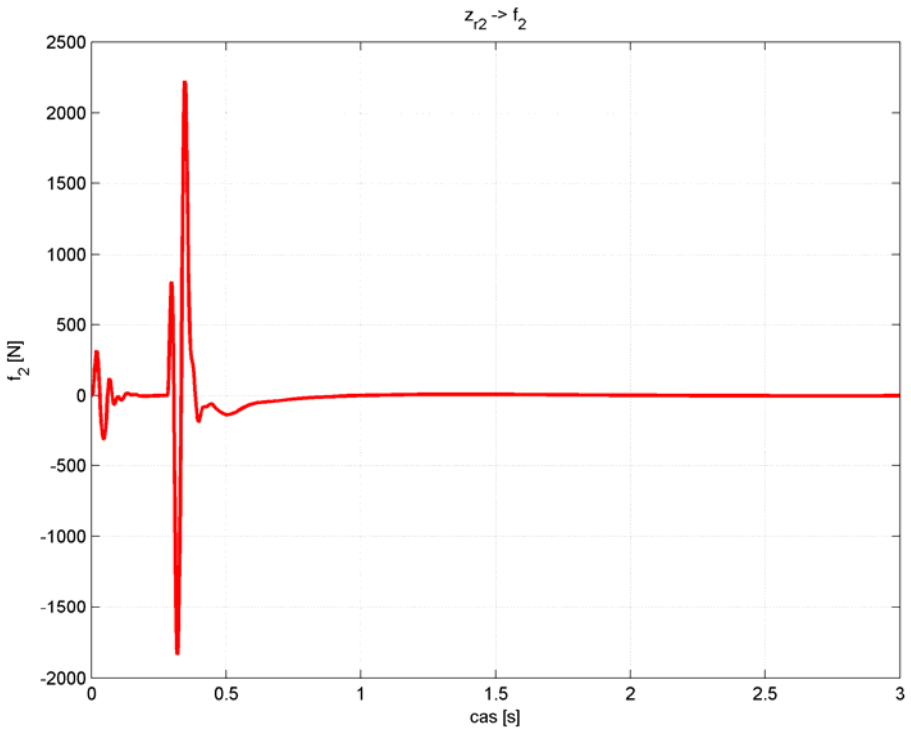
Obrázek 6.11: Zadní kolo - odezva polohy odpružené části na poruchu zpomalovacího retardéru



Obrázek 6.12: Předklánění automobilu na poruchu zpomalovacího retardéru

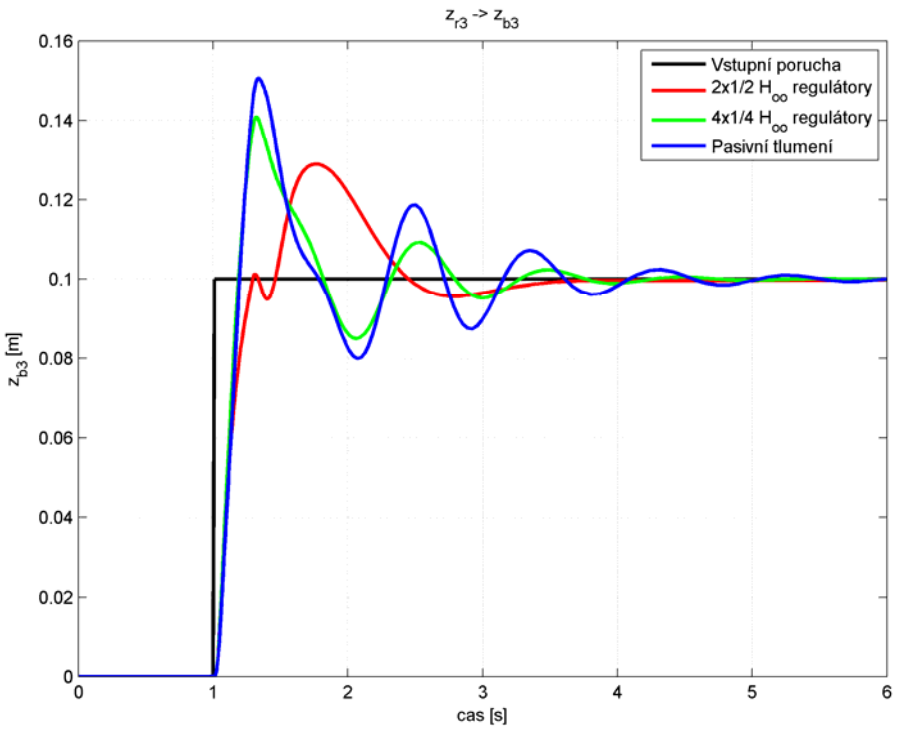


Obrázek 6.13: Přední kolo - akční zásah na poruchu zpomalovacího retardéru

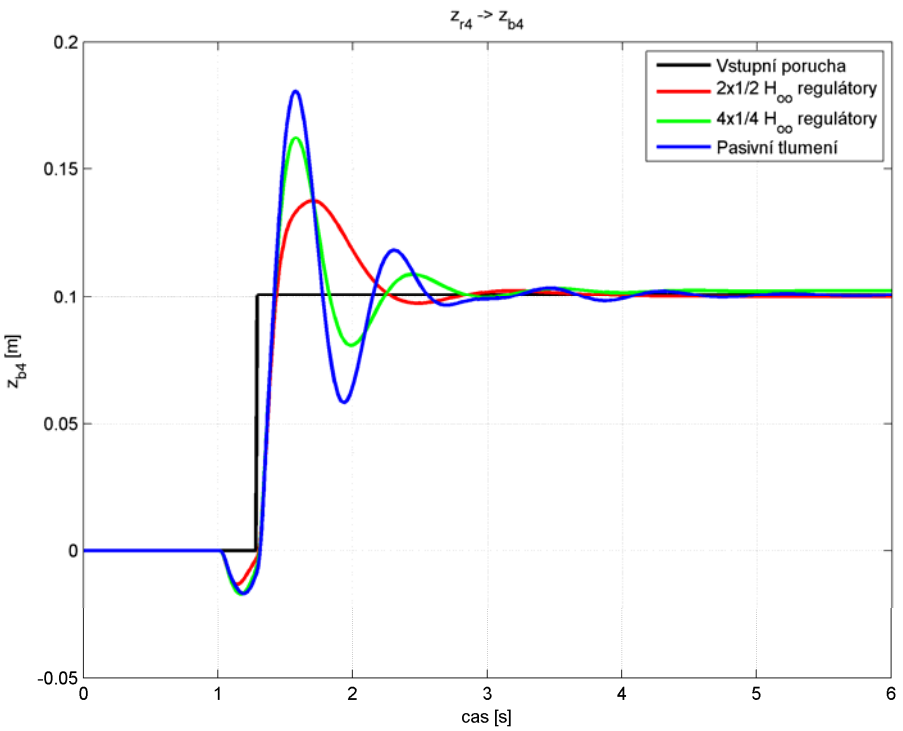


Obrázek 6.14: Zadní kolo - akční zásah na poruchu zpomalovacího retardéru

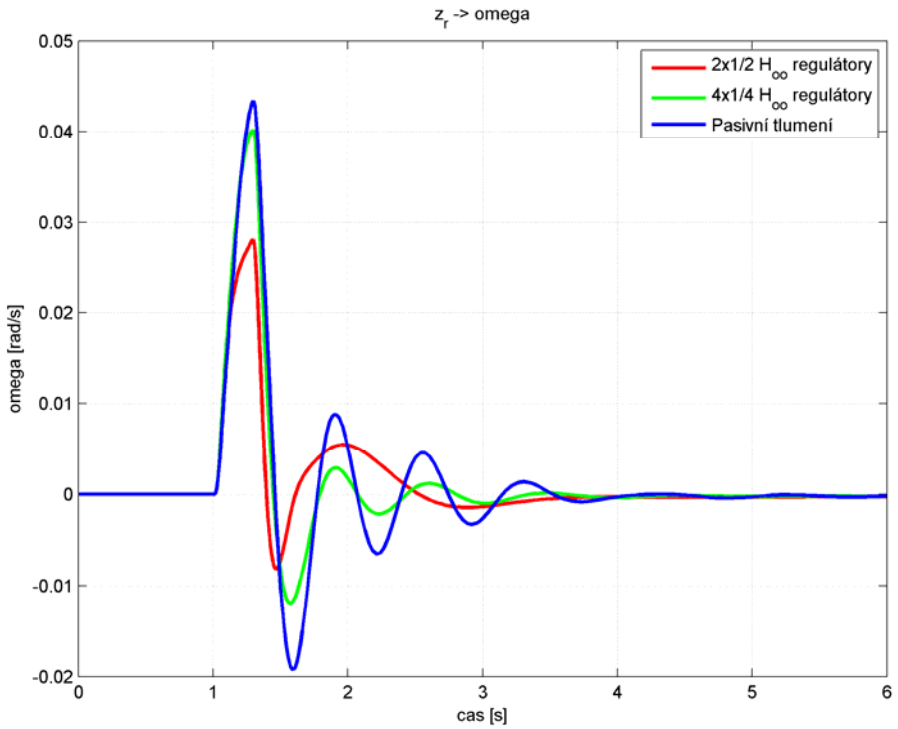
Úplný model (pravá část automobilu):



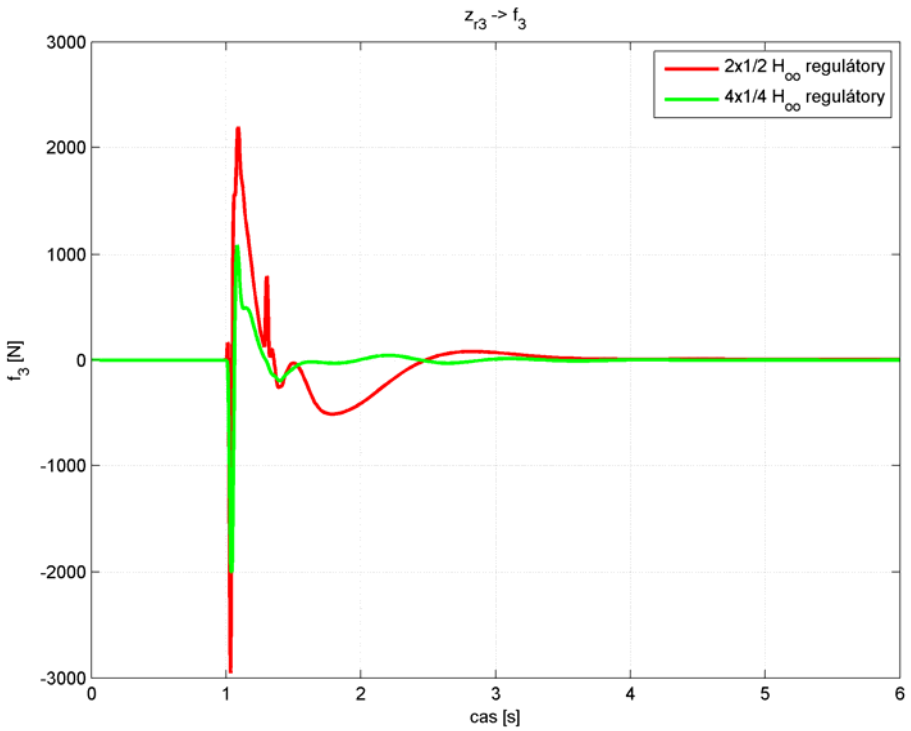
Obrázek 6.15: Přední kolo - odezva polohy odpružené části na 10 cm skok poruchy



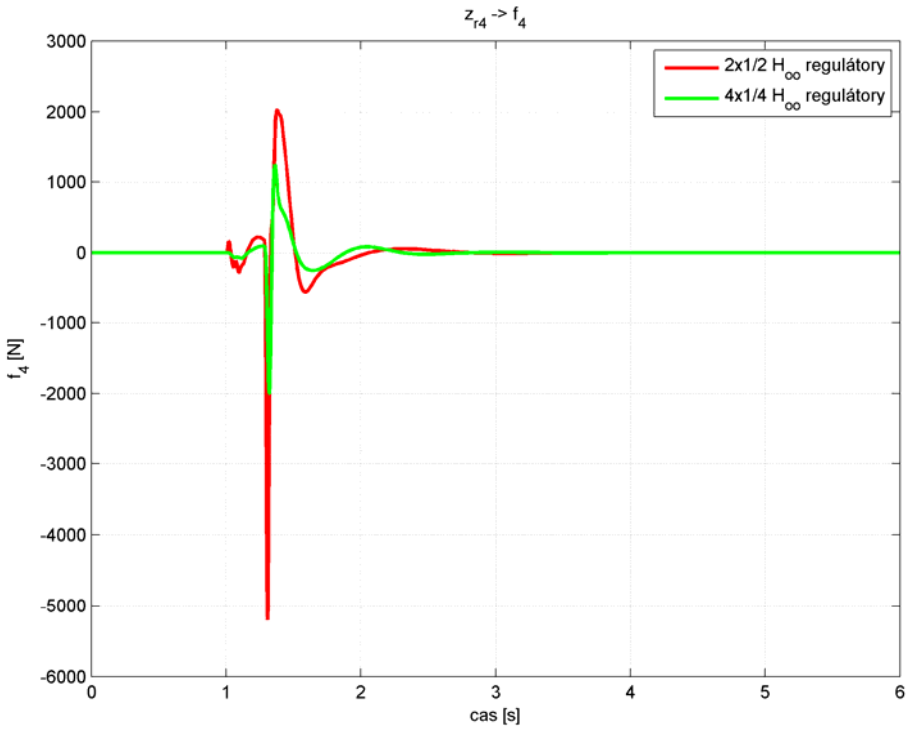
Obrázek 6.16: Zadní kolo - odezva polohy odpružené části na 10 cm skok poruchy



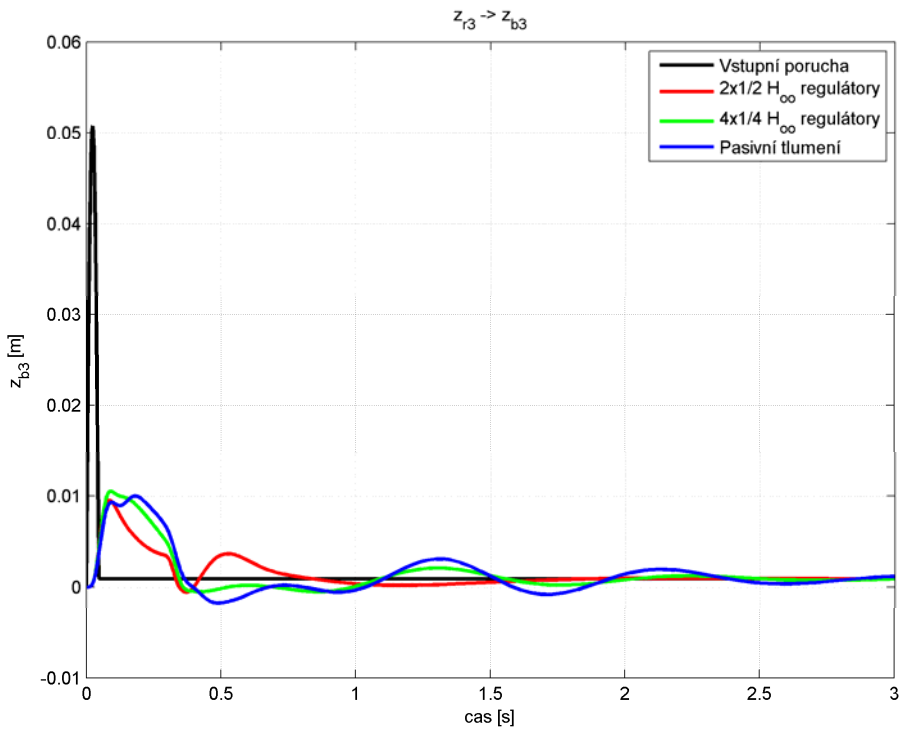
Obrázek 6.17: Předklánění automobilu na 10 cm skok poruchy



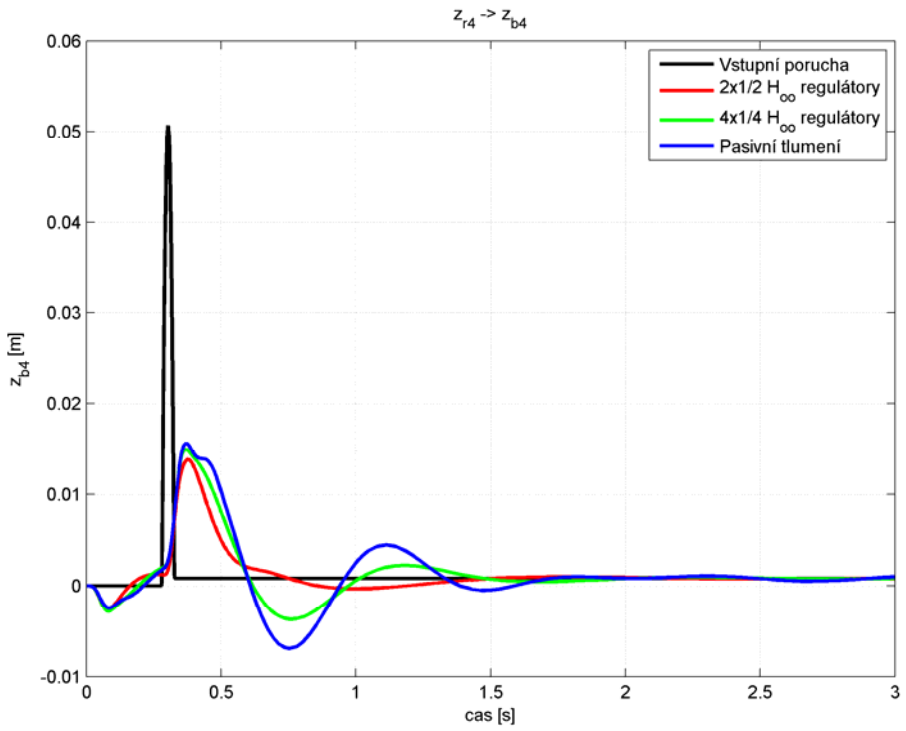
Obrázek 6.18: Přední kolo - akční zásah na 10 cm skok poruchy



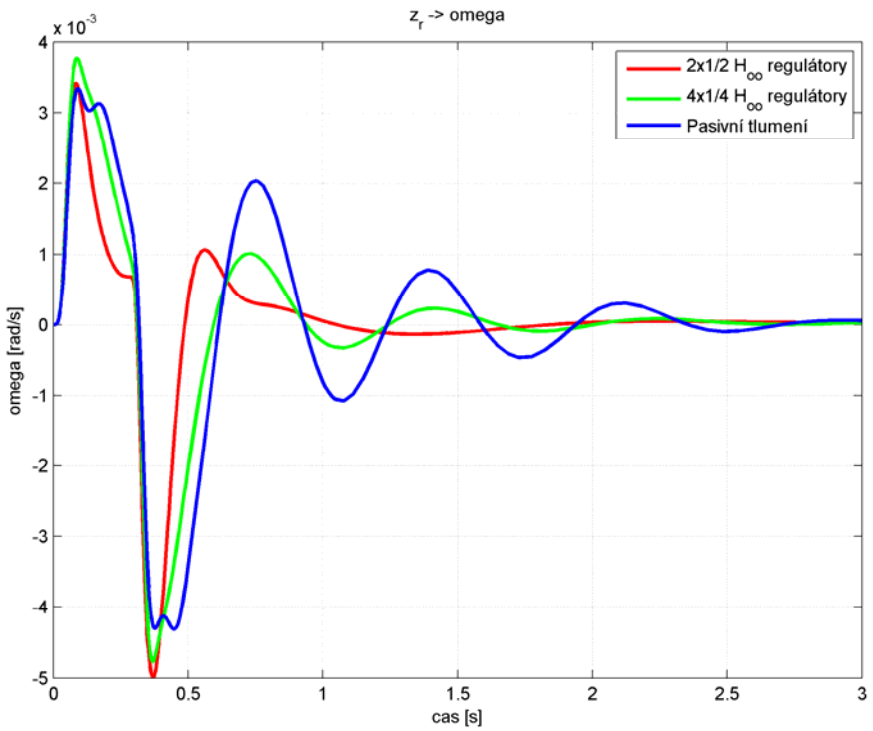
Obrázek 6.19: Zadní kolo - akční zásah na 10 cm skok poruchy



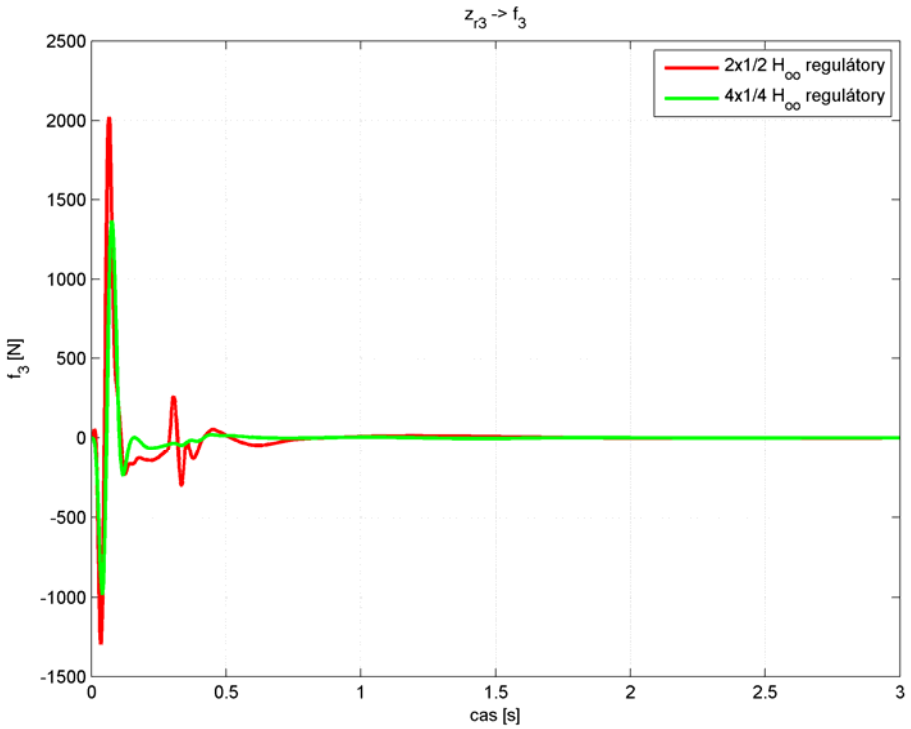
Obrázek 6.20: Přední kolo - odezva polohy odpružené části na poruchu zpomalovacího retardéru



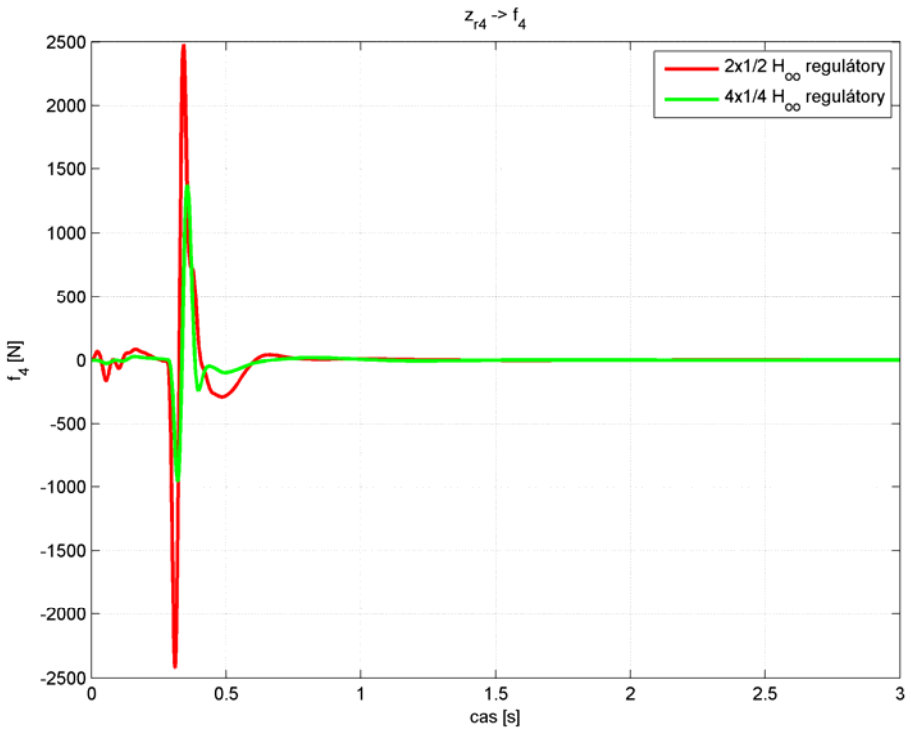
Obrázek 6.21: Zadní kolo - odezva polohy odpružené části na poruchu zpomalovacího retardéru



Obrázek 6.22: Předklánění automobilu na poruchu zpomalovacího retardéru

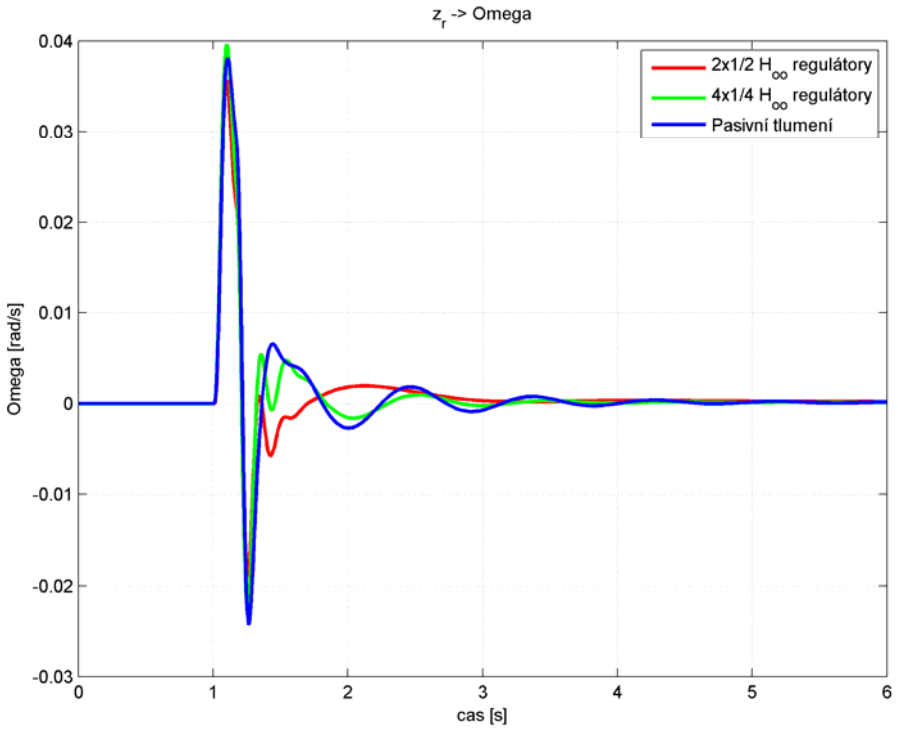


Obrázek 6.23: Přední kolo - akční zásah na poruchu zpomalovacího retardéru

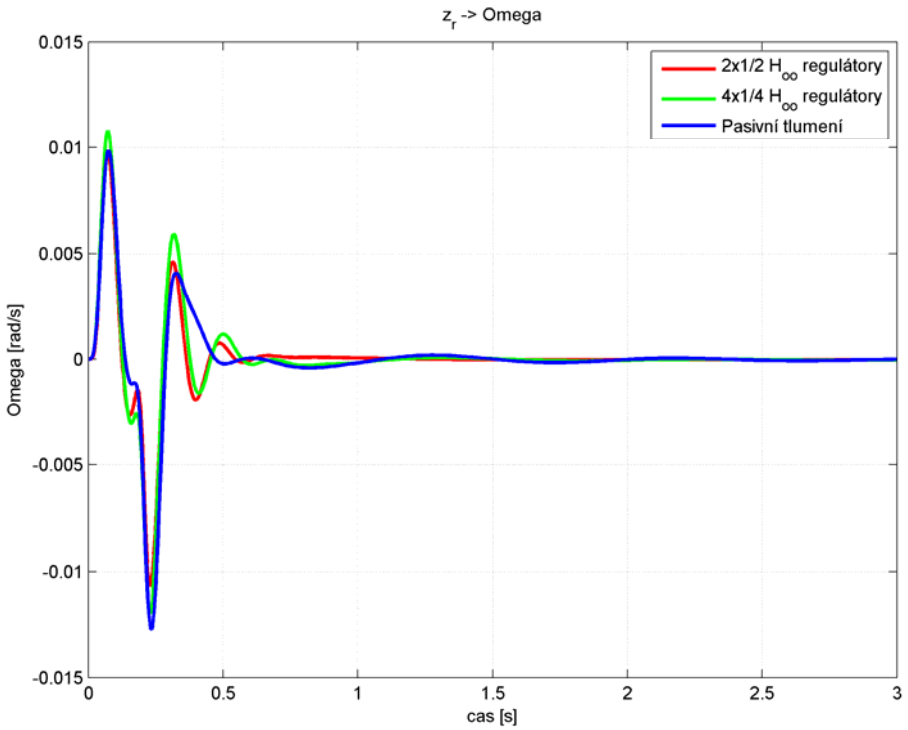


Obrázek 6.24: Zadní kolo - akční zásah na poruchu zpomalovacího retardéru

Jízda do zatáčky za použití polovičních modelů představujících přední/zádní část automobilu:



Obrázek 6.25: Naklánění automobilu na 10 cm skok poruchy



Obrázek 6.26: Naklánění automobilu na poruchu zpomalovacího retardéru

6.2 Výpočty kvality regulace

Matematické funkce popisující amplitudový charakter výše zvolených veličin:

- ***Střední hodnota*** je reprezentovaná aritmetickým průměrem pro diskrétní hodnoty. Aritmetický průměr je statická veličina popisující typickou hodnotu v souboru mnoha dat. Aritmetický průměr se značí vodorovným pruhem nad písmenem nebo řeckým písmenem μ.

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,, \tag{6.1}$$

  tzn. součet všech hodnot je vydělen jejich počtem (x_i jsou jednotlivé hodnoty a n je počet hodnot). Pro výpočet střední hodnoty zrychlení a předklánění jsem použil funkci *mean()*.

- ***Medián*** označovaný $\tilde{x}$ je hodnota, která dělí řadu podle velikosti seřazených výsledků na dvě poloviny. Platí tedy, že 50 procent hodnot je menších nebo rovných a nejméně *50* procent hodnot je větších nebo rovných mediánu. Při sudém počtu prvků je mediánem aritmetický průměr hodnot $\frac{n}{2}$ a $\frac{n}{2}+1$. Medián představuje nejpoužívanější kvantil. Pro výpočet mediánu zrychlení a předklánění jsem použil funkci *median()*.

- ***Efektivní hodnota*** (RMS – Root Mean Square česky odmocnina průměru čtverců) reprezentuje kvadratický průměr pro diskrétní hodnoty. Kvadratický průměr je statická veličina představující druhou odmocninu aritmetického průměru druhých mocnin daných hodnot (x_i jsou jednotlivé hodnoty a n je počet hodnot).

$$RMS = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \,. \tag{6.2}$$

  Pro výpočet efektivní hodnoty zrychlení a předklánění jsem použil funkci *norm()*.

- ***Kvadratická norma*** je definována jako odmocnina součtu mocnin absolutních hodnot jednotlivých prvků.

$$\|x\|_2 = \sqrt{\left(|x_1|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2\right)}. \tag{6.3}$$

Pro výpočet kvadratické normy zrychlení a předklánění jsem použil funkci *norm()*.

- ***Nekonečná norma*** je definována jako maximální hodnota z absolutních hodnot všech prvků.

$$\|x\|_\infty = \max_i\left(|x_i|\right). \tag{6.4}$$

Pro výpočet nekonečné normy zrychlení a předklánění jsem použil funkci *norm()*.

Výsledky v níže uvedených tabulkách pro čtvrtinový, poloviční a úplný modelu jsem získal pomocí matematický funkcí viz výše, popisujících amplitudových charakter zrychlení odpérované části automobilu a předklánění automobilu jako odezvu na 10 cm skok poruchy dle simulinkových schémat přiložených v příloze A.

Čtvrtinový model:

Tabulka 6.1: Odezva zrychlení odpružené části na 10 cm skok poruchy

$\ddot{z}_b$ [ms^{-2}]					
Matematická funkce	$\bar{x}$	$\tilde{x}$	*RMS*	$\|x\|_2$	$\|x\|_\infty$
¼ regulátor	0.0738	$-1.7\cdot10^{-4}$	0.1871	3.3514	0.5902
Pasivní tlumení	0.0795	0.0040	0.2360	4.2276	0.6321

Poloviční model:

Tabulka 6.2: Přední kolo - odezva zrychlení odpružené části na 10 cm skok poruchy

$\ddot{z}_{b1}$ [ms^{-2}]					
Matematická funkce	$\bar{x}$	$\tilde{x}$	*RMS*	$\|x\|_2$	$\|x\|_\infty$
¼ regulátor	0.0864	0.0047	0.1647	2.9833	0.4978
Pasivní tlumení	0.1210	0.0328	0.2459	4.4540	0.5685

Tabulka 6.3: Zadní kolo - odezva zrychlení odpružené části na 10 cm skok poruchy

$\ddot{z}_{b2}$ [ms^{-2}]					
Matematická funkce	$\bar{x}$	$\tilde{x}$	*RMS*	$\lVert x \rVert_2$	$\lVert x \rVert_\infty$
¼ regulátor	0.0864	0.0047	0.1647	2.9833	0.4978
Pasivní tlumení	0.1210	0.0328	0.2459	4.4540	0.5685

Tabulka 6.4: Předklánění automobilu na 10 cm skok poruchy

ω [rads^{-1}]					
Matematická funkce	$\bar{x}$	$\tilde{x}$	*RMS*	$\lVert x \rVert_2$	$\lVert x \rVert_\infty$
¼ regulátor	0.0092	$8.1 \cdot 10^{-5}$	0.0508	0.9204	0.1338
Pasivní tlumení	0.0181	0.0052	0.0743	1.3454	0.1820

Úplný model:

Tabulka 6.5: Levé přední kolo - odezva zrychlení odpružené části na 10 cm skok poruchy

$\ddot{z}_{b1}$ [ms^{-2}]					
Matematická funkce	$\bar{x}$	$\tilde{x}$	*RMS*	$\lVert x \rVert_2$	$\lVert x \rVert_\infty$
2 x ½ regulátor	0.1162	0.0421	0.2201	3.5965	0.6471
4 x ¼ regulátor	0.1175	0.0047	0.2674	4.3697	0.7193
Pasivní tlumení	0.1222	0.0153	0.2738	4.4735	0.6398

Tabulka 6.6: Levé zadní kolo - odezva zrychlení odpružené části na 10 cm skok poruchy

$\ddot{z}_{b2}$ [ms^{-2}]					
Matematická funkce	$\bar{x}$	$\tilde{x}$	*RMS*	$\lVert x \rVert_2$	$\lVert x \rVert_\infty$
2 x ½ regulátor	0.1039	0	0.2654	4.3370	0.7501
4 x ¼ regulátor	0.1127	0	0.2338	5.5222	0.9089
Pasivní tlumení	0.1161	0	0.3860	6.3065	1.0719

Tabulka 6.7: Pravé přední kolo - odezva zrychlení odpružené části na 10 cm skok poruchy

$\ddot{z}_{b3}$ [ms^{-2}]					
Matematická funkce	$\bar{x}$	$\tilde{x}$	*RMS*	$\lVert x \rVert_2$	$\lVert x \rVert_\infty$
2 x ½ regulátor	0.1162	0.0421	0.2201	3.5965	0.6471
4 x ¼ regulátor	0.1175	0.0047	0.2674	4.3697	0.7193
Pasivní tlumení	0.1222	0.0153	0.3860	4.4735	0.6398

Tabulka 6.8: Pravé zadní kolo - odezva zrychlení odpružené části na 10 cm skok poruchy

$\ddot{z}_{b4}$ [ms^{-2}]					
Matematická funkce	$\bar{x}$	$\tilde{x}$	*RMS*	$\lVert x \rVert_2$	$\lVert x \rVert_\infty$
2 x ½ regulátor	0.1067	0	0.2931	4.7896	0.9390
4 x ¼ regulátor	0.1144	0	0.3438	5.6970	1.0225
Pasivní tlumení	0.1161	0	0.3860	6.3065	1.0719

Tabulka 6.9: Předklánění automobilu na 10 cm skok poruchy

ω [rads^{-1}]					
Matematická funkce	$\bar{x}$	$\tilde{x}$	*RMS*	$\lVert x \rVert_2$	$\lVert x \rVert_\infty$
2 x ½ regulátor	0.0072	0.0012	0.0133	0.2166	0.0281
4 x ¼ regulátor	0.0097	0.0003	0.0190	0.3108	0.0403
Pasivní tlumení	0.0101	0.0010	0.0207	0.3389	0.0434

Z výše uvedených výsledků je patrné zlepšení u všech modelů automobilů při použití aktivního tlumení pérování než při využití pasivního tlumení pérování. Pasivní tlumení pérování simuluji podle simulinkového schématu uvedeného v příloze A jako systém, který má místo zpětné vazby v podobě akční veličiny nulový konstantní signál. Hodnoty v tabulkách pro aktivní tlumení pérování jsou nižší než pro pasivní tlumení pérování.

V úplném modelu dále porovnávám dva typy řízení a to pomocí čtyř nezávislých čtvrtinových regulátorů a dvou polovičních regulátorů. Z uvedených výsledků vyplývá, že je výhodnější použít dva poloviční regulátory aktivního tlumení pérování představující pravou a levou část automobilu než čtyři čtvrtinové regulátory aktivního tlumení pérování, protože dosahují lepších výsledků.

Kapitola 7

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit se s teorií řízení H_∞ a navrhnout robustní regulátor pro úplný model aktivního tlumení pérování automobilu.

Nejdříve jsem navrhnul H_∞ regulátor pro čtvrtinový model aktivního tlumení automobilu. Z výpočtů amplitudové analýzy zrychlení je zřejmé, že aktivní tlumení pérování automobilu je výhodnější oproti pasivnímu pérování automobilu díky jejím nižším hodnotám. Toto zjištění platí pro všechny zde uvedené modely automobilu. Ze simulací je patrné, že použitý H_∞ regulátor pro řízení aktivního pérování výrazně zlepšuje komfort pasažérů pro obě vstupní poruchy. Vstupními poruchami vozovky jsou: 10 cm skok a zpomalovací retardér. Lze tedy použít lineární motor TBX3810, jelikož akční zásah je nižší než maximální špičkový akční zásah, který je motor schopen vyvinout.

Dále jsem navrhl H_∞ regulátor pro aktivní tlumení polovičního modelu, který představuje levou nebo pravou část automobilu. Nově minimalizuji i předklánění automobilu vhodně nastaveným regulátorem, jehož nevýhodou je zvýšený akční špičkový zásah 4 kN, který pomocí saturace lze omezit na 2 kN, aby bylo možné použít výše zmíněný lineární motor.

Regulátory navržené pro čtvrtinový a poloviční model aktivního tlumení automobilu jsem použil pro řízení aktivního tlumení úplného modelu automobilu. Z výpočtů amplitudové analýzy zrychlení a předklánění úplného modelu vyplývá, že použití dvou H_∞ regulátorů navržených pro řízení polovičního modelu má lepší amplitudové vlastnosti než použití čtyř H_∞ regulátorů, které byly navrženy pro čtvrtinový model. Ze simulací je patrné, že i zde je nutné použít saturaci akční veličiny a omezit ji z 5,1 kN na 2 kN pro praktické použití lineárního motoru TBX3810. Při omezení akční veličiny jak na polovičním tak na úplném modelu automobilu regulátor stále funguje, ale zvýší se překmit polohy odpérované části a doba ustálení.

Nakonec jsem použil úplný model automobilu otočený podle kartézských souřadnic o $90°$ a pomocí dvou H_∞ regulátorů polovičního modelu představující přední a zadní část automobilu jsem při jízdě do zatáčky nasimuloval naklánění automobilu. Naklánění automobilu je pro dva H_∞ regulátory polovičního modelu výhodnější než užití čtyř H_∞ regulátorů čtvrtinového modelu.

Při praktické realizaci pro měření rychlosti lineárního motoru můžeme použít elektrodynamický senzor kmitání, který pracuje na principu magnetické indukce, jehož výstupní napětí je přímo úměrné okamžité rychlosti. Polohu lineárního motoru získáme pomocí integrace rychlosti. Jako akční člen aktivního tlumení automobilu aplikujeme lineární motor TBX3810 u všech modelů automobilu v režimu impulzního napájecího stejnosměrného napětí 320 V s výstupní impulzní silou 2 kN. K akumulaci rekuperované energie využijeme zapojení z obrázku 3.9 na straně 17.

Seznam použité literatury

[1] KRUCZEK A., *Řízení aktivního tlumení pérování automobilu*, diplomová práce, 2003.

[2] ZHOU K, DOYLE J.C., *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall, 1998.

[3] SKOGESTAD S., POSTLETHWAITE I., *Multivariable Feedback Control:* Analysis and *Design*, John Wiley and Sons, 2.vydání, 2005.

[4] GAHINET P, NAMIROVSKY A., LAUB A.J., CHILALI M., *LMI Control Toolbox User´s Guide*, online: http://www.mathworks.com/access/helpdesk_r13/help/pdf_doc/lmi/lmi.pdf

[5] HYNIOVÁ K., HONCŮ J., STŘÍBRSKÝ A, KRUCZEK A., *Energy Management in Automotive Active Suspension Systems*, The 10th Mechatronics Forum Biennial International Conference, 2006.

[6] THRUSTTUBE TBX3810, *Datasheet DS01047*, online: http://www.copleycontrols.com/Motion/pdf/DS-pdf/DS01047.pdf

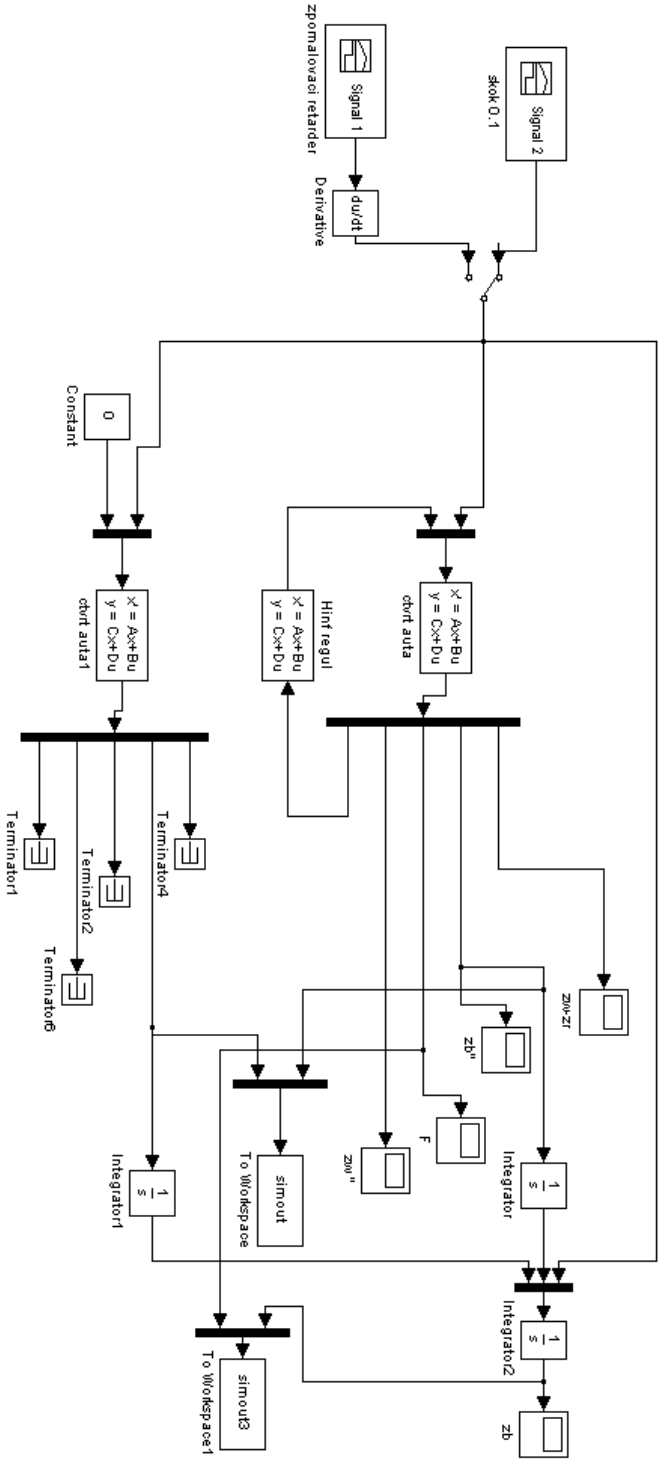
[7] ZNAMENÁČEK K., *Lineární motor jako akční člen aktivního tlumiče*, diplomová práce, 2004.

Seznam použitého programového vybavení:

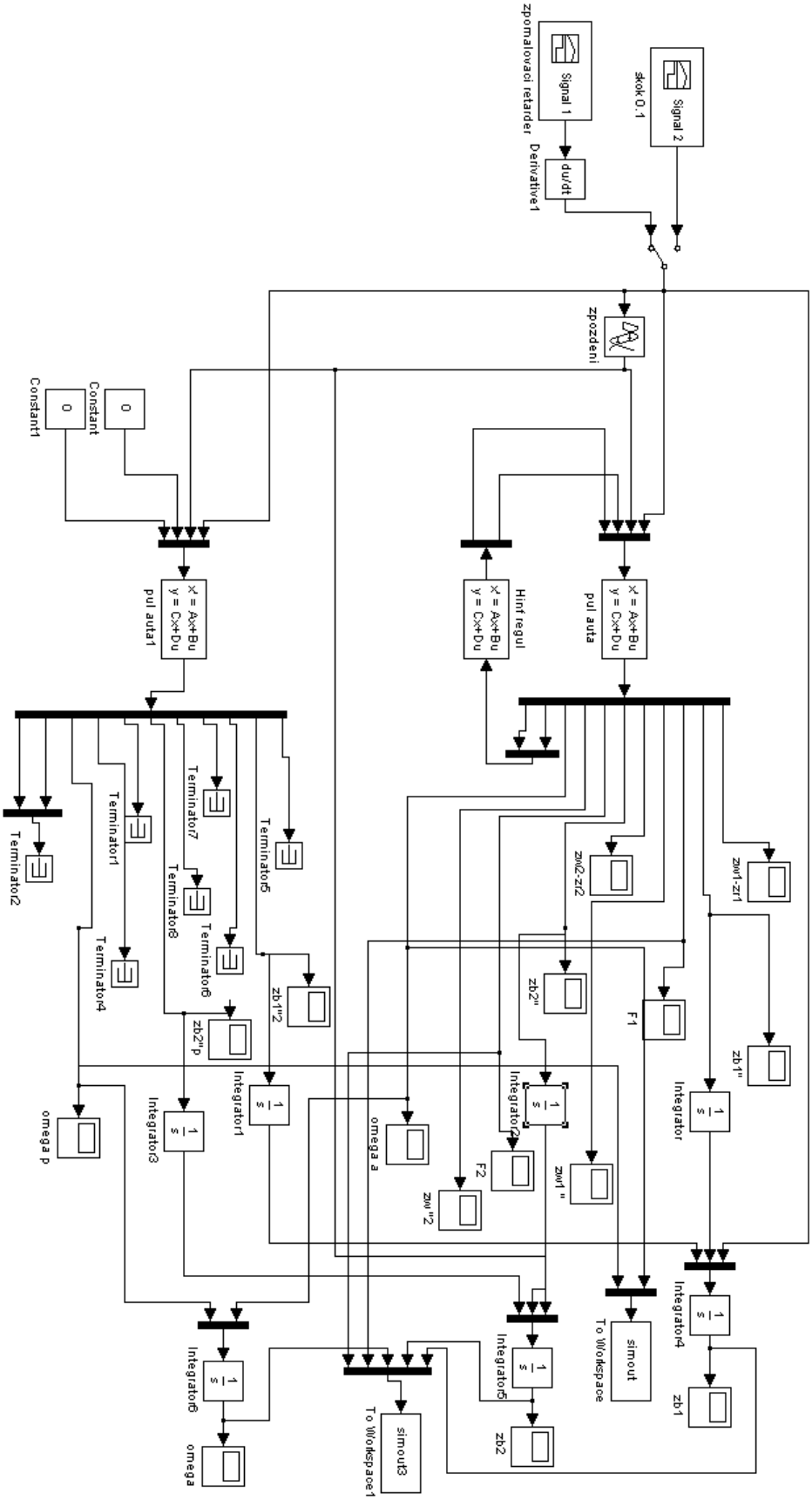
1. Matlab 7.1 (R14) Servis Pack 3, Simulink, LMI Control Toolbox
2. Microsoft Office Word 2003

Příloha A – simulinková schémata

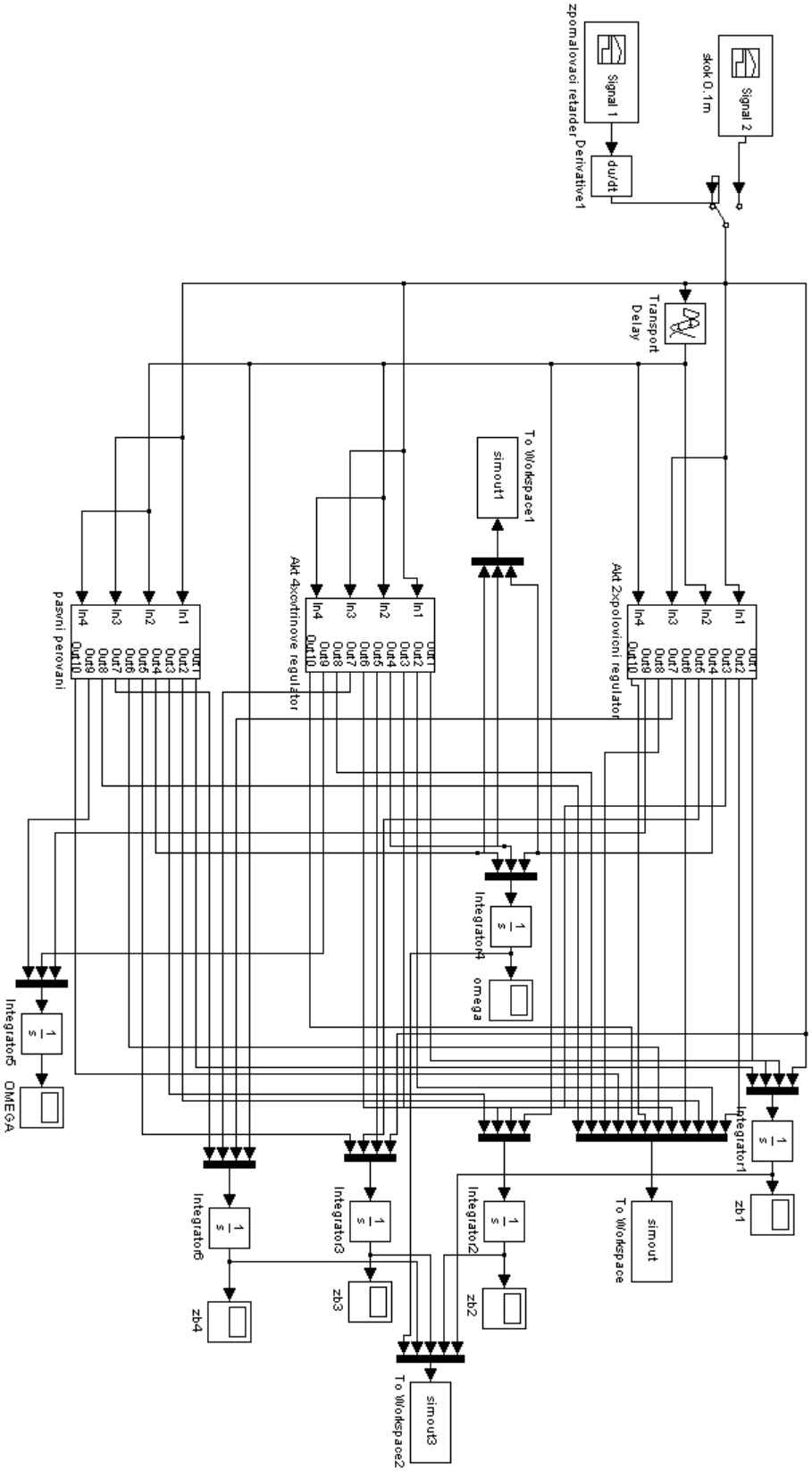
Simulinkové schéma srovnání aktivního a pasivního tlumení pérování u čtvrtinového modelu automobilu



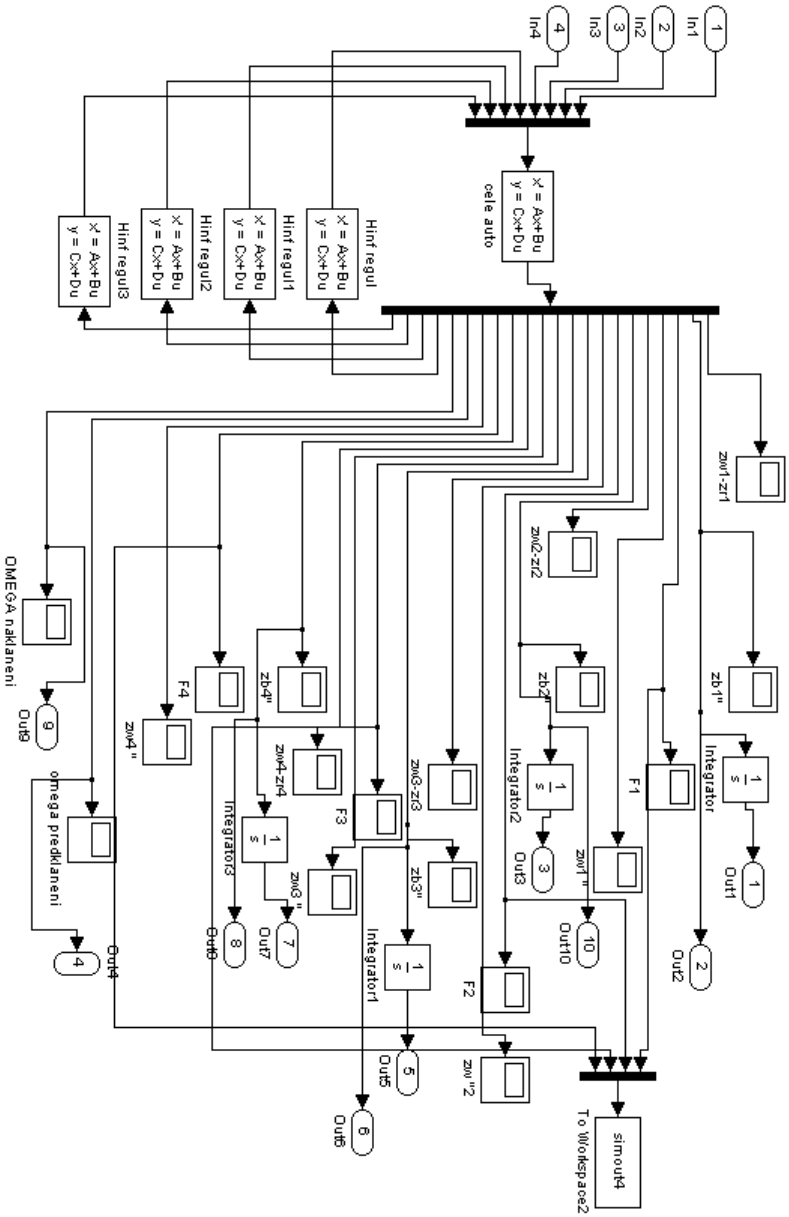
Simulinkové schéma srovnání aktivního a pasivního tlumení pérování u polovičního modelu automobilu



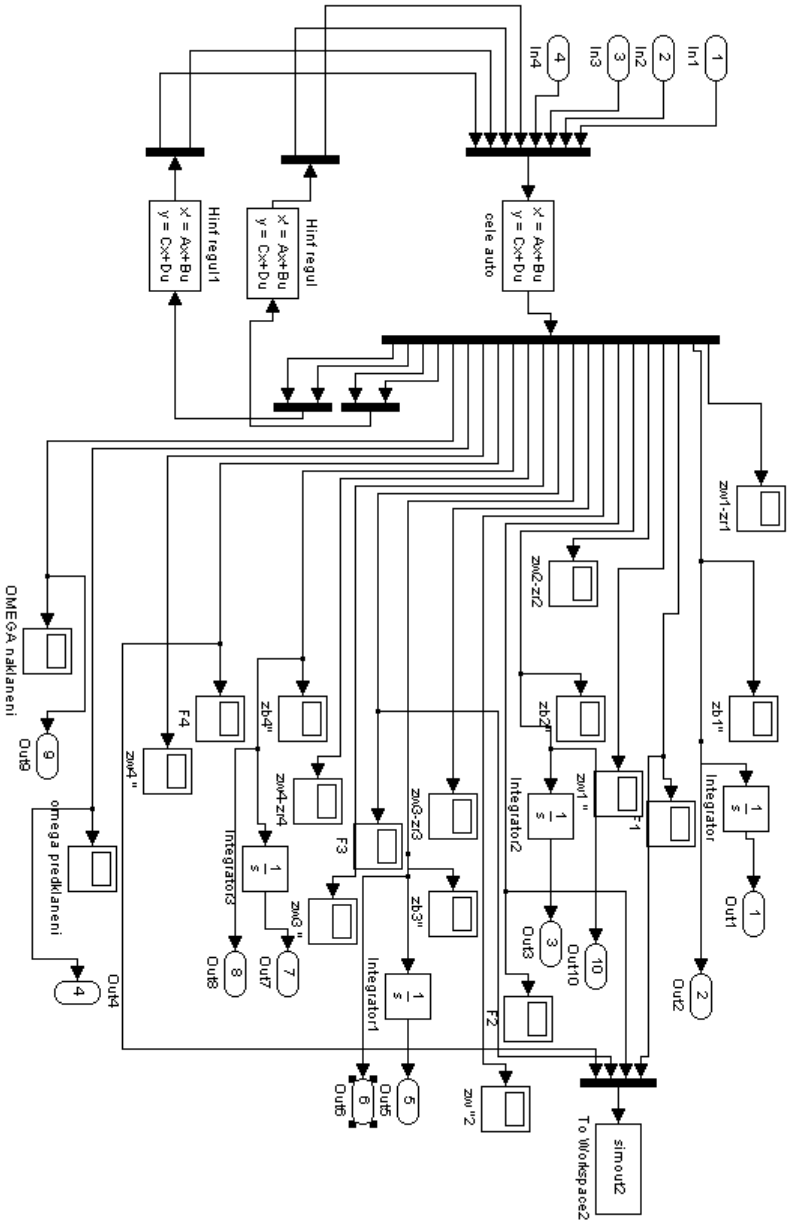
Simulinkové schéma srovnání dvou aktivních a jednoho pasivního tlumení pérování u úplného modelu automobilu



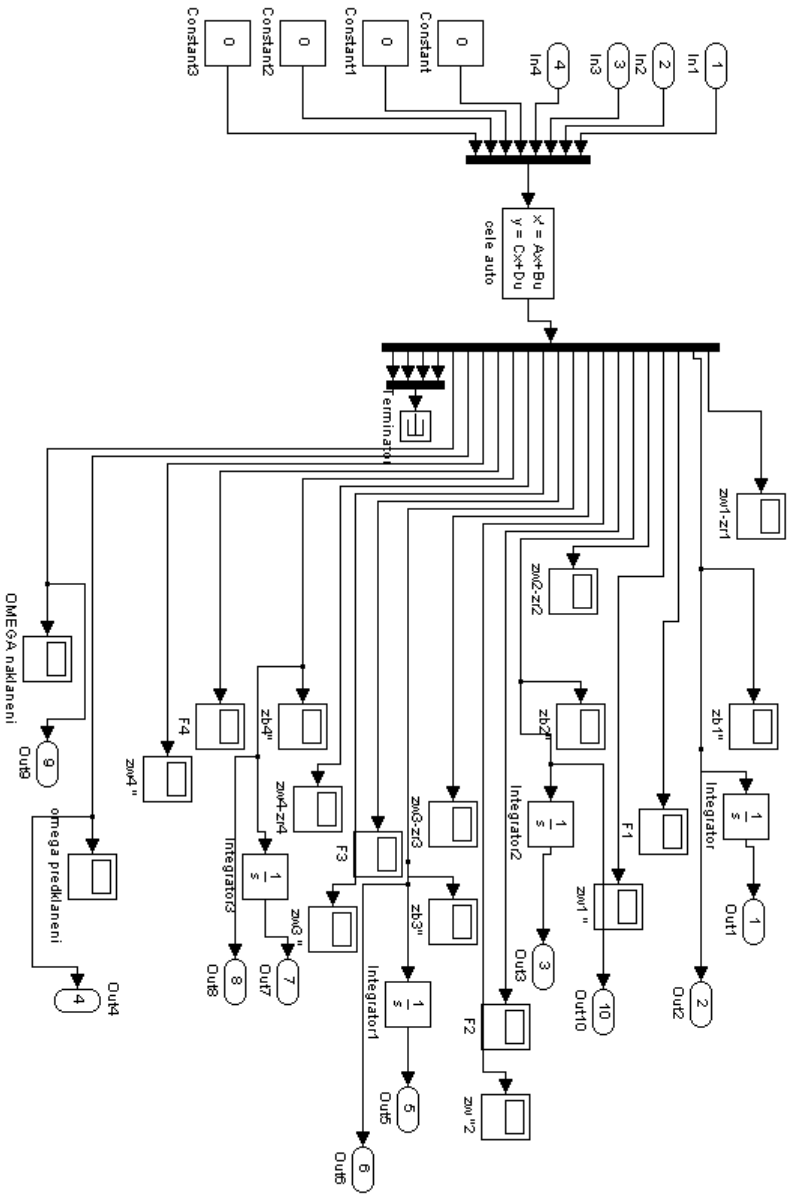
Simulinkové schéma řízení aktivního tlumení pérování u úplného modelu automobilu s využitím čtyř čtvrtinových H_∞ regulátorů



Simulinkové schéma řízení aktivního tlumení pérování u úplného modelu automobilu s využitím dvou polovičních H_∞ regulátorů



Simulinkové schéma pasivního tlumení pérování u úplného modelu automobilu



Příloha B – obsah přiloženého CD

Adresář Dokumenty:

- DP_Chaloupek_2009.pdf – diplomová práce v pdf formátu

Adresář M-file:

- cele_odez.m – vykreslení odezev na dva vstupní signály u úplného modelu automobilu
- cele_otoc_sys.m – Stavové matice otočeného úplného modelu automobilu podle kartézských souřadnic
- cele_sys.m – stavové matice úplného modelu automobilu
- ctvrt_Hinf.m – stavové matice, vážení a regulátor čtvrtinového modelu automobilu
- ctvrt_odez.m – vykreslení odezev na dva vstupní signály u čtvrtinového modelu automobilu
- kvalita.m – výpočet kvality regulace u čtvrtinového modelu
- kvalita2.m – výpočet kvality regulace u polovičního modelu
- kvalita_cele.m – výpočet kvality regulace u úplného modelu
- poloh_Hinf1.m – stavové matice, vážení a regulátor polovičního modelu automobilu
- poloh_Hinf2.m – stavové matice, vážení a regulátor otočeného polovičního modelu automobilu podle kartézských souřadnic
- polov_odez.m – vykreslení odezev na dva vstupní signály u polovičního modelu automobilu

Adresář Simulace:

- ctvrt.mdl – simulinkové schéma srovnání aktivního a pasivního tlumení pérování u čtvrtinového modelu automobilu
- polovina.mdl – simulinkové schéma srovnání aktivního a pasivního tlumení pérování u polovičního modelu automobilu
- srovnani1.mdl – simulinkové schéma srovnání aktivního a pasivního tlumení pérování u celého modelu automobilu s využitím čtyř čtvrtinových regulátorů a dvou polovičních regulátorů
- srovnani2.mdl – simulinkové schéma srovnání aktivního a pasivního tlumení pérování u otočeného celého modelu automobilu podle kartézských souřadnic s využitím čtyř čtvrtinových regulátorů a dvou polovičních regulátorů