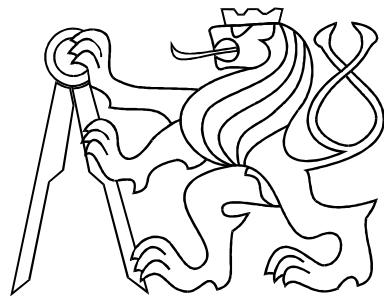


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Podpora výuky regulační techniky
v bakalářském studiu (model Vodárna)

Praha, 2006

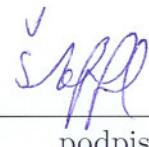
Libor Štefl

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou (bakalářskou) práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne

26.5.2006



podpis

Poděkování

Děkuji především vedoucímu mé bakalářské práce Ing. Jířímu Roubalovi za cenné připomínky, které pro mě byly velkým přínosem.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se skládá ze dvou částí. V první části jsem se v laboratoři K26 seznámil s modelem vodárny TQ. Tento model jsem následně identifikoval a na základě této identifikace jsem teoreticky navrhl dva PID regulátory. Funkčnost obou PID regulátorů jsem odzkoušel na reálném modelu vodárny. Ve druhé části jsem zpracoval kapitolu Frekvenční charakteristiky. Kapitola obsahuje řešené a neřešené příklady, které budou součástí knihy k výuce předmětů Systémy a modely a Systémy a řízení.

Abstract

This work is composed of two parts. In the first part I have acquainted myself with the model of TQ waterstation in the laboratory K26. Subsequently this model has been identified and following this identification there have been proposed theoretically two PID controllers. Functionality of both controllers has been tested on the real model of waterstation. In the second part I have prepared the chapter Frequency characteristics. This chapter includes solved and unsolved examples, which will be part of a textbook for teaching the subjects Systems and Models and Systems and Controlling.

Katedra řídicí techniky

Školní rok: 2005/2006

Zadání bakalářské práce

Student: Libor Šteffl

Obor: Kybernetika a měření

Název tématu: Podpora výuky regulační techniky v bakalářském studiu (model vodárna)

Zásady pro vypracování:

1. Připravte sadu řešených a neřešených příkladů, které budou součástí sbírky příkladů k výuce předmětu Systémy a modely a Systémy a řízení. Konkrétně k tématu frekvenční charakteristiky.
2. Seznamte se s modelem vodárny TQ V4 v laboratoři K26.
3. Provedte identifikaci tohoto modelu a ověřte její správnost.
4. Navrhněte regulátor pro tento systém a otestujte ho na reálném modelu.

Seznam odborné literatury: Dodá vedoucí práce

- Petr Horáček, Systémy a modely, Praha 2000
- Web SARI, <http://dce.felk.cvut.cz/sari/>
- Jan John, Systémy a řízení, Praha 1999

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Jiří Roubal

Datum zadání bakalářské práce: zimní semestr 2005/06

Termín odevzdání bakalářské práce: 30. 6. 2006

Prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry



v.z.
Prof. Ing. Zbyněk Škvor, CSc.
děkan

Obsah

1	Úvod	1
2	Vodárna TQ	3
2.1	Teoretický model vodárny	5
3	Identifikace vodárny	7
3.1	Statické převodní charakteristiky	7
3.2	Identifikace konstant k_p a k_v	9
3.2.1	Identifikace k_p a k_v z rovnovážných stavů	9
3.2.2	Nelineární model systému	10
3.2.3	Identifikace k_p a k_v z výtokových charakteristik	13
3.3	Linearizovaný model systému	15
3.4	Shrnutí identifikace	18
4	Regulace	19
4.1	Návrh PID regulátoru pomocí GMK	19
4.2	Návrh PID regulátoru pomocí frekvenčních metod	22
4.3	Srovnání navržených PID regulátorů	25
4.4	Korekce navržených PID regulátorů	26
4.4.1	Korekce PID regulátoru navrženého pomocí GMK	26
4.4.2	Korekce PID regulátoru navrženého pomocí frekvenčních metod .	28
4.5	Shrnutí regulace	29
5	Závěr	31
	Literatura	32

A Frekvenční charakteristiky	35
A.1 Frekvenční přenos a frekvenční charakteristiky	36
A.1.1 Bodeho frekvenční charakteristiky	37
A.1.2 Frekvenční charakteristika v komplexní rovině	44
A.1.3 Nicholsova frekvenční charakteristika	44
A.1.4 Míry na frekvenčních charakteristikách	44
A.2 Souvislost frekvenčního přenosu s přenosovou funkcí	45
A.3 Příklady	46
A.4 Úlohy	57

Kapitola 1

Úvod

V každém vědním oboru je velice důležité, získat co nejrychleji informace o zkoumaných objektech. Ne vždy je však účelem detailní rozbor. Často se jedná pouze o základní informace sloužící pro přiblížení dané problematiky.

V oblasti řízení je zvlášť důležitá prvotní představa o zkoumaných systémech. K tomuto účelu jsou vhodné například frekvenční charakteristiky, kde jednoduchým experimentem s harmonickým sinusovým signálem a zkoumaným systémem získáme základní představu o vlastnostech a chování daného systému.

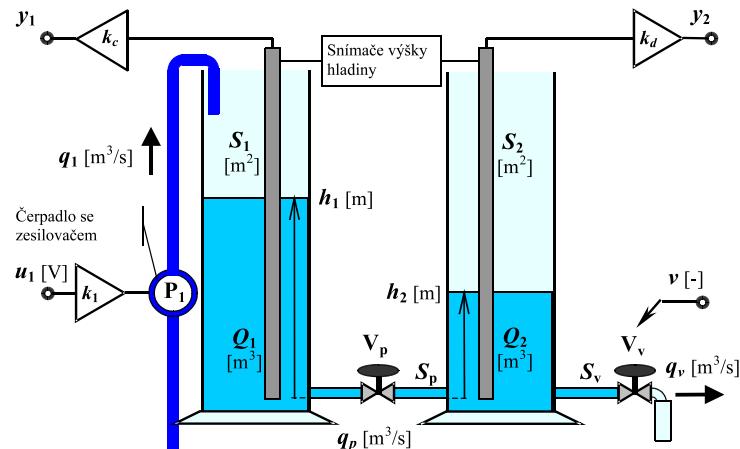
Součástí mé práce je kapitola pojednávající o frekvenčních charakteristikách. Tato část obsahuje teoretický výklad a řešené příklady, na kterých je aplikována teorie, vysvětlená v úvodu této přílohy. Pro procvičení dané problematiky jsou v závěru kapitoly uvedeny neřešené příklady, na kterých je možné si ověřit získané znalosti. Kapitola by se měla stát součástí knihy, která bude sloužit studentům studujícím předměty Systémy a modely a Systémy a řízení k lepšímu pochopení problematiky frekvenčních charakteristik.

Další část této bakalářské práce je zaměřena na model vodárny TQ v laboratoři K26. Cílem mé práce je seznámit se s tímto modelem vodárny TQ a provést jeho identifikaci. Na základě provedené identifikace poté navrhnout regulátor a odzkoušet ho na modelu Vodárny TQ.

Kapitola 2

Vodárna TQ

Fyzikální model vodárna TQ na obr. 2.1 představuje systém se dvěma nádržemi N_1 a N_2 pro řízení výšek hladin h_1 a h_2 při proměnném objemovém přítoku a odtoku kapaliny. Kapalina přitéká do nádrže N_1 a její množství je ovládáno čerpadlem, které je řízeno vstupním napětím u_1 . Z nádrže N_1 kapalina odtéká přepouštěcím ventilem V_p do nádrže N_2 . Odtud odtéká výtokovým ventilem V_v pryč ze systému.



Obrázek 2.1: Vodárna TQ – principiální schéma

Obě nádrže N_1 a N_2 mají konstantní průřez $S_1 = S_2$. Výšky obou hladin h_1 a h_2 jsou snímány ultrazvukovými snímači a převáděny na napěťové signály, které lze měřit po převedení A/D převodníkem RT Toolboxem Matlabu jako bezrozměrná čísla. Výšky hladin můžeme také odečítat přímo na fyzikálním modelu. Jak vidíme na fotografii reálného modelu Vodárny TQ na obr. 2.2, obě nádrže jsou opatřeny stupnicí. Můžeme tak na každé nádrži odečítat výšku hladiny přímo v centimetrech. Vstupem do systému je napětí u_1 [V]

v rozsahu $\langle 0; 10 \rangle$, které ovládá zesilovač k_1 motoru čerpadla, a $v [-]$ představující otevření výtokového ventilu V_v . Napětí u_1 nastavujeme zadáním bezrozměrného čísla pomocí RT Toolboxu Matlabu, které je převedeno D/A převodníkem a přivedeno na zesilovač k_1 motoru čerpadla. Výstupem ze systému je výška hladin h_1 a h_2 v nádržích N_1 respektive N_2 .



Obrázek 2.2: Vodárna TQ – fotografie systému

Pro základní popis systému můžeme zanedbat vlastní dynamiku čerpadla s ohledem na pomalou dynamiku celého systému, která je řádově v minutách, a jeho mrtvé pásmo v počátku. Dále budeme předpokládat, že se čerpadlo chová jako zdroj objemového průtoku $q_1 = k_1 u_1$ [m^3/s]. Nemusíme tedy uvažovat odpor přívodního potrubí a ani protitlak sloupce kapaliny.

Čerpadlo přivádí do prvního válce objemový přítok q_1 [m^3/s], čímž zvětšuje objem kapaliny Q_1 [m^3] v tomto válci. Zároveň zvyšuje výšku hladiny h_1 . Množství kapaliny q_p [m^3/s] přitékající z první nádrže N_1 přepouštěcím ventilem V_p do druhé nádrže N_2 za jednotku času, závisí na rozdílu výšek hladin, který určuje ideální rychlosť v_p [m/s] toku kapaliny mezi nádržemi, ploše ventilu S [m^2], viskozitě kapaliny η (zde vody) a tvarovém koeficientu ventilu σ_p . Součin všech těchto činitelů dá výsledný koeficient ventilu k_p , který lze určit experimentálně. Druhá nádrž má přítok z první nádrže, odtok q_v [m^3/s] je přes ventil V_v . Odtok lze opět fyzikálně popsat jako volný výtok z otevřené nádoby a experimentálně jej vyjádřit výsledným koeficientem k_v .

Pokud bude vstupní napětí zesilovače čerpadla konstantní a na model vodárny nebudou působit žádné další vlivy (poruchy), dojde po odeznění přechodových dějů k uvedení systému do rovnovážného stavu – pracovního bodu. V daném pracovním bodě se výšky hladin v obou nádržích nemění. Přítok do první nádrže je rovný odtoku z první nádrže, který se rovná přítoku do druhé nádrže. Přítok druhé nádrže se také rovná odtoku z druhé nádrže.

Informace související s popisem modelu vodárny jsem převzal ze zadání laboratorní úlohy vodárna TQ z předmětu X35SRI (FUKA, J. et al., [\(http://dce.felk.cvut.cz/sari/\)](http://dce.felk.cvut.cz/sari/)).

2.1 Teoretický model vodárny

Na základě teoretického popisu můžeme odvodit matematický model systému. Budeme uvažovat vstupní vektor $\mathbf{u} = [u_1 \quad v]^T$, výstupní vektor $\mathbf{y} = [h_1 \quad h_2]^T$ a stavový vektor $\mathbf{x} = [h_1 \quad h_2]^T$. Model systému odvodíme ve fyzikálních jednotkách.

Pro objemové toky $q_1(t)$ [m^3/s], $q_p(t)$ [m^3/s] a $q_v(t)$ [m^3/s] podle (NOSKIEVIČ, P., 1999, str. 66) platí

$$\begin{aligned} q_1(t) &= k_{10}u_1(t), \\ q_p(t) &= k_{p0}\sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \quad \text{pro } h_1(t) > h_2(t), \\ q_v(t) &= k_{v0}v(t)\sqrt{h_2(t)}, \end{aligned}$$

kde k_{10} [m^3/Vs] je konstanta čerpadla $u_1(t)$ [V]. Význam konstant k_{p0} [$\text{m}^{2.5}/\text{s}$] a k_{v0} [$\text{m}^{2.5}/\text{s}$] je stejný jako význam konstant k_p a k_v , které byly popsány výše. Zde jsou jen označeny jinými indexy, aby při odvozování modelu systému byly dodrženy správné jednotky. Vstup $v(t)$ [-] představuje otevření ventilu V_v . Pro hladiny $h_1(t)$ a $h_2(t)$ odečítané na výstupu systému platí

$$\begin{aligned} h_1(t) &= k_c h_1(t), \\ h_2(t) &= k_d h_2(t). \end{aligned}$$

Pomocí konstant k_c [cm] a k_d [cm] přepočítáváme bezrozměrné výšky hladin $h_1(t)$ a $h_2(t)$ odečtené ze snímačů jednotlivých válců na výšky hladin v centimetrech.

Abychom mohli odvodit matematický model, musíme si nejprve vyjádřit změnu ob-

jemu v [m³/s] pro každý válec

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V_1(t)}{\Delta t} &= q_1(t) - q_p(t), \\ \frac{\Delta V_2(t)}{\Delta t} &= q_p(t) - q_v(t).\end{aligned}$$

Pokud se bude $\Delta t \rightarrow 0$ můžeme tyto rovnice přepsat na diferenciální. Dosadíme-li za objemové toky q_1 , q_p a q_v , tak pro matematický model platí

$$\dot{h}_1(t) = -k_p\sqrt{h_1(t) - h_2(t)} + k_1 u_1(t), \quad (2.1)$$

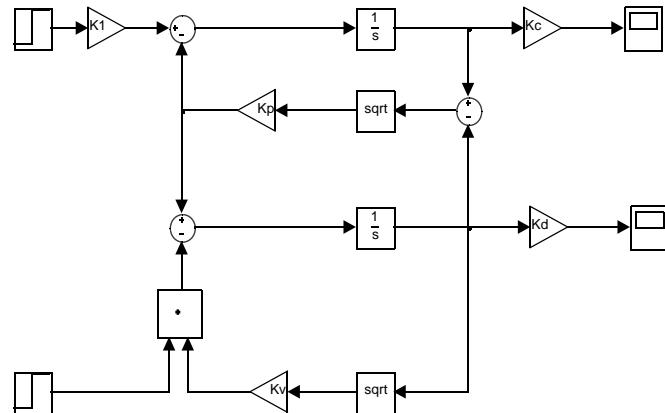
$$\dot{h}_2(t) = k_p\sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - k_v v(t)\sqrt{h_2(t)}, \quad (2.2)$$

$$y_1(t) = k_c h_1(t), \quad (2.3)$$

$$y_2(t) = k_d h_2(t), \quad (2.4)$$

kde k_1 [m/Vs] je konstanta čerpadla $u_1(t)$ [V]. Význam konstant k_p [m^{0,5}/s] a k_v [m^{0,5}/s] byl popsán výše. Podrobnější odvození lze nalézt v (NOSKIEVIČ, P., 1999).

Takto odvozený teoretický model můžeme realizovat například pomocí Matlabu v Simulinku, viz obr. 2.3. Po určení konstant k_1 , k_p a k_v si na tomto nelineárním modelu můžeme ověřit správnost určených konstant a skutečnost, zda náš model odpovídá realitě.



Obrázek 2.3: Simulinkové schéma nelineárního modelu vodárny

Dále již budeme s konstantami k_1 , k_c , k_d , k_p a k_v , které jsme zde odvodili, pracovat ve strojových jednotkách RT Toolboxu Matlabu a tím pádem výše odvozené konstanty ztratí svoje fyzikální rozměry, a proto je již nebudu uvádět.

Kapitola 3

Identifikace vodárny

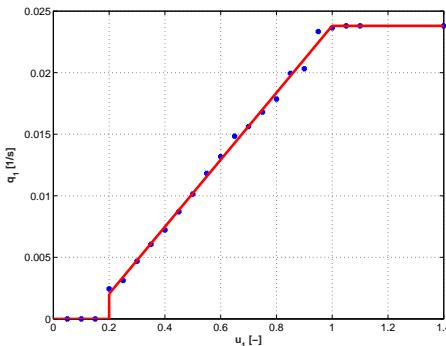
V této kapitole změříme převodní charakteristiku čerpadla $u_1 \rightarrow q_1$, ze které určíme konstantu čerpadla k_1 . Poté změříme převodní charakteristiky snímačů hladin h_1 a h_2 ze kterých určíme konstanty k_c a k_d . Dále určíme konstanty k_p a k_v . Identifikováním všech výše zmíněných konstant budeme moci ověřit správnost provedené identifikace na ne-lineárním modelu vodárny. Linearizací nelineárního modelu získáme model lineární, na kterém budeme moci porovnat chování reálného systému v okolí rovnovážného bodu.

3.1 Statické převodní charakteristiky

Pro sestrojení statické převodní charakteristiky čerpadla potřebujeme změřit, jak závisí množství přítékající kapaliny na vstupním napětí čerpadla, které ovládáme pomocí bezrozměrného čísla RT Toolboxu Matlabu. Množství přítékající kapaliny můžeme například určit jako poměr změny hladiny za určitou časovou jednotku, například 5 s. Abychom se vyhnuli nepřesnostem způsobených rozbehem čerpadla, budeme odečítat změnu hladiny ve zvoleném intervalu 5 s nejdříve po uplynutí 15 s měření, tedy až bude kapalina přitékat rovnoměrně.

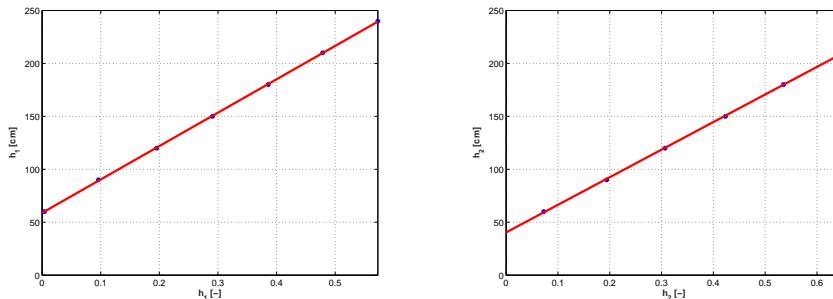
Změřená převodní charakteristika čerpadla je na obr. 3.1. Na převodní charakteristice vidíme, že čerpadlo můžeme ovládat pomocí RT Toolboxu Matlabu v rozmezí $\langle 0,2; 1 \rangle$, a že čerpadlo má v intervalu $\langle 0; 0,2 \rangle$ mrtvé pásmo. Dále můžeme určit pro lineární oblast konstantu čerpadla k_1 , která odpovídá směrnici vnesené závislosti. Tedy

$$k_1 = 0,0272.$$



Obrázek 3.1: Statická převodní charakteristika čerpadla

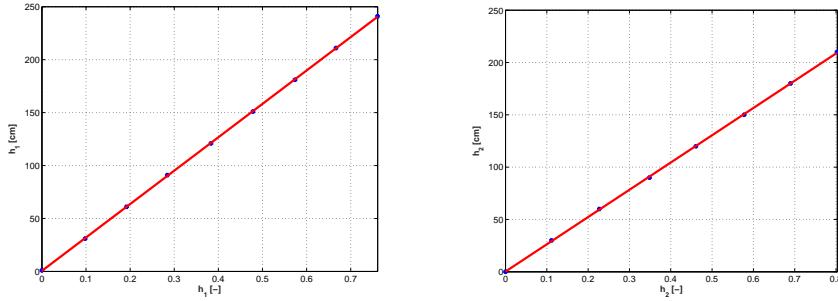
Kalibraci snímačů provedeme tak, že si změříme závislost bezrozměrné výšky hladiny odečtené pomocí snímačů na výše hladiny odečtené přímo na stupnici každé nádrže v centimetrech. Centimetrová stupnice na obou válcích má rozsah $\langle 0; 240 \rangle$ cm. Měření jsem provedl pro 8 hodnot. Ze sestrojených převodních charakteristik na obr. 3.2 vidíme, že oba snímače mají nenulové hladiny pro nulové hodnoty odečtené pomocí snímačů. Tyto nenulové hodnoty přičteme při každém měření k odečteným hodnotám. Přepočítané převodní charakteristiky, kde si nulové hladiny a odečtené nulové hodnoty ze snímačů odpovídají, jsou na obr. 3.3.

Obrázek 3.2: Převodní charakteristiky snímačů výšek hladin h_1 a h_2

Z převodních charakteristik můžeme určit konstanty snímačů k_c a k_d pro hladiny h_1 a h_2 . Dostáváme

$$k_c = 315,41,$$

$$k_d = 260,51.$$



Obrázek 3.3: Kalibrované převodní charakteristiky snímačů výšek hladin h_1 a h_2

3.2 Identifikace konstant k_p a k_v

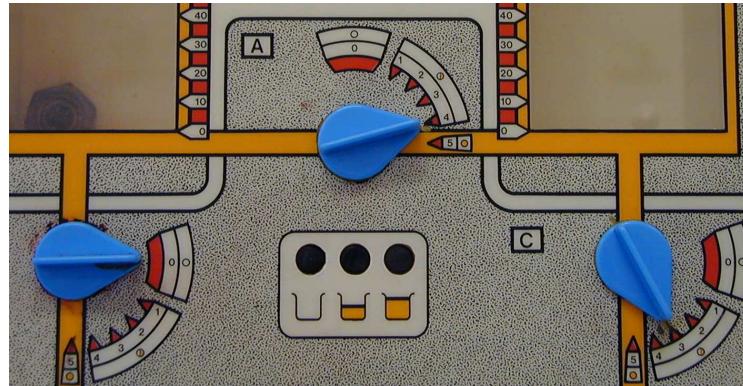
Konstanty k_p a k_v určíme experimentálně. Konstanty můžeme identifikovat dvěma způsoby měření. První možnost je změřit si několik rovnovážných stavů. Druhá možnost, která je výrazně rychlejší, spočívá ve změření výtokových charakteristik. Pro oba způsoby pak konstanty spočítáme dosazením do rovnic (2.1) a (2.2).

3.2.1 Identifikace k_p a k_v z rovnovážných stavů

Nejprve nalezneme vhodné nastavení přepouštěcích ventilů V_p , V_v a řídicího napětí u_1 tak, aby se hladiny h_1 a h_2 ustálily v rovnovážné poloze, tedy v pracovním bodě. Aby bylo možné dobře regulovat výšku hladiny h_2 , tak hladina h_1 v první nádrži by neměla přesáhnout $2/3$ celkové výšky válce, a hladina h_2 v druhém válci by neměla klesnout pod $1/5$ celkové výšky válce, viz návod (FUKA, J. et al., [\(http://dce.felk.cvut.cz/sari/\)](http://dce.felk.cvut.cz/sari/)). Z pracovního bodu provedeme po ustálení výšek hladin h_1 a h_2 skok zvýšením řídicího napětí u_1 o 5% . Opět počkáme, dokud se hladiny neustálí a poté provedeme skok zvýšením o dalších 5% . Při měření posledního skoku snížíme řídicí napětí o 5% .

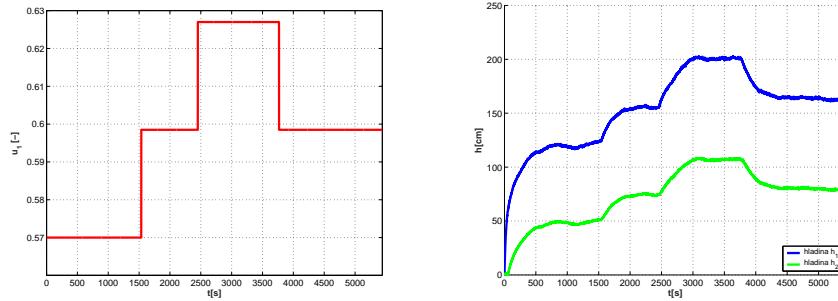
Tímto získáme čtyři rovnovážné stavy, ze kterých podle rovnic (2.1) a (2.2) vypočítáme pro každý rovnovážný stav hodnotu konstant k_{p_i} a k_{v_i} , ze kterých pro určení výsledných konstant k_p a k_v vypočítáme jejich průměr.

Abychom dosáhli rovnovážné polohy, byl pracovní bod zvolen následovně. Řídicí napětí $u_1 = 0,57$ a ventily V_p a V_v byly nastaveny na hodnotu 4 respektive 3, jak ukazuje obr. 3.4.



Obrázek 3.4: Vodárna TQ – detail systému

Výše popsané změřené průběhy jsou na obr. 3.5.

Obrázek 3.5: Vstupní signál a naměřené průběhy hladin h_1 a h_2

Konstanty byly určeny takto

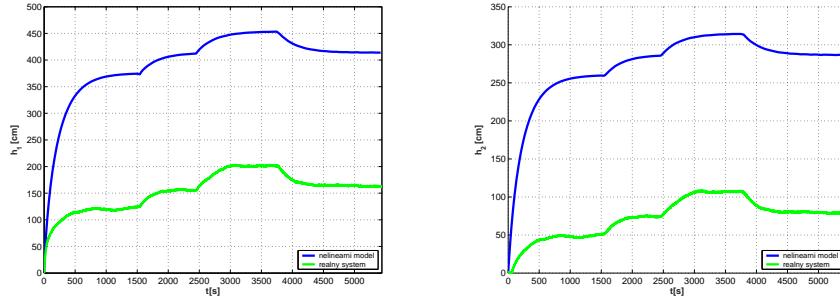
$$k_p = 0,0355,$$

$$k_v = 0,0156.$$

3.2.2 Nelineární model systému

Nyní již známe všechny potřebné konstanty k_1 , k_c , k_d , k_p a k_v , abychom mohli porovnat simulaci na nelineárním modelu s reálným systémem.

Pokud dosadíme všechny určené konstanty do nelineárního modelu na obr. 2.3, tak můžeme odsimulovat chování nelineárního modelu a porovnat ho s naměřenými průběhy hladin z obr. 3.5. Ze srovnání na obr. 3.6 vidíme, že naměřená data se se simulovanými neshodují. Experimentálně bylo zjištěno, že příčinou je, že otvor pro výtok z druhé nádrže N_2



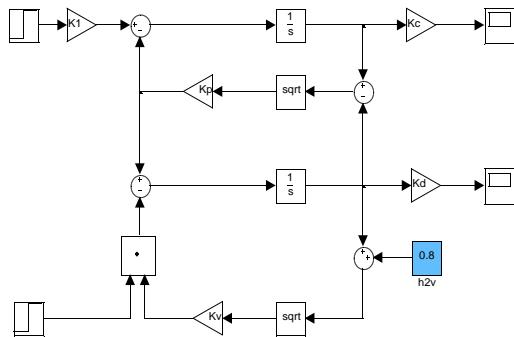
Obrázek 3.6: Srovnání naměřených průběhů hladin s nelineárním modelem v Simulinku pro vstup na obr. 3.5

je příliš malý a dochází k jeho zahlcení. Z tohoto důvodu se tento ventil V_v chová jako „zdroj odtoku“. Tedy, že z druhého válce odsává více kapaliny než by odpovídalo členu $\sqrt{h_2(t)}$ ve stavové rovnici (2.2).

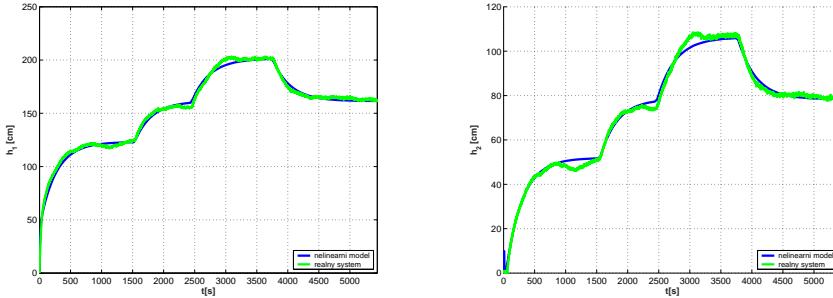
Z tohoto důvodu přidáme do stavové rovnice (2.2) konstantu h_{2v} , která bude představovat „zdroj odtoku“. Systém tedy bude mít jakoby vyšší hladinu, která bude kompenzovat to, že se z druhého válce odsává více kapaliny než se předpokládalo v původním modelu systému. Hodnota byla experimentálně stanovena na $h_{2v} = 0,8$. Stavová rovnice (2.2) bude mít proto tvar

$$\dot{h}_2(t) = k_p \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - k_v \eta \sqrt{h_2(t) + h_{2v}}.$$

Protože se změnila rovnice reprezentující model systému, musíme zároveň upravit simulinkové schéma na obr. 2.3 představující nelineární model systému. Upravené schéma ukazuje obr. 3.7. Po této korekci si již simulované a naměřené průběhy hladin odpovídají. Srovnání ukazuje obr. 3.8

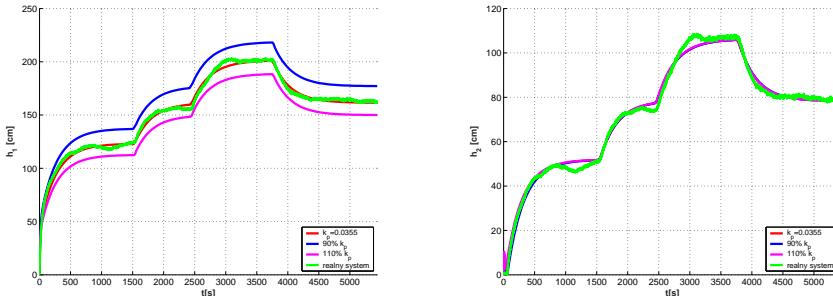


Obrázek 3.7: Opravené simulinkové schéma nelineárního modelu

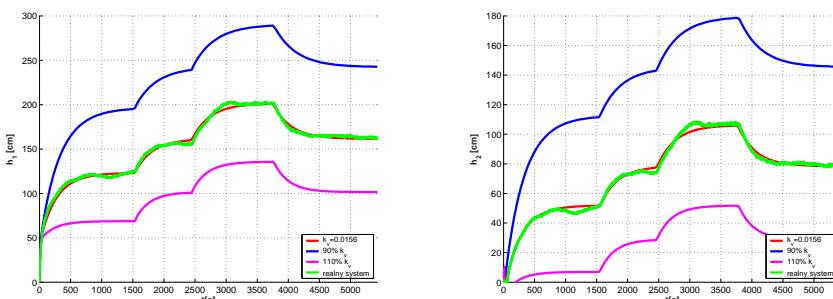


Obrázek 3.8: Srovnání naměřených průběhů hladin s nelineárním modelem v Simulinku pro vstup na obr. 3.5

Na obr. 3.9 a obr. 3.10 se můžeme ještě podívat, jaký vliv má změna konstanty k_p respektive k_v , které jsme identifikovali z naměřených rovnovážných stavů, na nelineární model systému. Z těchto srovnání je patrné, že přesnost nelineárního modelu závisí na přesném určení konstant k_p a k_v pro konkrétní nastavení ventilů.



Obrázek 3.9: Vliv konstanty k_p na nelineární model systému



Obrázek 3.10: Vliv konstanty k_v na nelineární model systému

3.2.3 Identifikace k_p a k_v z výtokových charakteristik

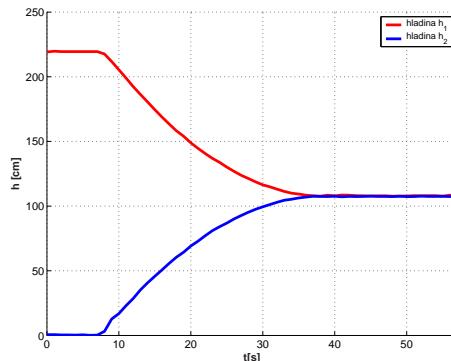
Konstanty určíme pro porovnání i druhým zmíněným způsobem. Z teoretického popisu systému vyplývá, že pro různé nastavení ventilů V_p a V_v se budou konstanty k_p a k_v lišit. Zvolíme-li stejné nastavení ventilů jako v předchozím případě, budeme moci identifikované konstanty k_p a k_v porovnat s výsledky z určení těchto konstant pomocí prvního způsobu. Ventil V_p tedy nastavíme na hodnotu 4 a ventil V_v na hodnotu 3.

Měření výtokových charakteristik provedeme následovně. Pro identifikaci konstanty k_p nejprve vyprázdníme nádrž N_2 , napustíme nádrž N_1 , vypneme čerpadlo a uzavřeme oba ventily V_p a V_v . Poté nastavíme ventil V_p do požadované polohy a budeme měřit průběh výšek hladin h_1 a h_2 . Z naměřeného průběhu na obr. 3.11 a z rovnice (2.1) můžeme určit konstantu k_p . Protože v tomto případě je přítok do nádrže N_1 nulový, platí

$$k_p = \frac{\dot{h}_1(t)}{\sqrt{h_1(t) - h_2(t)}}. \quad (3.1)$$

Pokud do této rovnice (3.1) dosadíme hodnoty z naměřeného průběhu na obr. 3.11, dostaneme

$$k_p = 0,0322.$$



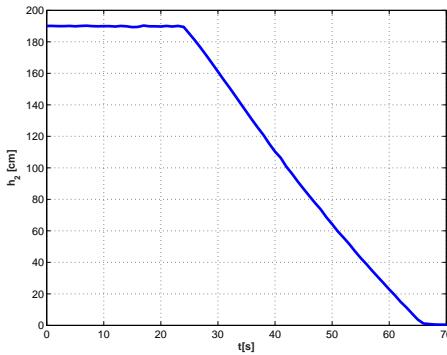
Obrázek 3.11: Změřené výtokové charakteristiky pro určení konstanty k_p

Pro identifikaci konstanty k_v napustíme nádrž N_2 a opět uzavřeme oba ventily V_p a V_v . Poté nastavíme ventil V_v do požadované polohy a budeme měřit průběh výšky hladiny h_2 . Změřený průběh je na obr. 3.12. Z naměřeného průběhu na obr. 3.12 a z rovnice (2.2) můžeme určit konstantu k_v . Protože přítok do nádrže N_2 je nulový platí pro konstantu k_v rovnice

$$k_v = \frac{\dot{h}_2(t)}{\sqrt{h_1(t) + 0,8}}. \quad (3.2)$$

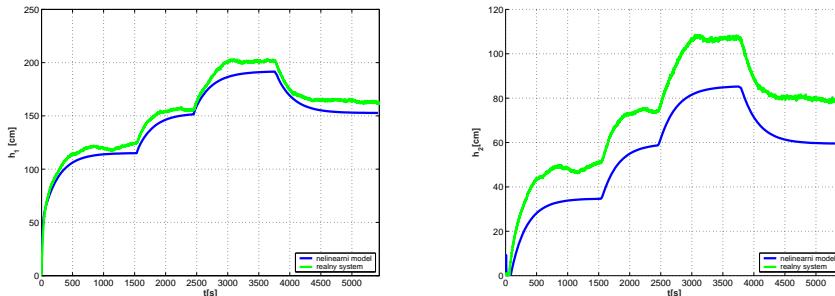
Po dosazení do této rovnice (3.2) dostáváme

$$k_v = 0,0161.$$



Obrázek 3.12: Změřená výtoková charakteristika pro určení konstanty k_v

Srovnání simulace na nelineárním modelu s naměřenými průběhy pro nově získané konstanty k_p a k_v je na obr. 3.13. Bylo ověřeno, že výtokové charakteristiky odsimulované pomocí nelineárního modelu pro zde vypočítané hodnoty konstant k_p a k_v odpovídají reálným naměřeným výtokovým charakteristikám.



Obrázek 3.13: Srovnání naměřených průběhů hladin s nelineárním modelem v Simulinku pro vstup na obr. 3.5

Srovnáme-li konstanty k_p a k_v , které jsme identifikovali pomocí rovnovážných stavů a pomocí výtokových charakteristik, zjistíme, že se nepatrně liší. Z obr. 3.9 a obr. 3.10 vidíme, že i drobné nepřesnosti v určení konstant mohou způsobit veliké nepřesnosti mezi simulovanými a měřenými průběhy. Pokud srovnáme obr. 3.8 a obr. 3.13, tak vidíme, že nelineární model pro konstanty určené pomocí rovnovážných stavů je přesnější a téměř odpovídá realitě. Proto budeme dále používat konstanty k_p a k_v , které jsme změřily z rovnovážných stavů. Druhý způsob měření pomocí výtokových charakteristik je sice podstatně rychlejší, ale vzhledem k rychlému výtoku kapaliny z nádrže nelze ventil nastavit

s dostatečnou rychlosí do žádané polohy. Proto je pravděpodobné, že konstanty k_p a k_v budou identifikovány s chybou, která se negativně projeví na modelu vodárny. Například pokud bychom měřily výtokové charakteristiky pro konstantu k_v pro nastavení ventilu na hodnotu 2, dostali bychom $k_v = 0,007$. Pro hodnotu 3 jsme spočítali 0,0161 a pro hodnotu 4 bychom dostali $k_v = 0,0256$. Odtud je patrné, že konstanty závisí na nastavení ventilu velmi citlivě. Protože změna ventilu o hodnotu 1, způsobí změnu k_v o celých 100%.

3.3 Linearizovaný model systému

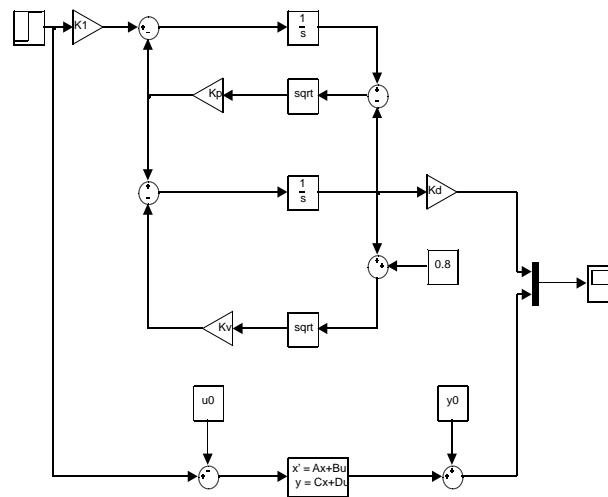
Z nelineárního matematického modelu v části 2.1 můžeme linearizací určit model linearizovaný v nějakém rovnovážném bodě u_{10} , h_{10} , h_{20} a v_0 z části 3.2.1. Dále již nebudeme uvažovat v jako vstup, neboť otevření ventilu bude po celou dobu konstantní. Ventil V_v bude konstantně otevřen na hodnotu 3. Dané nastavení, jak bude ventil V_v otevřen, bude zahrnuto v konstantě k_v . Obecný linearizovaný stavový popis je

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x} &= \begin{pmatrix} -\frac{k_p}{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}} & \frac{k_p}{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}} \\ \frac{k_p}{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}} & -\frac{k_p}{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}} - \frac{k_v v}{2\sqrt{h_{20}+h_{2v}}} \end{pmatrix} \Delta x(t) + \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta u(t), \\ \Delta y(t) &= \begin{pmatrix} 0 & k_d \end{pmatrix} \Delta x(t) + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \Delta u(t)\end{aligned}\quad (3.3)$$

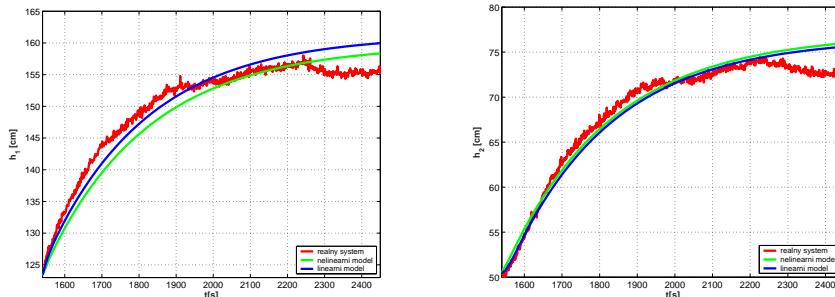
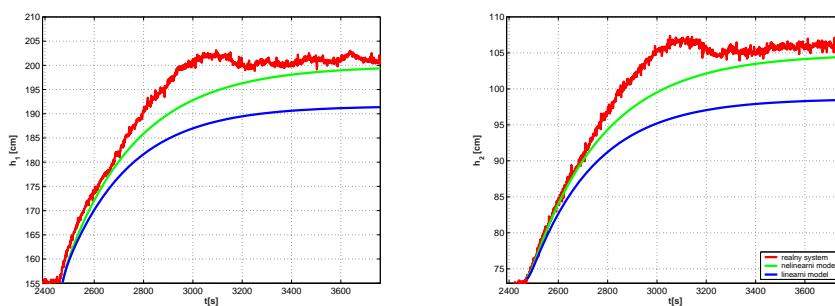
kde

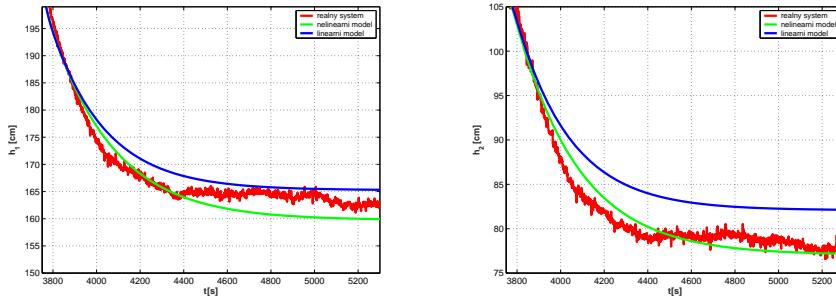
$$\Delta x(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) - h_{10} \\ h_2(t) - h_{20} \end{pmatrix}, \quad \Delta u_1(t) = u_1(t) - u_{10}.$$

Tento lineární model můžeme opět realizovat například pomocí Simulinku v Matlabu. Na obr. 3.14 je zobrazen nelineární model a lineární model pomocí stavových matic. Pro ověření správnosti můžeme porovnat simulaci lineárního modelu s nelineárním modelem na obr. 3.7, který pomocí počátečních podmínek integrátorů a vstupního skoku napětí nastavíme do zvoleného pracovního bodu, a s odpovídajícími naměřenými průběhy hladin ze zvoleného pracovního bodu.



Obrázek 3.14: Simulinkové schéma nelineárního a lineárního modelu

Obrázek 3.15: Odezva nelineárního modelu, lineárního modelu a naměřených průběhů hladin pro pracovní bod $u_{10}=0,57$, $h_{10}=122$ cm a $h_{20}=50$ cm na skok napětí o 5%Obrázek 3.16: Pracovní bod $u_{10}=0,5985$, $h_{10}=155$ cm, $h_{20}=73$ cm a skok napětí o 5%



Obrázek 3.17: Pracovní bod $u_{10} = 0,627$, $h_{10} = 199$ cm, $h_{20} = 105$ cm a skok napětí o -5%

Srovnání provedeme pro všechny tři naměřené pracovní body z kapitoly 3.2.1. Výsledky můžeme porovnat na obr. 3.15, obr. 3.16 a na obr. 3.17. V závěru této části ještě určíme přenos mezi napětím čerpadla a výškou hladiny h_2 ve druhé nádrži N_2 . Přenosová funkce $G(s)$ je definována jako

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C}\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} + \mathbf{D}, \\ G(s) &= \frac{\frac{k_d k_p k_1}{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}}}{s^2 + \left(\frac{k_p}{\sqrt{h_{10}-h_{20}}} + \frac{k_v}{2\sqrt{h_{20}}}\right)s + \frac{k_v k_p}{4\sqrt{h_{20}(h_{10}-h_{20})+(h_{20}+h_{2v})}}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Po dosazení do (3.4) získáme hledaný přenos mezi napětím čerpadla a výškou hladiny h_2 ve druhé nádrži N_2 . Dosadíme-li pracovní bod $u_{10} = 0,57$, $h_{10} = 122$ cm a $h_{20} = 50$ cm dostaneme

$$G_1(s) = \frac{908}{3216s^2 + 281s + 1}. \quad (3.5)$$

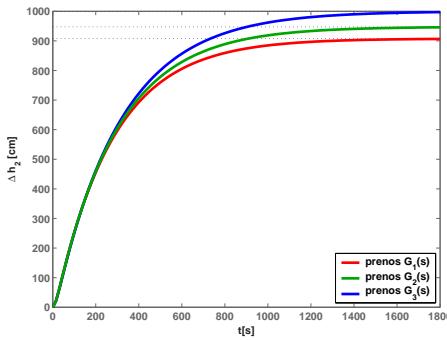
Pro pracovní bod $u_{10} = 0,5985$, $h_{10} = 155$ cm a $h_{20} = 73$ cm dostaneme

$$G_2(s) = \frac{947}{3449s^2 + 295s + 1}. \quad (3.6)$$

A pro pracovní bod $u_{10} = 0,627$, $h_{10} = 199$ cm a $h_{20} = 105$ cm dostaneme

$$G_3(s) = \frac{1000}{3818s^2 + 315s + 1}. \quad (3.7)$$

Všechny tyto přenosy jsou vykresleny na obr. 3.18



Obrázek 3.18: Porovnání přechodových charakteristik přenosů $G_1(s)$, $G_2(s)$ a $G_3(s)$

Skutečnost, že si jednotlivé přenosy neodpovídají, je způsobena tím, že systém vodárny TQ je nelineární. Pro regulaci budeme používat pracovní bod $u_{10} = 0,57$, $h_{10} = 122$ cm, $h_{20} = 50$ cm a přenos $G_1(s)$, který jsme z tohoto pracovního bodu identifikovali, viz (3.5).

3.4 Shrnutí identifikace

Lze říci, že identifikace systému vodárna TQ je v pořádku, a že modely odpovídají reálnému systému. O správnosti identifikace svědčí zejména obr. 3.8 a obr. 3.15. Model jsem identifikoval jako systém druhého řádu. Nejobtížnější bylo nalézt vhodné nastavení ventilů a řídícího napětí tak, aby se systém dostal do pracovního bodu. Z nelineárního modelu jsem odvodil model lineární a identifikoval přenos mezi vstupním napětím u_0 a výstupní výškou hladiny h_2 . Pro další část, která se zabývá regulací, budu vycházet pouze z tohoto pracovního bodu

$$u_{10} = 0,5985, \quad h_{10} = 122 \text{ cm} \text{ a } h_{20} = 50 \text{ cm},$$

kterému odpovídá přenos (3.5). Tento přenos ale vydělím konstantou k_d , abych mohl navrhovat regulátory v bezrozměrných jednotkách RT Toolboxu Matlabu. V následující kapitole, která se zabývá regulací, budu tedy vycházet z tohoto přenosu

$$G(s) = \frac{3,5}{3216s^2 + 281s + 1}. \quad (3.8)$$

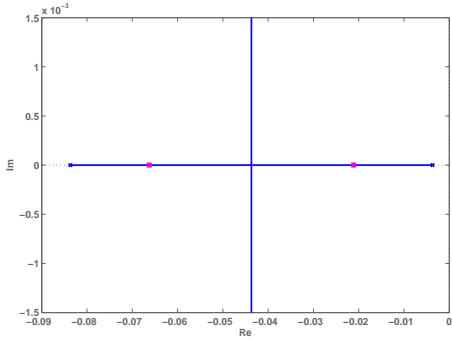
Kapitola 4

Regulace

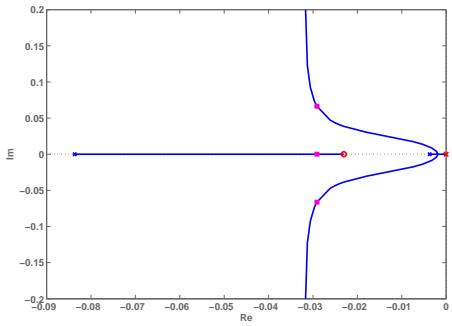
V této části navrhnu regulátor na model vodárny TQ. Při regulaci se na model díváme jako na systém s jedním vstupem u_1 a jedním výstupem h_2 . Vzhledem ke kombinaci výhod regulátorů typu PI a PD, jsem se rozhodl pro návrh PID regulátoru. K návrhu použiji metodu geometrického místa kořenů (GMK) a frekvenční metody. Model vodárny TQ budeme reprezentovat identifikovaným přenosem (3.8), proto budou všechny návrhy a simulace regulátorů vycházet z pracovního bodu, ze kterého byl tento přenos identifikován, tedy $u_{10} = 0,57$, $h_{10} = 122$ cm a $h_{20} = 50$ cm. Při návrhu se budu snažit docílit co nejrychlejší regulace při překmitu maximálně do 30%.

4.1 Návrh PID regulátoru pomocí geometrického místa kořenů

K prvnímu návrhu využiji metodu geometrického místa kořenů (JOHN, J., 1998). GMK pro přenos vodárny (3.8) je na obr. 4.1. Protože chceme navrhnut ideální PID regulátor, přidáme do GMK jeden pól a dvě nuly regulátoru. Abychom dosáhli nulové regulační odchylky, umístíme pól do počátku. Kvůli dobré regulaci umístíme první nulu zleva, co nejblíže za první dva póly zprava. Nyní máme v otevřené smyčce jednu nulu a tři póly, viz obr. 4.2.

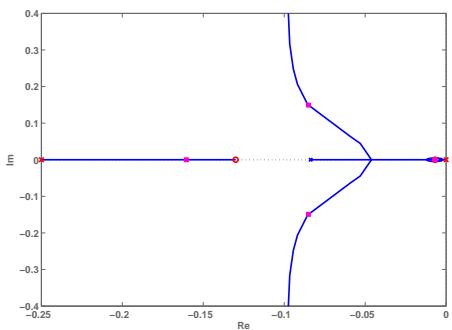


Obrázek 4.1: GMK pro model vodárny



Obrázek 4.2: GMK pro návrh PID regulátoru

Další nulu umístíme nalevo od posledního pólu zprava. Nyní dostáváme ideální PID regulátor. Aby byl regulátor realizovatelný, musíme přidat ještě jeden pól, který bude filtrovat derivační nulu. Pól přidáme tak, aby byl první zleva. Nyní budeme již jen měnit zesílení a drobně posouvat jednotlivé nuly a póly tak, abychom dosáhli co nejlepších parametrů regulace. Výsledné GMK pro navržený PID regulátor je na obr. 4.3.

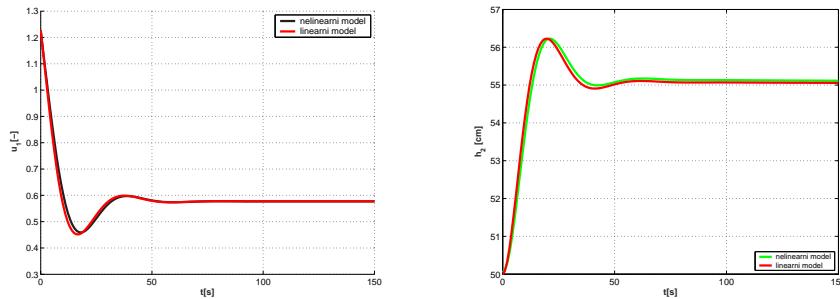


Obrázek 4.3: GMK navrženého PID regulátoru

Výsledný přenos regulátoru vypadá takto

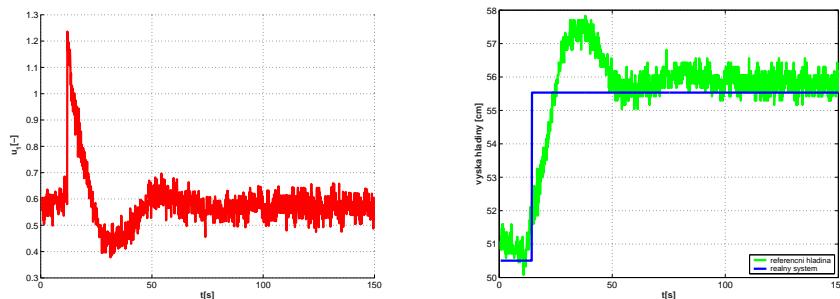
$$C(s) = \frac{34(s + 0,13)(s + 0,006828)}{s(s + 0,25)}. \quad (4.1)$$

Chování navrženého regulátoru můžeme vyzkoušet na nelineárním a lineárním modelu vodárny, viz obr. 4.4.



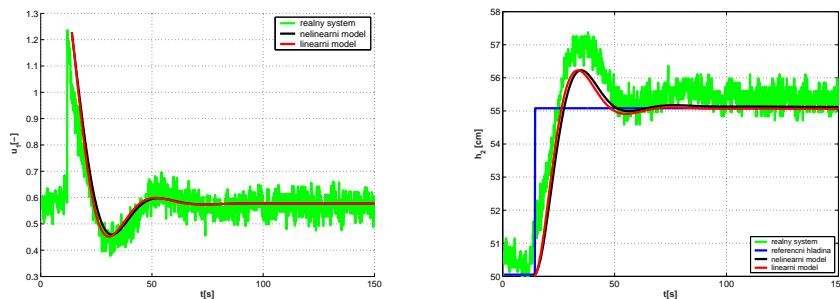
Obrázek 4.4: Simulovaný průběhu regulace navrženého PID regulátoru z pracovního bodu

Regulaci na reálném modelu z pracovního bodu ukazuje obr. 4.5.



Obrázek 4.5: Průběh PID regulace z pracovního bodu na reálném modelu

Na obr. 4.6 můžeme srovnat průběh simulované a naměřené regulace.



Obrázek 4.6: Srovnání naměřené a simulované regulace PID regulátorem z pracovního bodu

Z tohoto srovnání vidíme, že simulovaná regulace odpovídá reálné regulaci. Reálný systém má překmit 30% a splňuje podmínu maximálního překmitu do 30%. Také vidíme, že akční zásah odpovídá rozsahu vstupního napětí u_1 . Bohužel je také patrné zašumění výstupního signálu. Systém sice sleduje požadovanou referenční hodnotu, ale je hodně zašuměný.

4.2 Návrh PID regulátoru pomocí frekvenčních metod

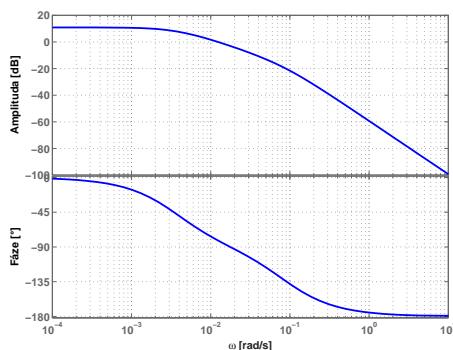
Druhý návrh provedeme pomocí frekvenčních metod. První regulátor jsem navrhl pro fázovou bezpečnost $PM = 45^\circ$. Experimentálně jsem ale zjistil, že při této fázové bezpečnosti se při regulaci dosahuje velkého překmitu. Proto bylo zapotřebí zvolenou fázovou bezpečnost PM zvýšit. Nakonec jsem došel k závěru, že nevhodnější fázová bezpečnost pro zadané podmínky regulace v úvodu je $PM = 70^\circ$.

Při návrhu pomocí frekvenčních metod postupujeme následovně podle (JOHN, J., 1998). Protože se jedná o PID regulátor, vychází fáze přenosu vodárny, na které budeme odečítat frekvenci ω_D

$$\arg\{G_1(j\omega_D)\} = -149,3^\circ.$$

Z Bodeho charakteristik přenosu vodárny na obr. 4.7 odečteme na fázové charakteristice pro $PM = -149,3^\circ$ frekvenci $\omega_D = 0,232$ rad/s. Zesílení na frekvenci ω_D je

$$|G_1(j\omega_D)|_{dB} = -27,3 \text{ dB} \quad \text{odtud} \quad |G_1(j\omega_D)| = 0,043.$$



Obrázek 4.7: Bodeho charakteristiky přenosu vodárny (3.8)

Přenos ideálního PID regulátoru je

$$C_{\text{ideálni}}(s) = \frac{k_D s^2 + k_P s + k_I}{s},$$

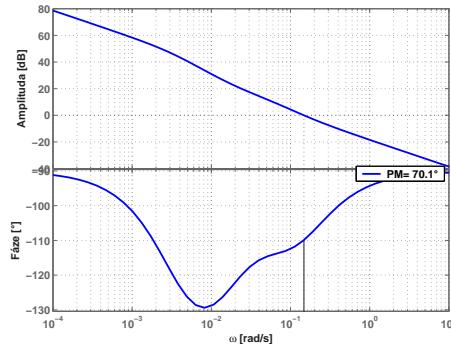
kde pro jednotlivé složky podle (JOHN, J., 1998) platí

$$\begin{aligned} k_D &= \frac{1}{\omega_D \sqrt{2}|G_1(j\omega_D)|}, \\ k_P &= 1,1\omega_D k_D, \\ k_I &= 0,1\omega_D^2 k_D. \end{aligned}$$

Po dosazení dostáváme přenos ideálního PID regulátoru

$$C_{\text{ideálni}}(s) = \frac{111s^2 + 18s + 0,24}{s} = \frac{109,7(s + 0,148)(s + 0,015)}{s}.$$

Pomocí Bodeho frekvenčních charakteristik s vyznačenou fázovou bezpečností si můžeme na obr. 4.8 ověřit, zda otevřená smyčka přenosu vodárny a přenosu navrženého ideálního regulátoru má skutečně fázovou bezpečnost $\text{PM} = 70^\circ$. Z obr. 4.8 vidíme, že návrh ideálního PID regulátoru je v pořádku.



Obrázek 4.8: Bodeho frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky s ideálním PID regulátorem pro $\text{PM} = 70^\circ$

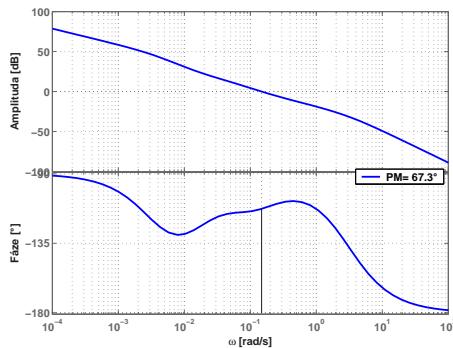
Nyní přidáme ještě jeden pól, který bude filtrovat derivační nulu. Pól přidáme tak, aby zvolenou fázovou bezpečnost ovlivnil co nejméně. Proto bude mít jeho přenos G_f tvar

$$G_f = \frac{1}{\frac{1}{\omega_f} s + 1} \quad \text{kde} \quad \omega_f \doteq 20\omega_D.$$

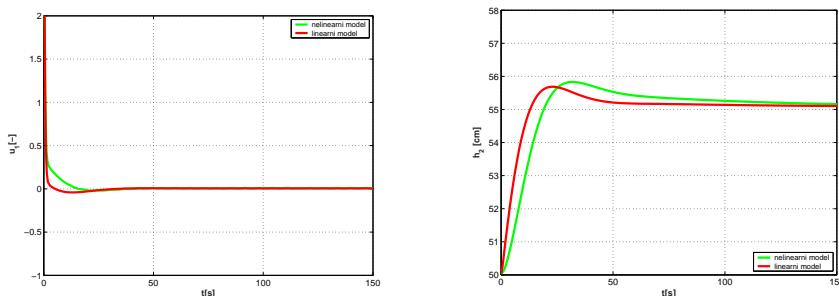
Po dosazení přenosu filtru G_f k ideálnímu PID regulátoru dostáváme výsledný PID regulátor s přenosem

$$C(s) = \frac{109,7(s + 0,148)(s + 0,015)}{s(0,33s + 1)} = \frac{330,7(s + 0,148)(s + 0,015)}{s(s + 3)}. \quad (4.2)$$

Na obr. 4.9 se můžeme podívat na Bodeho frekvenční charakteristiky s vyznačenou fázovou bezpečností otevřené regulační smyčky pro výsledný přenos regulátoru a přenos vodárny.

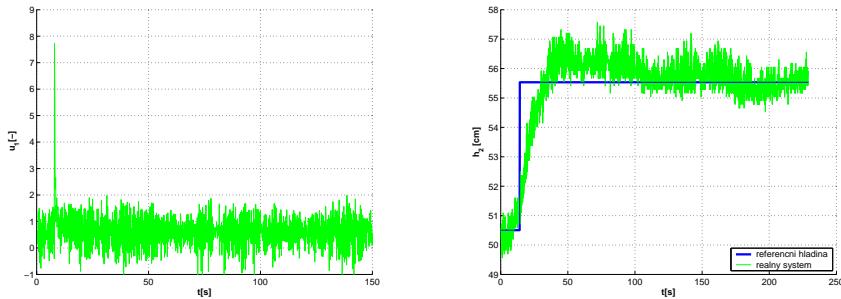


Obrázek 4.9: Bodeho frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky s reálným PID regulátorem pro $PM = 70^\circ$



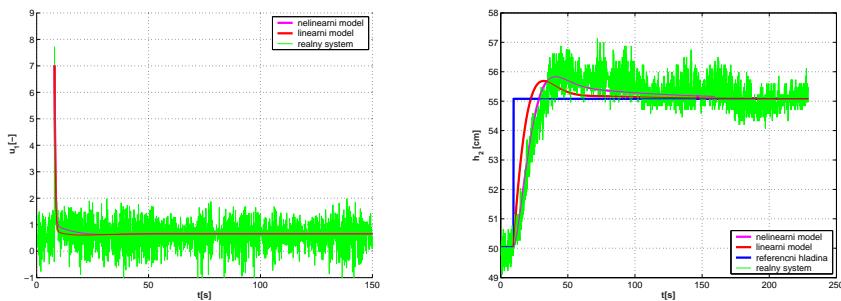
Obrázek 4.10: Simulovaný průběhu regulace navrženého PID regulátoru z pracovního bodu

Navržený regulátor si opět můžeme vyzkoušet na nelineárním a lineárním modelu vodárny z kapitoly 3.3. Srovnání je na obr. 4.10. Regulaci na reálném modelu z pracovního bodu ukazuje obr. 4.11.



Obrázek 4.11: Průběh regulace PID regulátorem z pracovního bodu

Na obr. 4.12 můžeme srovnat průběh simulované a naměřené regulace.



Obrázek 4.12: Srovnání naměřené a simulované regulace PID regulátorem z pracovního bodu

Z tohoto srovnání opět vidíme, že simulovaná regulace odpovídá realitě. Také je patrné, že akční zásah přesahuje rozsah vstupního napětí a čerpadlo se tak nachází v saturaci. Tento stav však trvá pouze 5 s, což je vzhledem k celkové době regulace, která trvá zhruba 100 s, zanedbatelné. Reálný systém má překmit zhruba 28% a splňuje podmínu maximálního překmitu do 30%. Výstupní signál je opět silně zašuměn.

4.3 Srovnání navržených PID regulátorů

Oba regulátory splňují podmínky na kvalitu regulace, které byly zvoleny v úvodu kapitoly. Regulátor navržený pomocí frekvenčních metod má menší překmit, ale delší dobu regulace. Regulátor navržený pomocí GMK dosáhne žádané hodnoty rychleji, ale má větší překmit. Bohužel, ale ani jeden z navržených regulátorů nedokáže odfiltrovat výrazné zašumění výstupního signálu.

4.4 Korekce navržených PID regulátorů

V naměřených průbězích regulace si můžeme všimnout, že výška hladiny h_2 je výrazně zašuměná. Tento nepříznivý jev bychom mohli odstranit pomocí filtru, který by ze signálu h_2 šum odfiltroval. Kdybychom k identifikovanému přenosu vodárny (3.8) přidali filtr druhého řádu typu dolní propust, tak bychom vhodnou volbou zlomové frekvence ω_z mohli odfiltrovat zvlnění hladiny h_2 na výstupu měření při zachování dynamických vlastností systému. Bohužel přidání filtru změní přenos, který reprezentuje vodárnu, a tudíž je zapotřebí regulátory navrhnut znovu.

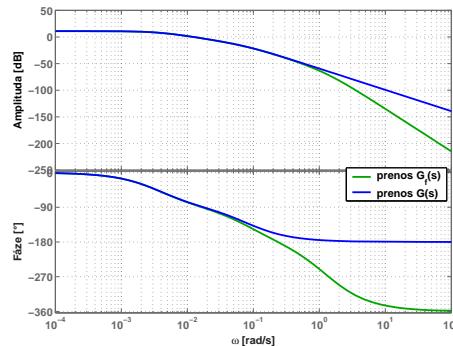
Experimentálně byla zlomová frekvence filtru ω_z zvolena takto $\omega_z = 1,3$ rad/s. K přenosu (3.8), který reprezentuje vodárnu tedy ještě přidáme přenos filtru

$$F(s) = \frac{1}{(\frac{1}{1,3}s + 1)^2}$$

Výsledný přenos pro návrh regulátorů bude vypadat takto

$$G_f(s) = \frac{1}{1904s^4 + 5113s^3 + 3649s^2 + 283s + 1}$$

Srovnání Bodeho frekvenčních charakteristik přenosu $G(s)$ a přenosu $G_f(s)$ s přidaným filtrem ukazuje obr. 4.13.



Obrázek 4.13: Srovnání Bodeho frekvenčních charakteristik přenosu $G(s)$
a přenosu $G_f(s)$ s přidaným filtrem

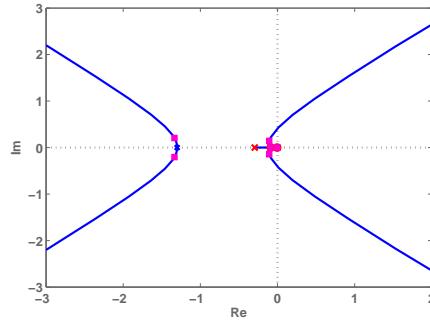
4.4.1 Korekce PID regulátoru navrženého pomocí GMK

Návrh regulátoru bude analogický s postupem z kapitoly 4.1 s tím rozdílem, že v otevřené smyčce přenosu G_f reprezentujícího vodárnu, budou místo dvou pólů póly čtyři. Proto

zde již nebudu provádět podrobný návrh, ale uvedu pouze výsledný přenos regulátoru a jeho GMK. Přenos regulátoru $C(s)$ je

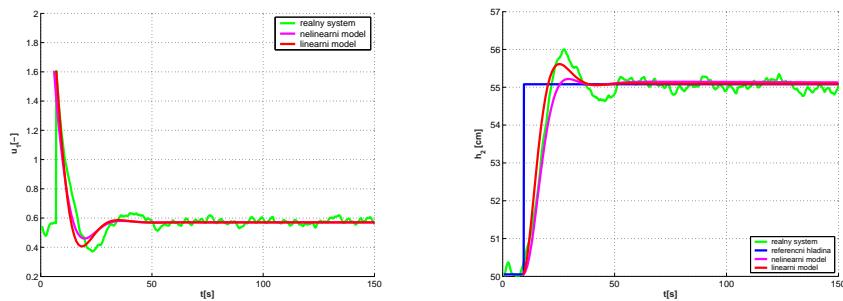
$$C(s) = \frac{54(s + 0,08774)(s + 0,004479)}{s(s + 0,2951)}.$$

Geometrické místo kořenů je na obr. 4.14.



Obrázek 4.14: GMK navrženého PID regulátoru

Na obr. 4.15 se můžeme podívat na srovnání simulované a naměřené regulace. Vidíme, že průběhy si téměř odpovídají, a že jsme díky použití filtru v přenosu vodárny dosáhli mnohem menšího zašumění výstupní hladiny h_2 . Navíc se nám povedlo snížit překmit na 20% při stejné době regulace. Akční zásah se v krátkém časovém intervalu nachází mimo rozsah vstupního napětí a čerpadlo je tudíž v saturaci. Ale vzhledem k délce regulace je tento stav zanedbatelný.



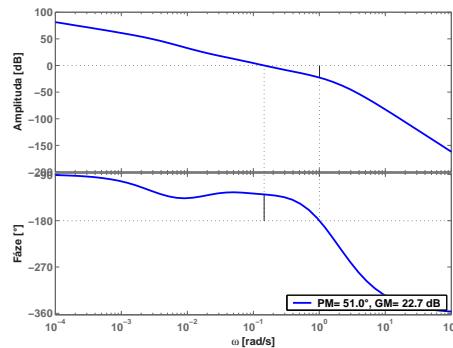
Obrázek 4.15: Srovnání naměřené a simulované regulace PID regulátorem z pracovního bodu

4.4.2 Korekce PID regulátoru navrženého pomocí frekvenčních metod

Při návrhu budeme postupovat stejně jako v kapitole 4.2. Protože se změnil přenos představující systém vodárny a tím i jeho Bodeho frekvenční charakteristiky, které jsou na obr. 4.13, budeme muset zvolit jinou hodnotu fázové bezpečnosti PM. Jako nejvhodnější fázová bezpečnost se ukázala $PM = 50^\circ$. Přenos výsledného PID regulátoru je následující

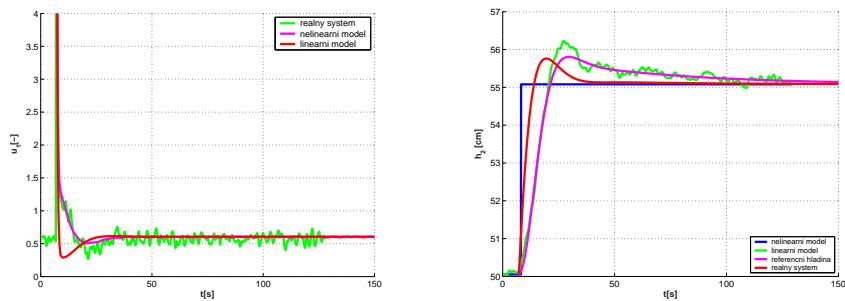
$$C(s) = \frac{222s^2 + 43,2s + 0,7}{0,3s^2 + s} = \frac{740(s + 0,1768)(s + 0,0178)}{s(s + 3)}.$$

Na obr. 4.16 se můžeme podívat na Bodeho frekvenční charakteristiky s vyznačenou fázovou bezpečností otevřené regulační smyčky pro výsledný přenos regulátoru a přenos vodárny s přidaným filtrem.



Obrázek 4.16: Bodeho frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky s reálným PID regulátorem pro $PM = 50^\circ$

Na obr. 4.17 se můžeme podívat na srovnání simulované a naměřené regulace. Vidíme, že průběhy si téměř odpovídají, a že jsme opět díky použití filtru v přenosu vodárny dosáhli mnohem menšího zašumění výstupní hladiny h_2 . Navíc se nám povedlo snížit překmit na 24% a také jsme snížili dobu regulace. Akční zásah se opět na zanedbatelně krátkou dobu nachází mimo rozsah vstupního napětí.



Obrázek 4.17: Srovnání naměřené a simulované regulace PID regulátorem z pracovního bodu

4.5 Shrnutí regulace

Návrhy regulátorů a jejich následné realizace na reálném systému si zhruba odpovídaly. Tímto jsem ověřil, že identifikace modelu vodárny TQ proběhla správně. Regulátory navržené na základě identifikovaného přenosu, který reprezentoval přenos vodárny, vykazovaly silné zašumění výstupního signálu. Tento jev jsem zmírnil přidáním filtru k přenosu vodárny. Pro tento model vodárny regulátory navržené pomocí metody GMK regulují lépe, než regulátory navržené pomocí frekvenčních metod. Dosahují sice nepatrné většího překmitu, ale mají kratší dobu regulace a k dosažení žádané hodnoty potřebují menší akční zásah řídicího napětí.

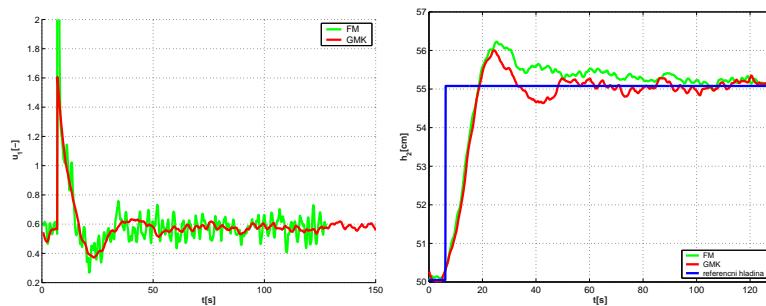
Kapitola 5

Závěr

V první části této bakalářské práce jsem identifikoval model vodárny TQ v laboratoři K26. Nejprve jsem vytvořil teoretický model vodárny, ze kterého jsem následně pomocí Simulinku, který je součástí programu Matlab, vytvořil nelineární model vodárny. Všechny neznámé konstanty jsem experimentálně určil. Správnost změřených konstant jsem vyzkoušel porovnáním simulace nelineárního modelu s naměřenými průběhy hladin na reálném modelu vodárny. Změřené průběhy téměř odpovídaly průběhům simulovaným. Dále jsem linearizací získal lineární model a přenos vstupního napětí u_1 na výšku hladiny h_2 .

V druhé části jsem na základě provedené identifikace navrhoval pomocí geometrického místa kořenů a frekvenčních metod PID regulátory. První návrhy ukázaly, že výstupní signál sice sleduje referenční hodnotu, ale je silně zašuměný. Tento nepříznivý jev jsem zmírnil přidáním filtru druhého řádu typu dolní propust. Návrh regulátorů a následná regulace proběhly v souladu s teoretickými předpoklady. Vzhledem k použitému PID regulátoru jsem se všemi navrženými regulátory dosáhl nulové regulační odchylky, která je na výstupu i přes přidání filtru nepatrně zašuměná. Simulace regulace a reálný průběh regulace si odpovídají, což potvrzuje správnost identifikace modelu vodárny.

Regulátor s nejlepší kvalitou regulace jsem navrhl pomocí metody geometrického místa kořenů. Tento regulátor má menší překmit, rychlejší dobu regulace a menší akční zásah v porovnání s regulátorem navrženým pomocí frekvenčních metod. Srovnání průběhů naměřené regulace obou regulátorů ukazuje obr. 5.1, kde je skutečně vidět, že regulátor navržený pomocí geometrického místa kořenů má všechny parametry regulace lepší. Tímto jsem splnil úkol navrhnut regulátor na základě provedené identifikace. Práci jsem napsal pomocí programů MikTeX (SCHENK, C., 2006) a Matlab (*The Mathworks [online]*, <http://www.mathworks.com/>).



Obrázek 5.1: Srovnání regulátorů navržených pomocí frekvenčních metod (FM) a geometrického místa kořenů (GMK)

Literatura

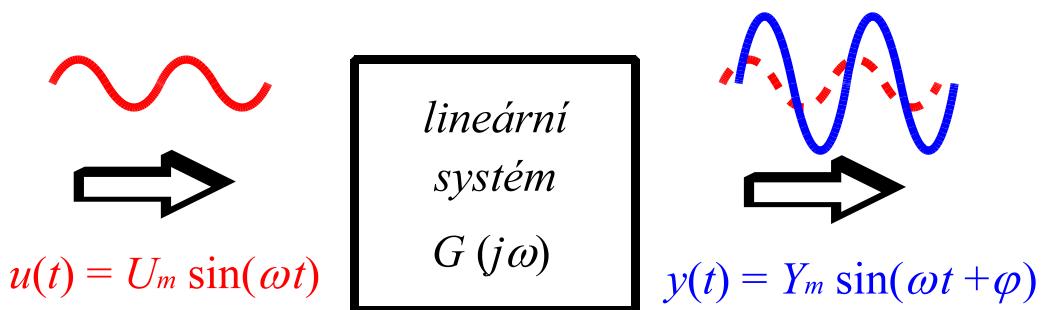
- FRANKLIN, G. F., POWELL, J. D. a EMAMI-NAEINI, A. (2002), *Feedback Control of Dynamic Systems*, Prentice-Hall. ISBN 0-13-032393-4.
- FUKA, J., JOHN, J. a KUTIL, M. (<http://dce.felk.cvut.cz/sari/>), Učebnice SARI [online]. Poslední revize 2005-03-01 [cit. 2005-03-01].
- HORÁČEK, P. (1999), *Systémy a modely*, Praha: Vydavatelství ČVUT. ISBN 80-01-01923-3.
- JOHN, J. (1998), *Systémy a řízení*, Praha: Vydavatelství ČVUT. ISBN 80-01-01474-6.
- NOSKIEVIČ, P. (1999), *Modelování a identifikace systémů*, Praha: Vydavatelství MON-TANEX a.s. ISBN 80-7225-030-2.
- SCHENK, C. (2006), MiKTeX [online]. [cit. 2006-05-20] <http://www.miktex.org/>.
- The Mathworks [online] (<http://www.mathworks.com/>). [cit. 2005-01-20].

Dodatek A

Frekvenční charakteristiky

Frekvenční charakteristiky jsou grafy frekvenčního přenosu $G(j\omega)$, který získáme formálně z přenosové funkce $G(s)$ pomocí substituce $s = j\omega$. Frekvenční přenos $G(j\omega)$ je komplexní funkce úhlové frekvence ω , neboli pro konkrétní hodnotu úhlové frekvence ω , je $G(j\omega)$ jedno konkrétní komplexní číslo. Protože z teorie o komplexních číslech víme, že existuje několik způsobů, jak graficky komplexní číslo znázornit, je i několik způsobů, jak zobrazit frekvenční charakteristiku. Tyto možnosti si v této kapitole podrobně, popíšeme i když bychom to vlastně ani nemuseli dělat, protože se nejedná o nic jiného než o grafy komplexních funkcí.

Velkou výhodou frekvenčních charakteristik je snadné použití informace získané z experimentování s modelovaným systémem, kdy již nemusíme získaná data dále zpracovávat. Jednoduše budíme systém sinusovým signálem známé úhlové frekvence ω a amplitudy a v ustáleném stavu odečítáme amplitudu a fázový posun výstupního signálu vůči vstupnímu viz obr. A.1. Toto měření provedeme pro vhodný rozsah úhlových frekvencí ω a rovnou sestrojíme frekvenční charakteristiku. Nemusíme tedy například určovat přesnou polohu pólů a nul systému nebo sestavovat stavový model.



Obrázek A.1: Princip měření frekvenčních charakteristik

Frekvenční charakteristiky se velmi často používají v inženýrské praxi při návrhu zpětnovazebních řídicích systémů zejména proto, že tyto charakteristiky umožňují obcházet nepřesnosti, kterých se při identifikaci systému vždy dopouštíme. I když se v současnosti používá stále více výpočetní techniky, jsou frekvenční metody pro systémy nižších řádů velmi používané právě z důvodu časové efektivity.

Frekvenční metody se používají zejména pro návrh a řízení systémů, které jsou v otevřené smyčce stabilní. Proto se budeme v této kapitole zabývat zejména modely popisující tuto třídu dynamických systémů. Zavedeme si pojem frekvenční přenos a ukážeme si, jak z něho zkonstruovat jednotlivé frekvenční charakteristiky. Dále uvedeme základní míry týkající se frekvenčních charakteristik jako je rezonanční frekvence, rezonanční převýšení, šířka přenášeného pásma a amplitudová respektive fázová bezpečnost. Poté přidáme pro ilustraci několik řešených příkladů a nakonec několik neřešených úloh. Další informace týkající se frekvenčních charakteristik lze nalézt například v (FRANKLIN, G. F. et al., 2002).

A.1 Frekvenční přenos systému a frekvenční charakteristiky

Pro stabilní systém s přenosem $G(s)$ definujeme pro nulové počáteční podmínky frekvenční přenos $G(j\omega)$ jako poměr Fourierovy transformace výstupního signálu $y(t)$ ku Fourierově transformaci vstupního signálu $u(t)$

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}. \quad (\text{A.1})$$

Frekvenční přenos $G(j\omega)$ je komplexní funkce, která plně popisuje ustálenou odezvu lineárního stacionárního systému na vstupní harmonický signál $u(t) = U_m \sin(\omega t)$. Tento fakt lze jednoduše dokázat, což si ukážeme v kapitole A.2.

Frekvenční charakteristika systému je graf frekvenčního přenosu (A.1). Z úvodu již víme, že vzhledem k různým grafickým způsobům vyjádření komplexního čísla máme různé frekvenční charakteristiky popisující jeden systém s frekvenčním přenosem $G(j\omega)$. Nejpoužívanější jsou Bodeho frekvenční charakteristiky, frekvenční charakteristika v komplexní rovině a Nicholsova charakteristika. Těmto charakteristikám věnujeme následující odstavce.

A.1.1 Bodeho frekvenční charakteristiky

Bodeho frekvenční charakteristiky jsou dvě – amplitudová charakteristika $|G(j\omega)|$ a fázová charakteristika $\arg\{G(j\omega)\}$. Obě tyto charakteristiky představují grafické vyjádření frekvenčního přenosu $G(j\omega)$, který je zapsán ve tvaru

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg\{G(j\omega)\}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (\text{A.2})$$

kde $A(\omega)$ [-] je amplituda frekvenčního přenosu $G(j\omega)$ a $\varphi(\omega)$ [rad] je fáze frekvenčního přenosu $G(j\omega)$.

Bodeho frekvenční charakteristiky mají na vodorovné ose úhlovou frekvenci ω v logaritmických souřadnicích. Amplitudovou charakteristiku obvykle vynášíme do logaritmických souřadnic tak, aby svislá osa byla kalibrována lineárně v decibelech [dB] podle předpisu

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |G(j\omega)|. \quad (\text{A.3})$$

Fázovou charakteristiku vynášíme obvykle ve stupních [$^\circ$].

Poznámka: V rovnicích používáme symbol log, kterým myslíme dekadický logaritmus tedy logaritmus o základu 10. V anglické literatuře se pod symbolem log rozumí logaritmus přirozený, který je v české literatuře obvykle značen ln. \square

A.1.1.1 Jednotlivé faktory Bodeho frekvenční charakteristiky

Konstrukce amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky se vytváří v důsledku logaritmování sčítáním jednotlivých faktorů, které jsou součástí frekvenčního přenosu. Faktory jsou vlastně jednotlivé příspěvky (například nenulový reálný pól nebo nula, nulový pól nebo nula, konstanta, dvojice komplexně sdružených pólů nebo nul, dopravní zpoždění apod.), na základě jejichž sčítání vznikne výsledná Bodeho frekvenční charakteristika. Princip spočívá v převedení jednotlivých faktorů frekvenčního přenosu do exponenciálního tvaru komplexních čísel. Poté se zvlášť konstruuje amplitudová a zvlášť fázová charakteristika. Podrobné vysvětlení lze také nalézt například v (FRANKLIN, G. F. et al., 2002; HORÁČEK, P., 1999).

Nyní se zaměříme na pravidla pro vytváření amplitudových a fázových frekvenčních charakteristik pro jednotlivé faktory. Nejprve si ukážeme, jak se tato pravidla dají odvodit pro nenulový reálný pól. Poté uvedeme již bez odvození, jak se konstruují Bodeho frekvenční charakteristiky pro ostatní faktory.

Reálný pól

$$G(j\omega) = \frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_0} + 1} \quad (\text{A.4})$$

Pro amplitudu přenosu (A.4) platí

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = \left| \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{-1} \right|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} = -10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right). \quad (\text{A.5})$$

Protože hledáme pravidla pro asymptotickou charakteristiku, budeme rozlišovat dva případy v závislosti na vzdálenosti ω od ω_0

$$\left| \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{-1} \right|_{\text{dB}} \cong -10 \log 1 = 0 \quad \text{pro} \quad \omega \ll \omega_0, \quad (\text{A.6})$$

$$\left| \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{-1} \right|_{\text{dB}} \cong -20 \log \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{pro} \quad \omega \gg \omega_0. \quad (\text{A.7})$$

Z (A.6) plyne, že pro frekvence ω , které jsou mnohem menší než ω_0 , je asymptotická amplitudová charakteristika rovna 0 dB. Z (A.7) plyne, že pro frekvence ω podstatně větší než ω_0 má asymptotická amplitudová charakteristika sklon -20 dB/dekádu viz obr. A.2. O přímku se samozřejmě jedná, jen pokud je dodržena podmínka, že vodorovná osa je v logaritmických souřednicích. Skutečná amplitudová charakteristika má v místě zlomové frekvence ω_0 pokles o 3 dB. Tento pokles můžeme určit tak, že dosadíme do rovnice (A.5) za $\omega = \omega_0$

$$\left| \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{-1} \right|_{\text{dB}} = -10 \log 2 \doteq -3 \text{ dB} \quad \text{pro} \quad \omega = \omega_0.$$

Tímto jsme si odvodili, jak se konstruuje asymptotická amplitudová charakteristika pro reálný pól. Nyní podobným způsobem odvodíme obdobná pravidla pro vytvoření fázové charakteristiky. Pro fázi přenosu (A.4) platí

$$\arg\{G(j\omega)\} = \arg \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{-1} = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Obdobně jako u asymptotické amplitudové charakteristiky, i zde rozlišíme limitní případy

v závislosti na vzdálenosti ω od ω_0

$$\arg \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{-1} \cong 0^\circ \quad \text{pro } \omega \ll \omega_0, \quad (\text{A.8})$$

$$\arg \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{-1} = -45^\circ \quad \text{pro } \omega = \omega_0, \quad (\text{A.9})$$

$$\arg \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{-1} \cong -90^\circ \quad \text{pro } \omega \gg \omega_0. \quad (\text{A.10})$$

Z (A.8) plyne, že pro frekvence ω , které jsou mnohem menší než ω_0 , je asymptotická fázová charakteristika rovna 0° . Z (A.9) vidíme, že pro frekvenci $\omega = \omega_0$ je rovna -45° a z (A.10) plyne, že pro frekvence ω podstatně větší než ω_0 je asymptotická fázová charakteristika rovna -90° viz obr. A.2. Skutečná fázová charakteristika má na frekvencích $0,1\omega_0$ a $10\omega_0$ chybu oproti asymptotické přibližně $5,7^\circ$. Tento pokles můžeme určit podobně jako třídecibelovou chybu amplitudové charakteristiky.

Všechny výše uvedené poznatky pro amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku reálného pólu můžeme nyní přehledně shrnout do následujících vztahů a též je znázornit graficky na obr. A.2.

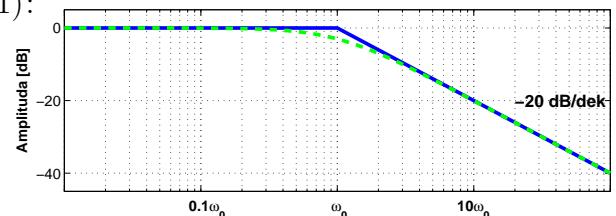
Bodeho frekvenční charakteristika – reálný pól

$$G(j\omega) = \frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_0} + 1} \quad (\text{A.11})$$

Amplitudová charakteristika přenosu (A.11):

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \cong 0 \quad \text{pro } \omega \ll \omega_0,$$

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \cong -20 \log \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{pro } \omega \gg \omega_0.$$

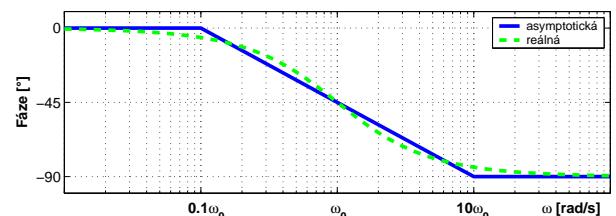


Fázová charakteristika přenosu (A.11):

$$\arg\{G(j\omega)\} \cong 0^\circ \quad \text{pro } \omega \ll \omega_0,$$

$$\arg\{G(j\omega)\} = -45^\circ \quad \text{pro } \omega = \omega_0,$$

$$\arg\{G(j\omega)\} \cong -90^\circ \quad \text{pro } \omega \gg \omega_0.$$



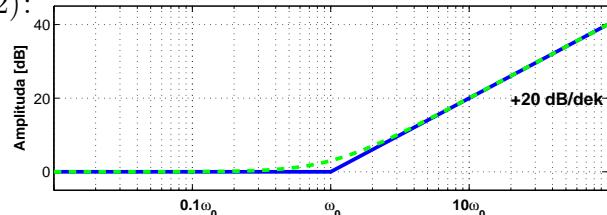
Obrázek A.2: Bodeho charakteristika – reálný pól

Bodeho frekvenční charakteristika – reálná nula

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{\omega_0} + 1 \quad (\text{A.12})$$

Amplitudová charakteristika přenosu (A.12):

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{\text{dB}} &\cong 0 & \text{pro } \omega \ll \omega_0, \\ |G(j\omega)|_{\text{dB}} &\cong 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} & \text{pro } \omega \gg \omega_0. \end{aligned}$$



Fázová charakteristika přenosu (A.12):

$$\begin{aligned} \arg\{G(j\omega)\} &\cong 0^\circ & \text{pro } \omega \ll \omega_0, \\ \arg\{G(j\omega)\} &= 45^\circ & \text{pro } \omega = \omega_0, \\ \arg\{G(j\omega)\} &\cong 90^\circ & \text{pro } \omega \gg \omega_0. \end{aligned}$$

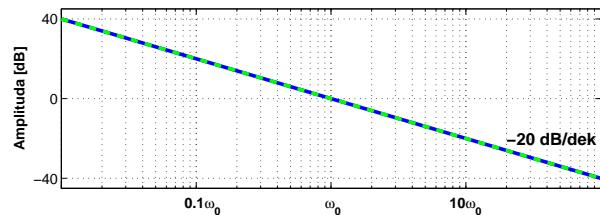
Obrázek A.3: Bodeho charakteristika – reálná nula

Bodeho frekvenční charakteristika – reálný pól v nule

$$G(j\omega) = \frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_0}} \quad (\text{A.13})$$

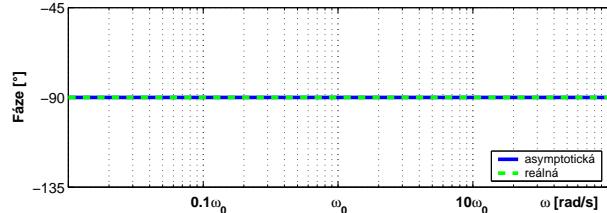
Amplitudová charakteristika přenosu (A.13):

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \frac{\omega}{\omega_0}.$$



Fázová charakteristika přenosu (A.13):

$$\arg\{G(j\omega)\} = -90^\circ.$$



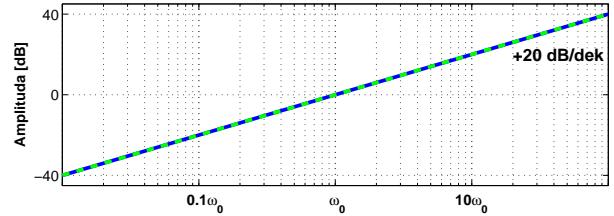
Obrázek A.4: Bodeho charakteristika – reálný pól v nule

Bodeho frekvenční charakteristika – reálná nula v nule

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{\omega_0} \quad (\text{A.14})$$

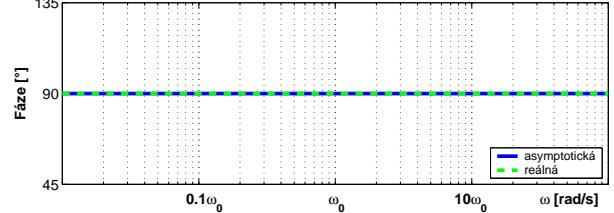
Amplitudová charakteristika přenosu (A.14):

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}.$$



Fázová charakteristika přenosu (A.14):

$$\arg\{G(j\omega)\} = 90^\circ.$$



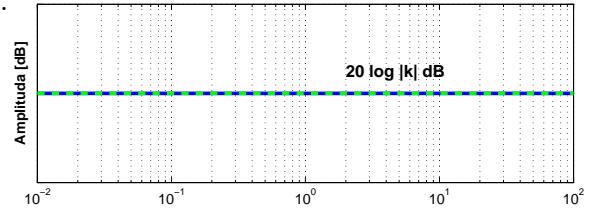
Obrázek A.5: Bodeho charakteristika – reálná nula v nule

Bodeho frekvenční charakteristika – konstanta k

$$G(j\omega) = k, \quad k \geq 0 \quad (\text{A.15})$$

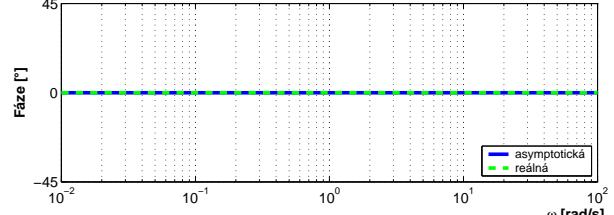
Amplitudová charakteristika přenosu (A.15):

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = |k|_{\text{dB}} = 20 \log |k|.$$



Fázová charakteristika přenosu (A.15):

$$\arg\{G(j\omega)\} = 0^\circ.$$



Obrázek A.6: Bodeho charakteristika – konstanta

Bodeho frekvenční charakteristika – dvojice komplexně sdružených pólů

$$G(j\omega) = \frac{1}{\frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2} + \frac{2\zeta j\omega}{\omega_0} + 1} \quad (\text{A.16})$$

Zde je zapotřebí upozornit na drobné odlišnosti od ostatních faktorů, které jsou způsobeny komplexními kořeny jmenovatele respektive čitatele u dvojice komplexně sdružených pólů respektive nul. Pokud se parametr ζ v přenosu (A.16), respektive (A.17), blíží nule, tak na amplitudové frekvenční charakteristice vzniká v okolí ω_0 špička, viz obr. A.7 respektive obr. A.8. Pokud se ovšem parametr ζ v přenosu (A.16), respektive (A.17), blíží jedné, tak špička v okolí ω_0 není, protože tento faktor degeneruje pro $\zeta = 1$ na dvojnásobný reálný pól respektive nulu. V takovém případě postupujeme při kreslení Bodeho frekvenčních charakteristik podle obr. A.2, respektive obr. A.3.

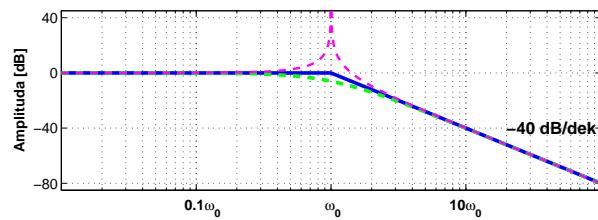
Na fázové frekvenční charakteristice je také několik změn. Pokud se parametr ζ v přenosu (A.16) respektive (A.17) blíží limitně k nule, tak je změna sice v souladu s předchozími případy o -180° , ale ke změně nedochází v délce dvou dekád, ale okamžitě v místě zlomové frekvence ω_0 . Pokud se parametr ζ v přenosu (A.16) respektive (A.17) blíží jedné, tak klesání probíhá jako v předešlých případech, tedy přes dvě dekády viz obr. A.7, respektive obr. A.8.

Výše uvedené poznatky pro amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku přenosu s dvojicí komplexně sdružených pólů, respektive nul, můžeme ještě přehledně shrnout do následujících vztahů a též je znázornit graficky.

Amplitudová charakteristika přenosu (A.16):

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \cong 0 \quad \text{pro } \omega \ll \omega_0 ,$$

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \cong -40 \log \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{pro } \omega \gg \omega_0 .$$

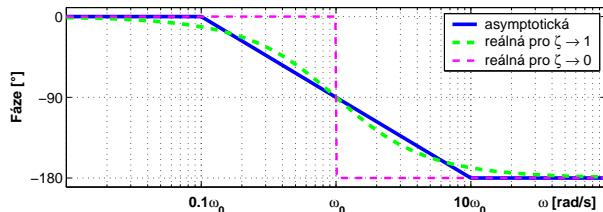


Fázová charakteristika přenosu (A.16):

$$\arg\{G(j\omega)\} \cong 0^\circ \quad \text{pro } \omega \ll \omega_0 ,$$

$$\arg\{G(j\omega)\} = -90^\circ \quad \text{pro } \omega = \omega_0 ,$$

$$\arg\{G(j\omega)\} \cong -180^\circ \quad \text{pro } \omega \gg \omega_0 .$$



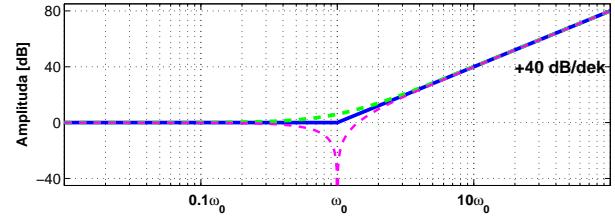
Obrázek A.7: Bodeho charakteristika – dvojice komplexně sdružených pólů

Bodeho frekvenční charakteristika – dvojice komplexně sdružených nul

$$G(j\omega) = (j\omega)^2 + 2\zeta j\omega\omega_0 + \omega_0^2 \quad (\text{A.17})$$

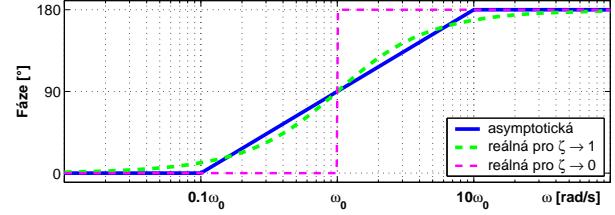
Amplitudová charakteristika přenosu (A.17):

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{\text{dB}} &\cong 0 & \text{pro } \omega \ll \omega_0, \\ |G(j\omega)|_{\text{dB}} &\cong 40 \log \frac{\omega}{\omega_0} & \text{pro } \omega \gg \omega_0. \end{aligned}$$



Fázová charakteristika přenosu (A.17):

$$\begin{aligned} \arg\{G(j\omega)\} &\cong 0^\circ & \text{pro } \omega \ll \omega_0, \\ \arg\{G(j\omega)\} &= 90^\circ & \text{pro } \omega = \omega_0, \\ \arg\{G(j\omega)\} &\cong 180^\circ & \text{pro } \omega \gg \omega_0. \end{aligned}$$



Obrázek A.8: Bodeho charakteristika – dvojice komplexně sdružených nul

Bodeho frekvenční charakteristika – dopravní zpozdění

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T_d} \quad (\text{A.18})$$

Přenos s dopravním zpozděním T_d [s] má amplitudovou frekvenční charakteristiku jednotkovou, respektive v decibelech jí odpovídá 0 dB

$$|e^{-j\omega T_d}|_{\text{dB}} = 0.$$

Dopravní zpozdění tedy nemění amplitudu výstupního signálu v závislosti na frekvenci ω .

Pro fázovou charakteristiku platí

$$\arg\{e^{-j\omega T_d}\} = -T_d \omega = -T_d 10^{\log \omega},$$

z čehož vyplývá, že fázová charakteristika členu s dopravním zpozděním je lineární funkcí úhlové frekvence ω . Vzhledem k tomu, že v Bodeho frekvenční charakteristice používáme na vodorovné ose logaritmickou stupnici, nemůže být výsledná křivka přímkou. Musíme ji vykreslit jako funkci s argumentem $\log \omega$.

A.1.2 Frekvenční charakteristika v komplexní rovině

Frekvenční charakteristika v komplexní rovině je graf frekvenčního přenosu $G(j\omega)$ zakreslený do Gaussovy komplexní roviny, tedy do roviny, kde vodorovná osa odpovídá reálné části $\text{Re}\{G(j\omega)\}$ a svislá osa odpovídá imaginární části $\text{Im}\{G(j\omega)\}$, kde ω je parametr křivky. Můžeme ji jednoduše překreslit z Bodeho frekvenční charakteristiky s pouhou znalostí, co je komplexní číslo, respektive jeho reálná část, imaginární část, amplituda a fáze.

A.1.3 Nicholsova frekvenční charakteristika

Nicholsova charakteristika je frekvenční přenos $G(j\omega)$ vykreslený v souřadnicích $|G(j\omega)|_{\text{dB}}$ v závislosti na $\arg G(j\omega)$, kde ω je parametr křivky. Na Nicholsově charakteristice jsou díky logaritmické stupnici na amplitudové ose ihned vidět frekvenční vlastnosti zkoumaného systému. Změní-li se u přenosu $G(j\omega)$ zesílení, posune se Nicholsova charakteristika vertikálně. V případě, že se změní pouze fáze, tak se charakteristika posune horizontálně. Tato charakteristika se nejčastěji používá pro návrh zpětnovazebních systémů. Můžeme ji opět jednoduše překreslit z Bodeho frekvenčních charakteristik.

A.1.4 Míry na frekvenčních charakteristikách

V souvislosti s frekvenčními charakteristikami zavádíme pro stabilní přenosy další číselné charakteristiky: amplitudovou a fázovou bezpečnost, rezonanční převýšení, rezonanční frekvenci a šířku pásma. *Amplitudová bezpečnost* (Gain Margin – GM) říká, jakým číslem můžeme vynásobit amplitudu přenosu $G(j\omega)$ tak, aby byla rovna jedné na frekvenci ω_{GM} , na které má fázová charakteristika hodnotu $\arg\{G(j\omega_{GM})\} = -180^\circ$. *Fázová bezpečnost* (Phase Margin – PM) říká, o kolik můžeme zpozdit fázi přenosu $G(j\omega)$ tak, aby byla rovna -180° na frekvenci ω_{PM} , na které má amplitudová charakteristika hodnotu $|G(j\omega_{PM})| = 1$, respektive 0 dB. *Rezonanční převýšení* (resonant peak – A_r) a *Rezonanční frekvence* (resonant frequency – ω_r) jsou definovány jako

$$A_r = \max_{\omega>0} |G(j\omega)| = |G(j\omega_r)|_{\text{dB}}. \quad (\text{A.19})$$

Šířka přenášeného pásma (Bandwidth – ω_{BW}) je definována vztahem

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} > |G(0)|_{\text{dB}} - 3 \text{ dB}, \quad \forall \omega < \omega_{BW}. \quad (\text{A.20})$$

Všechny výše uvedené míry na frekvenčních charakteristikách si ukážeme na řešených příkladech v kapitole A.3.

A.2 Souvislost frekvenčního přenosu s přenosovou funkcí v Laplaceově transformaci

Z předchozí kapitoly již víme, jak zobrazit frekvenční charakteristiku frekvenčního přenosu $G(j\omega)$. Velmi často však popisujeme systém přenosem v Laplaceově transformaci $G(s)$, který vyjadřuje vztah mezi Laplaceovým obrazem vstupního signálu $u(t)$ a Laplaceovým obrazem výstupního signálu $y(t)$

$$Y(s) = G(s)U(s).$$

V časové oblasti lze tento vztah vyjádřit konvolutorním integrálem

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau, \quad (\text{A.21})$$

kde $g(\tau) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ je impulsní odezva systému s přenosem $G(s)$. Protože impulsní charakteristika $g(t)$ je nulová pro $t < 0$, můžeme v rovnici (A.21) psát dolní mez integrálu rovnu nule.

Uvažujme nyní vstupní harmonický signál

$$u(t) = \sin(\omega t) = \text{Im}\{e^{j\omega t}\}$$

a hledejme pro tento signál ustálenou odezvu systému s přenosem $G(s)$

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(\tau) \text{Im}\{e^{j\omega(t-\tau)}\} d\tau = \text{Im}\left\{ e^{j\omega t} \int_0^\infty g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} = \text{Im}\{e^{j\omega t} G(j\omega)\} = \\ &= \text{Im}\{|G(j\omega)| e^{j(\omega t + \varphi)}\} = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

kde $\varphi = \arg\{G(j\omega)\}$. Odtud vidíme, že komplexní přenos $G(j\omega)$ plně popisuje ustálenou odezvu lineárního stacionárního systému na harmonický vstupní signál.

Porovnáme-li předchozí rovnici s definičním integrálem Laplaceovy transformace

$$G(s) = \int_0^\infty g(\tau) e^{-s\tau} d\tau,$$

vidíme, že frekvenční přenos $G(j\omega)$ získáme z přenosu vyjádřeného v Laplaceově transformaci $G(s)$ substitucí

$$s = j\omega. \quad (\text{A.22})$$

Důkaz: Předpokládejme, že máme vstupní signál $u(t) = U_m \cos(\omega_0 t)$. Obraz tohoto vstupního signálu v Laplaceově transformaci je

$$U(s) = U_m \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

a obraz odezvy výstupu systému je

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) \frac{U_m s}{(s - j\omega_0)(s + j\omega_0)} = \frac{k_1}{s - j\omega_0} + \frac{k_2}{s + j\omega_0} + Y_p(s),$$

kde Y_p reprezentuje obrazy přechodové funkce, která se u stabilního přenosu limitně blíží s rostoucím časem k nule. Nyní určíme konstanty k_1 a k_2 a provedeme zpětnou Laplaceovu transformaci, abychom získali časovou odezvu výstupu

$$y(t) = k_1 e^{j\omega_0 t} + k_2 e^{-j\omega_0 t} = \frac{U_m G(j\omega_0)}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{U_m G(-j\omega_0)}{2} e^{-j\omega_0 t}.$$

Přenos $G(j\omega_0)$ vyjadříme ve tvaru $G(j\omega_0) = |G(j\omega_0)| e^{j\varphi}$ a dostáváme

$$y(t) = \frac{U_m}{2} |G(j\omega_0)| (e^{j(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi)}) = U_m |G(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Závěrem můžeme říci, že jsme dokázali, že je možné frekvenční přenos systému $G(j\omega)$ získat dosazením $s = j\omega$ do přenosu systému v Laplaceově transformaci $G(s)$. Tento důkaz jsme převzali z (HORÁČEK, P., 1999, strana 138). 

A.3 Příklady

Příklad A.1: Nakreslete Bodeho frekvenční charakteristiku přenosu

$$G(s) = \frac{s + 1}{s + 10}.$$

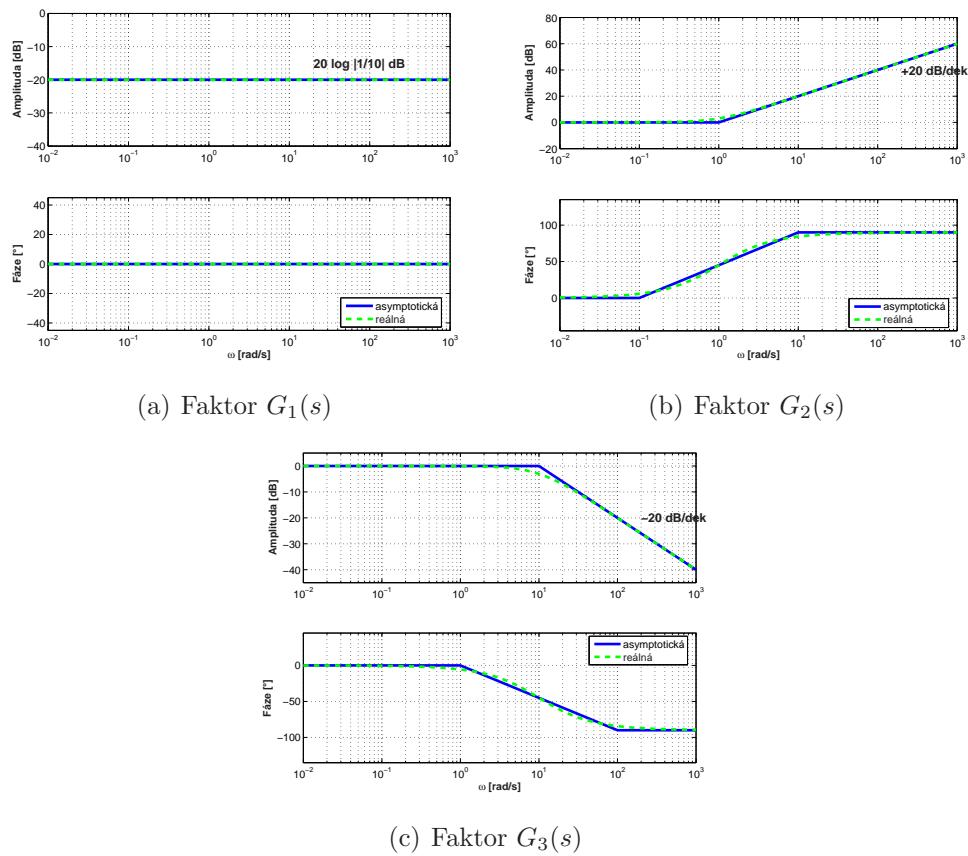
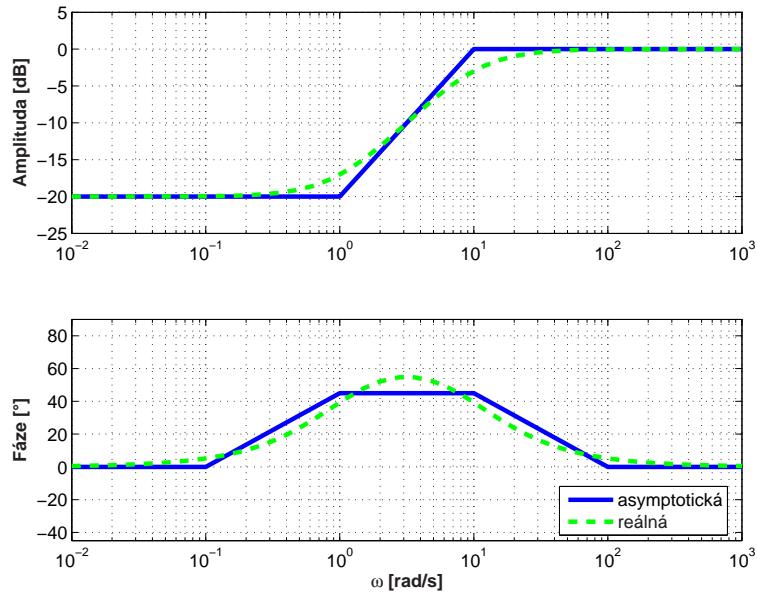
Řešení: Nejprve si daný přenos rozdělíme na součin jednotlivých faktorů

$$G(s) = \frac{s + 1}{s + 10} = \frac{1}{10} \frac{s + 1}{1} \frac{1}{0,1s + 1}.$$

Nyní máme tři faktory

$$G_1(s) = \frac{1}{10}, \quad G_2(s) = \frac{s + 1}{1}, \quad G_3(s) = \frac{1}{0,1s + 1},$$

pro které umíme podle kapitoly A.1.1.1 sestavit Bodeho asymptotické frekvenční charakteristiky viz obr. A.9.

Obrázek A.9: Bodeho frekvenční charakteristiky faktorů přenosu $G(s)$ Obrázek A.10: Výsledná Bodeho frekvenční charakteristika přenosu $G(s)$

Každý faktor si můžeme vyjádřít ve tvaru $G_i(j\omega) = |G_i|e^{j\varphi_i}$. Dostaneme tedy

$$G_1(j\omega) = |G_1|e^{j\varphi_1}, \quad G_2(j\omega) = |G_2|e^{j\varphi_2}, \quad G_3(j\omega) = |G_3|e^{j\varphi_3}.$$

Pro celý přenos $G(j\omega)$ platí

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega) = |G_1||G_2||G_3|e^{j(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)}. \quad (\text{A.23})$$

Ze vztahu (A.23) vidíme, že fázovou frekvenční charakteristiku přenosu $G(j\omega)$ můžeme sestrojit tak, že sečteme fázové frekvenční charakteristiky jednotlivých faktorů.

Pro amplitudovou frekvenční charakteristiku v decibelech platí

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |G_1||G_2||G_3| = 20 \log |G_1| + 20 \log |G_2| + 20 \log |G_3|, \quad (\text{A.24})$$

což znamená, že amplitudovou frekvenční charakteristiku přenosu $G(j\omega)$ sestrojíme opět sečtením amplitudových frekvenčních charakteristik jednotlivých faktorů. Výsledná Bodeho frekvenční charakteristika je na obr. A.10. \checkmark

Příklad A.2: Odvodte pravidla pro Bodeho frekvenční charakteristiky přenosu $G(s)$ s n -násobným reálným pólem

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\omega_0}s + 1\right)^n}.$$

Řešení: Nejprve si zadaný přenos $G(s)$ přepíšeme na frekvenční přenos $G(j\omega)$ pomocí substituce (A.22)

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_0} + 1\right)^n}.$$

Pro amplitudu tohoto přenosu platí

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = \left| \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0}\right)^{-n} \right|_{\text{dB}} = -20n \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = -10n \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right). \quad (\text{A.25})$$

Protože hledáme pravidla pro asymptotickou charakteristiku, rozlišíme opět dva případy v závislosti na vzdálenosti ω od ω_0

$$\left| \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-n} \right|_{\text{dB}} \cong -10n \log 1 = 0 \quad \text{pro} \quad \omega \ll \omega_0,$$

$$\left| \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-n} \right|_{\text{dB}} \cong -20n \log \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{pro} \quad \omega \gg \omega_0.$$

Z předchozích vztahů vidíme, že se pravidlo pro vytváření amplitudové charakteristiky pro n -násobný reálný pól liší od jednonásobného reálného pólu pouze sklonem amplitudové charakteristiky, který je v tomto případě $20n$ dB na dekádu. Pokles skutečné amplitudové charakteristiky v místě zlomu určíme dosazením do rovnice (A.25) za $\omega = \omega_0$

$$\left| \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{-n} \right|_{\text{dB}} = -10n \log 2 \doteq -3n \text{ dB} \quad \text{pro} \quad \omega = \omega_0.$$

Nyní si odvodíme pravidlo pro fázovou charakteristiku. Zde platí

$$\arg\{G(j\omega)\} = \arg \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{-n} = -n \arctan \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (\text{A.26})$$

Obdobně jako u amplitudové charakteristiky, i zde rozlišíme limitní případy v závislosti na vzdálenosti ω od ω_0

$$\begin{aligned} \arg \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{-n} &\cong 0^\circ \quad \text{pro} \quad \omega \ll \omega_0, \\ \arg \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{-n} &= -n45^\circ \quad \text{pro} \quad \omega = \omega_0, \\ \arg \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{-n} &\cong -n90^\circ \quad \text{pro} \quad \omega \gg \omega_0. \end{aligned}$$

Z předchozích tří vztahů vidíme, že pravidlo pro vytváření fázové charakteristiky pro n -násobný reálný pól se liší od jednonásobného reálného pólu pouze sklonem fázové charakteristiky, který je $n45^\circ$ na dekádu a konečnou hodnotou fázové charakteristiky, která je $n90^\circ$. Chybu skutečné fázové charakteristiky na frekvencích $0,1\omega_0$ a $10\omega_0$ určíme dosazením do rovnice (A.26) za $\omega = 0,1\omega_0$ a $\omega = 10\omega_0$

$$\begin{aligned} -n \arctan \frac{\omega}{\omega_0} &\cong -n5,7^\circ \quad \text{pro} \quad \omega = 0,1\omega_0, \\ -n \arctan \frac{\omega}{\omega_0} &\cong n5,7^\circ \quad \text{pro} \quad \omega = 10\omega_0. \end{aligned}$$

Podle výše uvedených pravidel si sami nakreslete Bodeho amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku. ✓

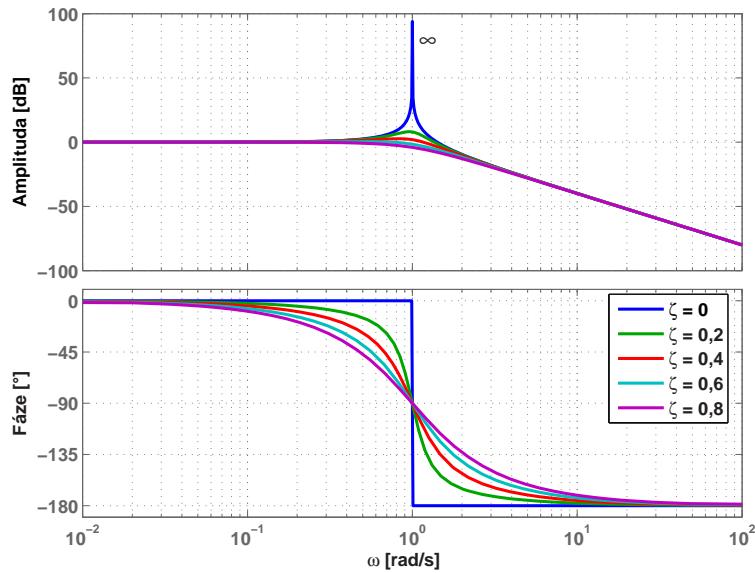
Příklad A.3: Zobrazte Bodeho frekvenční charakteristiky pro přenos, který má dvojici komplexně sdružených pólů

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2},$$

kde $\omega_0 = 1$ a parametr ζ nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Porovnejte, jak se tyto charakteristiky mění v závislosti na změně parametru ζ .

Řešení: Na základě znalostí z kapitoly A.1.1.1 můžeme předpokládat, že pro $\zeta = 0$ bude na amplitudové charakteristice vznikat špička a fáze se bude měnit na zlomové frekvenci ω_0 skokem z 0° na -180° . Naopak pro $\zeta = 1$ se špička na amplitudové charakteristice neobjeví a na fázové charakteristice bude klesání fáze probíhat jako v případě reálného pólu, tedy přes dvě dekády. Toto jsou mezní případy. Jak budou Bodeho frekvenční charakteristiky vypadat pro $\zeta = 0, \zeta = 0,2, \zeta = 0,4, \zeta = 0,6$ a $\zeta = 0,8$ můžeme zjistit z obrázku A.11. V Matlabu je možné tuto úlohu vyřešit například pomocí následujícího kódu.

```
omega = 1;
syms zeta;
jmn = [1 2*zeta*omega omega^2];
figure(1);
for zeta = 1E-5 : 0.2 : 1+1E-12
    G = tf(omega^2,subs([1 2*zeta*omega omega^2]));
    bode(G); hold on;
end
grid on;
legend('\zeta = 0', '\zeta = 0,2', '\zeta = 0,4', '\zeta = 0,6', '\zeta = 0,8');
text(1.1,230,'infty','FontSize',16,'FontWeight','bold');
```



Obrázek A.11: Vliv parametru ζ na Bodeho frekvenční charakteristiky přenosu s dvojicí komplexně sdružených pólů

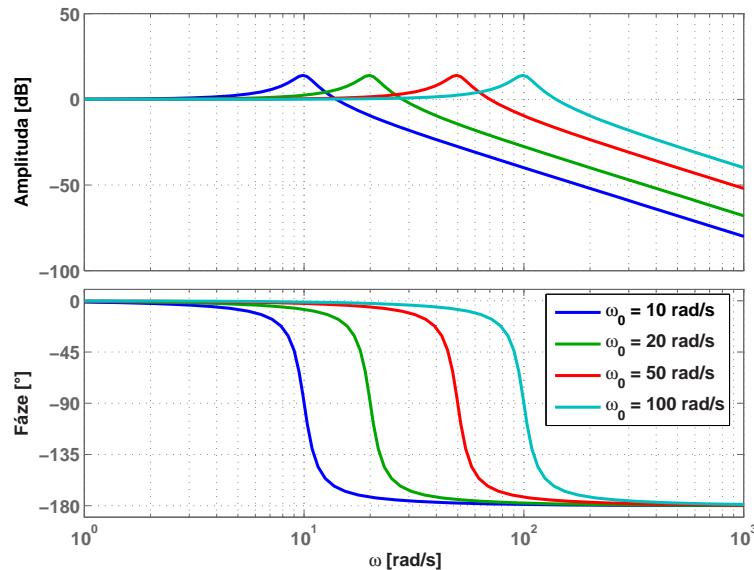
✓

Příklad A.4: Zobrazte Bodeho frekvenční charakteristiky pro přenos, který má dvojici komplexně sdružených pólů.

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2},$$

kde $\zeta = 0,1$ a ω_0 nabývá hodnot z intervalu $\langle 10, 100 \rangle$.

Řešení: S rostoucí frekvencí ω_0 přenosu $G(s)$ se bude zlom na amplitudové charakteristice posouvat k vyšším frekvencím, jak je patrné z obr. A.12. Fázová charakteristika se bude také celá posouvat s rostoucí frekvencí ω_0 vodorovně směrem k vyšším frekvencím viz obr. A.12.



Obrázek A.12: Vliv frekvence ω_0 na Bodeho frekvenční charakteristiky přenosu s dvojicí komplexně sdružených pólů ✓

Příklad A.5: Určete tvar asymptotických frekvenčních charakteristik pro přenos

$$G(j\omega) = \frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_0} - 1}.$$

Řešení: Pro amplitudu přenosu $G(j\omega)$ platí

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = \left| \left(\frac{j\omega}{\omega_0} - 1 \right)^{-1} \right|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 1} = -10 \log \left(\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 1 \right).$$

Stejně jako v kapitole A.1.1.1, kde jsme odvozovali asymptotické Bodeho frekvenční charakteristiky reálného záporného pólu, i zde rozlišíme dva případy v závislosti na vzdálenosti ω od ω_0

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{j\omega}{\omega_0} - 1 \right)^{-1} \right|_{\text{dB}} &\cong -10 \log 1 = 0 \quad \text{pro} \quad \omega \ll \omega_0, \\ \left| \left(\frac{j\omega}{\omega_0} - 1 \right)^{-1} \right|_{\text{dB}} &\cong -20 \log \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{pro} \quad \omega \gg \omega_0. \end{aligned}$$

Z výše uvedených vztahů vidíme, že se tvar Bodeho amplitudové frekvenční charakteristiky pro přenos s kladným reálným pólem od tvaru amplitudové frekvenční charakteristiky přenosu s reálným záporným pólem nijak neliší.

Nyní si odvodíme pravidla pro vytvoření fázové frekvenční charakteristiky. Pro fázi přenosu $G(j\omega)$ platí

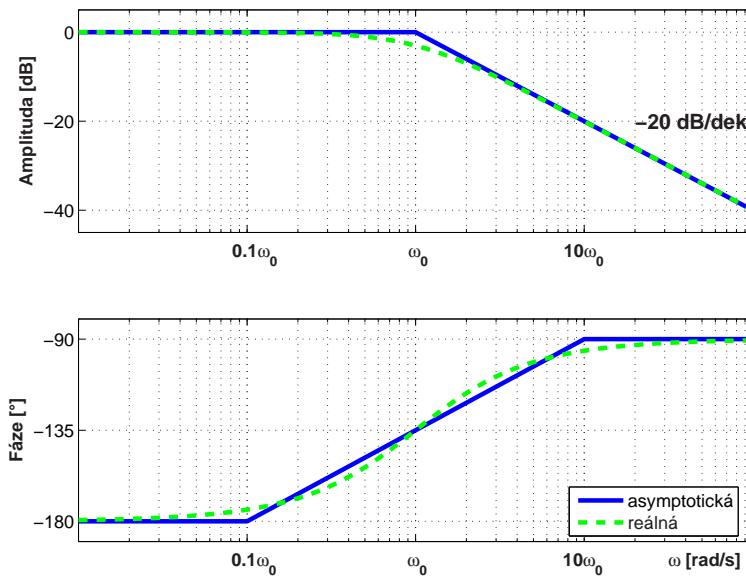
$$\arg\{G(j\omega)\} = \arg\left(\frac{j\omega}{\omega_0} - 1\right)^{-1} = \arccotan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

Opět zde rozlišíme limitní případy v závislosti na vzdálenosti ω od ω_0

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{j\omega}{\omega_0} - 1\right)^{-1} &\cong -180^\circ \quad \text{pro} \quad \omega \ll \omega_0, \\ \arg\left(\frac{j\omega}{\omega_0} - 1\right)^{-1} &= -135^\circ \quad \text{pro} \quad \omega = \omega_0, \\ \arg\left(\frac{j\omega}{\omega_0} - 1\right)^{-1} &\cong -90^\circ \quad \text{pro} \quad \omega \gg \omega_0. \end{aligned}$$

Z těchto vztahů vidíme, že na rozdíl od tvaru fázové frekvenční charakteristiky reálného záporného pólu se tvar fázové charakteristiky přenosu s kladným reálným pólem liší tím, že fázová charakteristika začíná na -180° a končí na -90° .

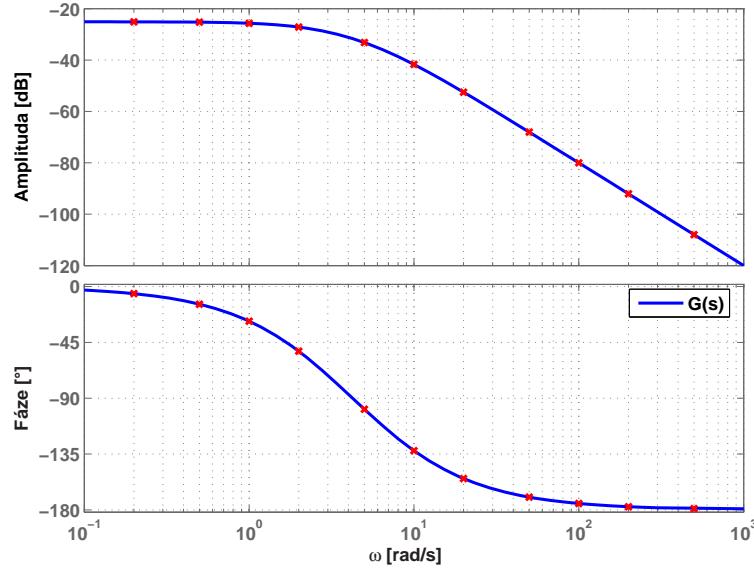
Všechny výše uvedené úvahy pro amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku přenosu s reálným kladným pólem můžeme znázornit graficky na obr. A.13.



Obrázek A.13: Bodeho asymptotické frekvenční charakteristiky přenosu
s kladným reálným pólem

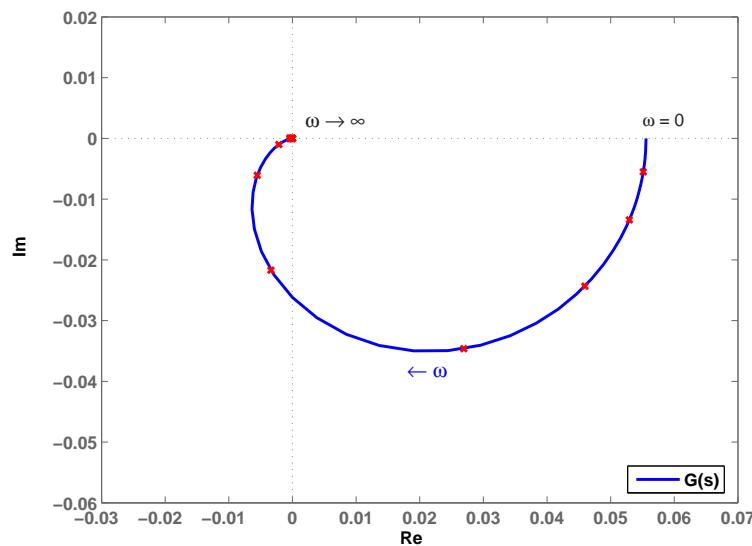
✓

Příklad A.6: Překreslete Bodeho frekvenční charakteristiky přenosu $G(s)$ z obr. A.14 na frekvenční charakteristiku v komplexní rovině.



Obrázek A.14: Bodeho frekvenční charakteristika nějakého přenosu $G(s)$

Řešení: Nejprve určíme body, ve kterých se úhlová frekvence ω blíží nule a nekonečnu. Z fázové charakteristiky zjistíme, že pro $\omega \rightarrow 0$ je fáze rovna 0° a pro $\omega \rightarrow \infty$ je rovna -180° . Z amplitudové charakteristiky vidíme, že s rostoucí frekvencí ω amplituda klesá. Z těchto poznatků již můžeme nakreslit požadovanou frekvenční charakteristiku do komplexní roviny viz obr. A.15.

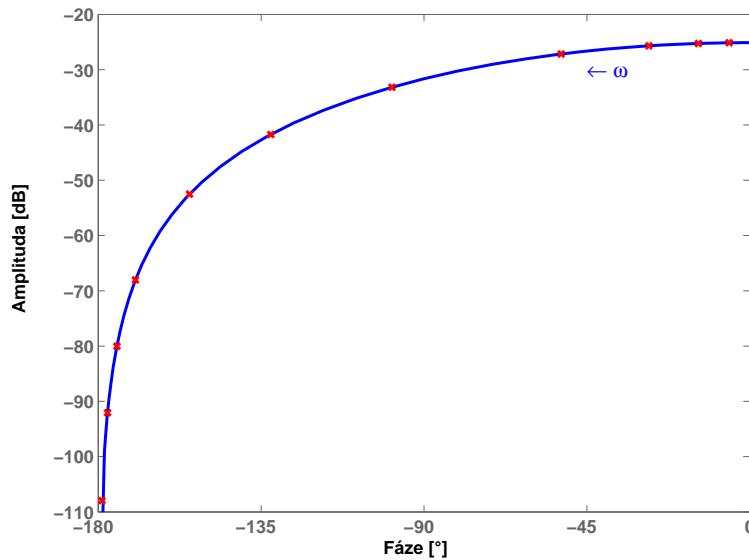


Obrázek A.15: Frekvenční charakteristika v komplexní rovině přenosu $G(s)$

✓

Příklad A.7: Překreslete Bodeho frekvenční charakteristiky přenosu $G(s)$ z obr. A.14 na Nicholsovu charakteristiku.

Řešení: Z kapitoly A.1.3 již víme, že Nicholsova charakteristika je frekvenční přenos $G(j\omega)$ vykreslený v souřadnicích $|G(j\omega)|_{\text{dB}}$ v závislosti na $\arg\{G(j\omega)\}$, kde ω je parametr křivky. Pokud tedy budeme na vodorovnou osu vynášet fázi přenosu $G(s)$ a na svislou osu jí odpovídající amplitudu v decibelech, dostaneme Nicholsovou charakteristiku na obr. A.16.



Obrázek A.16: Nicholsova charakteristika přenosu $G(s)$



Příklad A.8: Zobrazte Bodeho frekvenční charakteristiky přenosu $G(s)$

$$G(s) = \frac{s + 10}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

a vyznačte na nich hodnoty amplitudové a fázové bezpečnosti.

Řešení: Nejprve si zadaný přenos $G(s)$ přepíšeme na frekvenční přenos pomocí substituce (A.22)

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 10}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)}.$$

Amplitudovou bezpečnost GM odečítáme na frekvenci ω_{GM} , pro kterou platí

$$\arg\{G(j\omega_{GM})\} = -180^\circ.$$

V našem příkladě platí

$$\begin{aligned} \arctan \frac{\omega_{GM}}{10} - \arctan \frac{\omega_{GM}}{1} - \arctan \frac{\omega_{GM}}{2} - \arctan \frac{\omega_{GM}}{3} &= -180^\circ \\ \omega_{GM} &\doteq 5,1. \end{aligned}$$

Nyní vypočítáme hodnotu GM dosazením ω_{GM} do vztahu pro amplitudu přenosu $G(j\omega)$

$$GM = \frac{1}{|G(j\omega)|} = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}\sqrt{\omega^2 + 4}\sqrt{\omega^2 + 9}}{\sqrt{\omega^2 + 100}} \quad \text{pro} \quad \omega = \omega_{GM} \doteq 5,1.$$

Po dosazení získáme $GM \doteq 15,01$. Hledané zesílení GM ještě přepočítáme na decibely podle vztahu (A.3)

$$GM \doteq 23,5 \text{ dB}.$$

Fázovou bezpečnost odečítáme na frekvenci ω_{PM} , pro kterou platí

$$|G(j\omega_{PM})| = 1.$$

Odtud

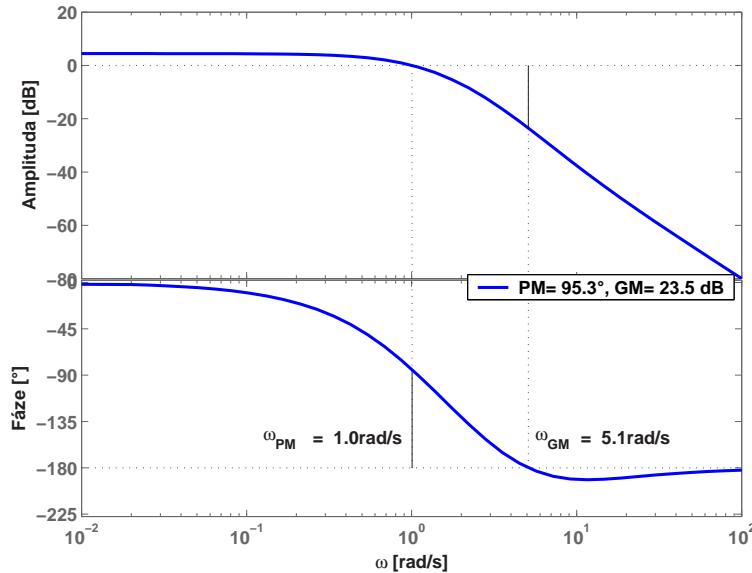
$$\frac{\sqrt{\omega_{PM}^2 + 100}}{\sqrt{\omega_{PM}^2 + 1}\sqrt{\omega_{PM}^2 + 4}\sqrt{\omega_{PM}^2 + 9}} = 1$$

$$\omega_{PM} \doteq 1,00629.$$

Nyní vypočítáme hodnotu PM dosazením ω_{PM} do vztahu pro fázi přenosu $G(j\omega)$

$$PM = \arg\{G(j\omega)\} + 180^\circ \quad \text{pro} \quad \omega = \omega_{PM} \doteq 1,00629$$

Po dosazení $PM \doteq 95,3^\circ$. Výše spočítanou amplitudovou a fázovou bezpečnost zobrazíme do Bodeho frekvenčních charakteristik na obr. A.17.



Obrázek A.17: Bodeho frekvenční charakteristiky s vyznačenou amplitudovou a fázovou bezpečností



Příklad A.9: Zobrazte Bodeho frekvenční charakteristiky přenosu $G(s)$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0,4s + 1}$$

a vyznačte rezonanční převýšení, rezonanční frekvenci a šířku pásma.

Řešení: Zadaný přenos si opět jako v předchozím příkladě přepíšeme na frekvenční přenos pomocí substituce (A.22)

$$G(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 0,4j\omega + 1}.$$

Rezonanční frekvence ω_r odpovídá dle (A.19) maximální hodnotě zesílení přenosu $G(j\omega)$, tedy rezonančnímu zesílení A_r . Zesílení přenosu v našem příkladě je

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + (0,4\omega)^2}}. \quad (\text{A.27})$$

Rezonanční frekvenci ω_r pro maximální hodnotu zesílení můžeme nalézt pomocí derivace

$$\frac{d |G(j\omega)|}{d\omega} = 0.$$

Odtud rezonanční frekvence je $\omega_r \doteq 0,96$ rad/s. Rezonanční zesílení A_r spočítáme po dosazení ω_r do (A.27), tedy $A_r \doteq 2,55$. Rezonanční zesílení A_r můžeme podle vztahu (A.3) přepočítat na decibely $A_r \doteq 8,14$ dB.

Frekvenci ω_{BW} , která určuje šířku pásma, nalezneme podle (A.20) na amplitudové charakteristice tam, kde pokles amplitudové charakteristiky oproti zesílení systému, které odečítáme z Bodeho amplitudové charakteristiky pro nulovou frekvenci ω , je -3 dB. V našem případě vidíme z obr. A.18, že zesílení systému je 0 dB. Frekvenci ω_{BW} tedy budeme odečítat pro

$$|G(j\omega_{BW})|_{\text{dB}} = -3 \text{ dB}.$$

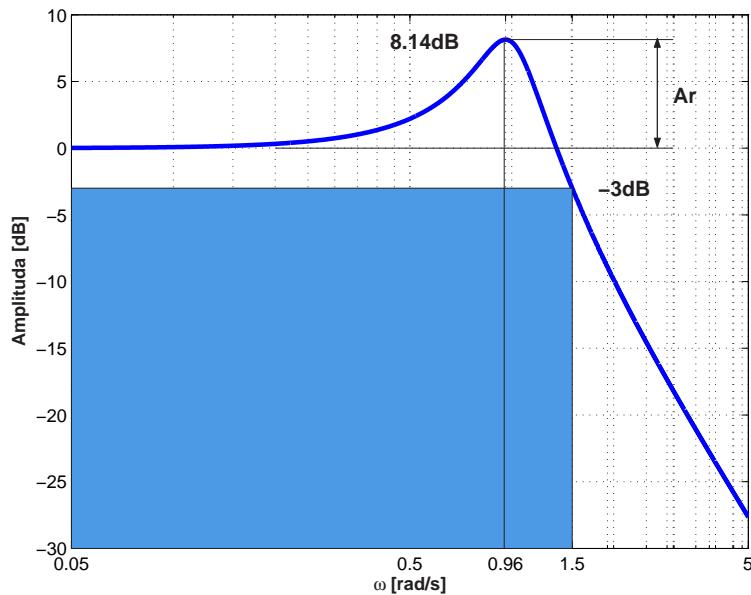
Pro bezrozměrné zesílení platí

$$|G(j\omega_{BW})| = 10^{-3/20},$$

tedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega_{BW}^2)^2 + (0,4\omega_{BW})^2}} &= 10^{-3/20}, \\ \omega_{BW} &\doteq 1,5. \end{aligned}$$

Výše spočítané míry znázorníme do Bodeho frekvenčních charakteristik na obr. A.18.



Obrázek A.18: Bodeho amplitudová charakteristika s vyznačeným rezonančním převýšením, rezonanční frekvencí a šírkou pásma

✓

A.4 Úlohy

Příklad A.10: Pomocí asymptotických charakteristik nakreslete Bodeho frekvenční charakteristiky přenosu

$$G(s) = \frac{100(s + 10)}{(s + 1)(s + 100)}.$$

Příklad A.11: Pomocí asymptotických charakteristik nakreslete Bodeho frekvenční charakteristiky přenosu

$$G(s) = \frac{100s(s + 10)}{(s + 1)(s + 100)}.$$

Příklad A.12: Pomocí asymptotických charakteristik nakreslete Bodeho frekvenční charakteristiky přenosu

$$G(s) = \frac{100(s + 10)}{s(s + 1)(s + 100)}.$$

Příklad A.13: Pomocí asymptotických charakteristik nakreslete Bodeho frekvenční charakteristiky přenosu

$$G(s) = \frac{100(s + 10)}{s^2(s + 1)(s + 100)}.$$

Příklad A.14: Pomocí asymptotických charakteristik nakreslete Bodeho frekvenční charakteristiky přenosu

$$G(s) = \frac{(s^2 + 100)}{(s + 1)^2(s + 100)}.$$

Příklad A.15: Pomocí asymptotických charakteristik nakreslete Bodeho frekvenční charakteristiky přenosu

$$G(s) = \frac{s + 1}{(s^2 + 100)(s + 1000)}.$$

Příklad A.16: Překreslete Bodeho frekvenční charakteristiky z příkladů A.10 až A.15 na frekvenční charakteristiku v komplexní rovině. Poté ověřte správnost těchto charakteristik nakreslením přímo z přenosů $G(s)$.

Příklad A.17: Překreslete Bodeho frekvenční charakteristiky z příkladu A.10 až A.15 na Nicholsovou charakteristiku. Poté ověřte správnost těchto charakteristik nakreslením přímo z přenosů $G(s)$.

Příklad A.18: Uvažujte přenos

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 0,1s + 3}$$

a výpočtem určete rezonanční frekvenci, rezonanční převýšení a šířku pásma. Poté zobrazte Bodeho frekvenční charakteristiky tohoto přenosu a vyznačte na nich tyto hodnoty.

Příklad A.19: Naučte se tvary frekvenčních charakteristik v komplexní rovině následujících proporcionálních přenosů

$$G(s) = k, \quad G(s) = \frac{k}{\tau_1 s + 1}, \quad G(s) = \frac{k}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

a vyznačte na těchto charakteristikách parametry k , τ_1 a τ_2 . Návod: nakreslete si Bodeho frekvenční charakteristiky a poté z nich načrtněte průběh frekvenčních charakteristik v komplexní rovině.

Příklad A.20: Naučte se tvary frekvenčních charakteristik v komplexní rovině následujících integračních přenosů

$$G(s) = \frac{k}{s}, \quad G(s) = \frac{k}{s(\tau_1 s + 1)}, \quad G(s) = \frac{k}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

a vyznačte na těchto charakteristikách parametry k , τ_1 a τ_2 . Návod: nakreslete si Bodeho frekvenční charakteristiky a poté z nich načrtněte průběh frekvenčních charakteristik v komplexní rovině.

Příklad A.21: Naučte se tvary frekvenčních charakteristik v komplexní rovině následujících derivačních přenosů

$$G(s) = ks, \quad G(s) = \frac{ks}{\tau_1 s + 1}, \quad G(s) = \frac{ks}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

a vyznačte na těchto charakteristikách parametry k , τ_1 a τ_2 . Ná pověda: nakreslete si Bodého frekvenční charakteristiky a poté z nich načrtněte průběh frekvenčních charakteristik v komplexní rovině.

Příklad A.22: Předpokládejte systém s přenosem

$$G(s) = \frac{5}{s+1}.$$

Pomocí frekvenčního přenosu nebo frekvenčních charakteristik určete jaký bude mít průběh výstupní signál $y(t)$ po odeznění všech přechodových dějů (pro $t \rightarrow \infty$) pro následující vstupní signály

a) $u(t) = 1(t)$, $y(t) = \dots$,

b) $u(t) = 10 \sin(0,1t)$, $y(t) = \dots$,

c) $u(t) = 10 \sin(t)$, $y(t) = \dots$,

d) $u(t) = 10 \sin(10t)$, $y(t) = \dots$,

e) $u(t) = 10 \sin(100t)$, $y(t) = \dots$,

f) $u(t) = 100 \sin(10t)$, $y(t) = \dots$,

g) $u(t) = 100 \cos(10t)$, $y(t) = \dots$,

h) $u(t) = \delta(t)$, $y(t) = \dots$.

Příklad A.23: Napište přenos systému nebo zdůvodněte jeho neexistenci tak, aby splňoval všechny následující podmínky:

- systém je maximálně druhého řádu,
- poslední zlom na amplitudové charakteristice je pro $\omega = 10$ rad/s,
- frekvenční charakteristika v komplexní rovině končí v počátku komplexní roviny.

Příklad A.24: Napište přenos systému nebo zdůvodněte jeho neexistenci tak, aby splňoval všechny následující podmínky:

- řád systému je 2,
- fázová frekvenční charakteristika začíná v -90° ,
- poslední zlom amplitudové frekvenční charakteristiky je na frekvenci 10 rad/s,
- fázová frekvenční charakteristika není nikdy pod hodnotou -90° ,
- pro velké frekvence má systém nulový fázový posun a amplituda je 20 dB.

Příklad A.25: Napište přenos systému nebo zdůvodněte jeho neexistenci tak, aby splňoval všechny následující podmínky:

- řád systému je 4,
- systém nemá žádnou nulu,
- v asymptotických charakteristikách klesá fáze trvale o $90^\circ/\text{dek.}$ od frekvence 0,1 do 1000 rad/s
- pro malé frekvence má systém zesílení -20 dB .

Příklad A.26: Napište přenos systému nebo zdůvodněte jeho neexistenci tak, aby splňoval všechny následující podmínky:

- frekvenční charakteristika v komplexní rovině začíná na reálné ose v bodě 10,
- frekvenční charakteristika v komplexní rovině končí na reálné ose v bodě 1,
- řád systému je maximálně 2,
- frekvenční charakteristika v komplexní rovině prochází jen jedním kvadrantem.

Příklad A.27: Napište přenos systému nebo zdůvodněte jeho neexistenci tak, aby splňoval všechny následující podmínky:

- frekvenční charakteristika v komplexní rovině začíná v nekonečnu pod úhlem $-\pi/2$,
- frekvenční charakteristika v komplexní rovině končí v počátku,
- řád systému je maximálně 2,

- zesílení systému je 5.

Příklad A.28: Napište přenos systému nebo zdůvodněte jeho neexistenci tak, aby splňoval všechny následující podmínky:

- pro $\omega = 1 \text{ rad/s}$ se asymptotická a skutečná frekvenční charakteristika liší o cca 3 dB,
- systém má minimálně dva póly, které jsou od sebe vzdáleny o 9 rad/s,
- systém vůbec nepropouští signál $y(t) = \sin(10t)$.

Příklad A.29: Předpokládejte systém s přenosem

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}.$$

Určete frekvenci ω , na které frekvenční charakteristika v Gaussově rovině protíná imaginární osu.

Příklad A.30: Rozmyslete si souvislosti počátečních a koncových hodnot amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky vzhledem k počtu a poloze jednotlivých kořenů čitatele a jmenovatele přenosu $G(s)$.

Příklad A.31: Odvod'te pravidla pro kreslení Bodeho frekvenční charakteristiky přenosu s n -násobnou reálnou nulou.