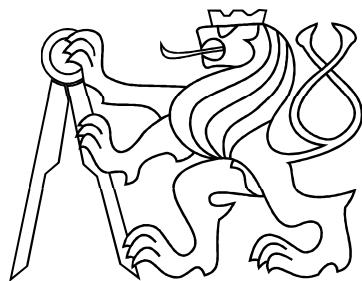


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ



DIPLOMOVÁ PRÁCE

Řízení rotačního kyvadla

Praha, 2008

Bc. Zbyněk Hegr

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne 22.5.2008

Z. Hogař  
podpis

## **Poděkování**

Děkuji především vedoucímu diplomové práce Ing. Františku Vaňkovi, za odborné vedení diplomové práce, vstřícnost při řešení problémů a ochotu zodpovídat moje dotazy.

Děkuji také rodině a přátelům za veškerou podporu při studiu.

# **Abstrakt**

Tato práce se zabývá identifikací modelu rotačního kyvadla, řízením v dolní i horní ustálené poloze pomocí různých typů regulátorů. Závěr práce je věnován vyšvihnutí kyvadla z dolní do horní ustálené polohy a stabilizaci kyvadla v této poloze.

## **Abstract**

This thesis deals with identification of rotary inverted pendulum model, control in lower and upper steady position using various types of controllers. The end of this thesis solves the swing up of the pendulum from the lower to the upper steady position and stabilization of the pendulum in this position.

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta elektrotechnická

Katedra řídicí techniky

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Zbyněk Hegr**

Studijní program: Elektrotechnika a informatika (magisterský), strukturovaný  
Obor: Kybernetika a měření, blok KM1 - Řídicí technika

Název tématu: **Inverzní rotační kyvadlo**

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se s modelem rotačního kyvadla.
2. Vytvořte úplný matematický popis modelu včetně podrobného popisu nelinearit, uvažujte spodní i horní polohu kyvadla.
3. Proveďte sadu měření potřebných pro identifikaci systému.
4. Identifikujte parametry modelu, získaný model porovnejte s reálným systémem.
5. Navrhněte regulátory různých struktur (P/PI/PD/PID-LQ-kaskadní-atd.), které by pracovali v dolní i horní poloze (inverzní kyvadlo).
6. Pokuste se implementovat takový regulátor, který by vyšvihl kyvadlo z dolní polohy do horní.
7. Zpracujte graficky zajímavé demo pro prezentaci činnosti modelu.

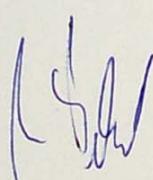
Seznam odborné literatury:

Dodá vedoucí práce

Vedoucí: Ing. František Vaněk

Platnost zadání: do konce zimního semestru 2008/2009

prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.  
vedoucí katedry



doc. Ing. Boris Šimák, CSc.  
děkan



V Praze dne 10. 9. 2007

# Obsah

|  |             |
|--|-------------|
| <b>Seznam obrázků</b>                                      | <b>viii</b> |
| <b>Seznam tabulek</b>                                      | <b>x</b>    |
| <b>1 Úvod</b>  | <b>1</b>    |
| <b>2 Popis rotačního kyvadla</b>                           | <b>3</b>    |
| 2.1 Popis fyzického modelu kyvadla . . . . .               | 3           |
| 2.2 Matematický popis systému inverzního kyvadla . . . . . | 4           |
| 2.2.1 Popis motoru . . . . .                               | 4           |
| 2.2.2 Popis kyvadla . . . . .                              | 6           |
| 2.2.3 Linearizace v pracovních bodech . . . . .            | 8           |
| 2.2.4 Linearizovaný model, jeho ověření . . . . .          | 9           |
| <b>3 Identifikace</b>                                      | <b>12</b>   |
| 3.1 Identifikace motoru . . . . .                          | 12          |
| 3.1.1 Mrtvé pásmo motoru . . . . .                         | 12          |
| 3.1.2 Přechodové charakteristiky, určení přenosu . . . . . | 13          |
| 3.2 Identifikace kyvadla . . . . .                         | 15          |
| 3.3 ARX model . . . . .                                    | 15          |
| 3.3.1 Získání dat . . . . .                                | 16          |
| 3.3.2 Určení přenosů . . . . .                             | 16          |
| <b>4 Regulace kyvadla v dolní poloze</b>                   | <b>22</b>   |
| 4.1 PD regulátory . . . . .                                | 22          |
| 4.2 LQ regulace . . . . .                                  | 24          |
| 4.2.1 Kalmanův filtr . . . . .                             | 24          |
| 4.2.2 LQ regulátory . . . . .                              | 27          |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>5 Regulace kyvadla v horní poloze</b>            | <b>31</b> |
| 5.1 PID regulátory . . . . .                        | 31        |
| 5.1.1 Stabilizace kyvadla . . . . .                 | 32        |
| 5.1.2 Řízení polohy ramene . . . . .                | 34        |
| 5.2 LQ regulace . . . . .                           | 35        |
| 5.2.1 Kalmanův filtr . . . . .                      | 35        |
| 5.2.2 Stabilizace kyvadla . . . . .                 | 37        |
| <b>6 Vyšvihnutí kyvadla z dolní do horní polohy</b> | <b>40</b> |
| <b>7 Demo pro prezentaci činnosti modelu</b>        | <b>43</b> |
| <b>8 Závěr</b>                                      | <b>44</b> |
| <b>Literatura</b>                                   | <b>45</b> |
| <b>A Obsah přiloženého CD</b>                       | <b>I</b>  |
| <b>B Seznam použitého softwaru</b>                  | <b>II</b> |

# Seznam obrázků

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Inverzní rotační kyvadlo   | 2  |
| 2.1  | Schématické znázornění modelu kyvadla  | 4  |
| 2.2  | Síly působící na kyvadlo   | 7  |
| 2.3  | Poloha ramene  | 9  |
| 2.4  | Poloha kyvadla   | 10 |
| 2.5  | Pád kyvadla z horní polohy   | 11 |
| 3.1  | Mrtvé pásmo motoru   | 12 |
| 3.2  | Přechodové charakteristiky   | 13 |
| 3.3  | Normalizované přechodové charakteristiky, průměrná hodnota                               | 14 |
| 3.4  | Porovnání reálné a simulované přechodové charakteristiky                                 | 14 |
| 3.5  | Přechodové charakteristiky   | 16 |
| 3.6  | Naměřená data pro identifikaci motoru  | 17 |
| 3.7  | Naměřená data pro identifikaci celé soustavy   | 17 |
| 3.8  | Simulovaná a měřená poloha ramene  | 18 |
| 3.9  | Porovnání simulovaných přechodových charakteristik                                       | 19 |
| 3.10 | Simulovaná a měřená poloha kyvadla   | 20 |
| 3.11 | Poloha některých pólů a nul přenosů  | 21 |
| 3.12 | Přechodové charakteristiky   | 21 |
| 4.1  | Kaskádní zapojení regulátorů   | 23 |
| 4.2  | Regulace polohy ramene bez regulace polohy kyvadla                                       | 24 |
| 4.3  | Regulace polohy ramene bez regulace polohy kyvadla                                       | 25 |
| 4.4  | Porovnání regulace polohy ramene s regulací polohy kyvadla a bez regulace polohy kyvadla | 25 |
| 4.5  | Porovnání regulace polohy ramene s regulací polohy kyvadla a bez regulace polohy kyvadla | 26 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 4.6  | Měřený a odhadovaný výstup . . . . .   | 27 |
| 4.7  | Měřený a odhadovaný výstup . . . . .   | 28 |
| 4.8  | Srovnání LQ regulátorů . . . . .   | 28 |
| 4.9  | Srovnání LQ regulátorů . . . . .   | 29 |
| 5.1  | Stabilizace kyvadla v horní poloze . . . . .   | 32 |
| 5.2  | Stabilizace kyvadla v horní poloze . . . . .   | 33 |
| 5.3  | Vliv poruch na stabilizaci kyvadla . . . . .   | 33 |
| 5.4  | Vliv strmosti změny požadované hodnoty $\varphi$ . . . . .                             | 34 |
| 5.5  | Vliv strmosti změny požadované hodnoty $\varphi$ . . . . .                             | 35 |
| 5.6  | Vliv zpětné vazby polohy kyvadla na polohu ramene . . . . .                            | 36 |
| 5.7  | Vliv zpětné vazby polohy kyvadla na polohu ramene . . . . .                            | 37 |
| 5.8  | Zapojení Kalmanových filtrů a LQ regulátoru . . . . .                                  | 38 |
| 5.9  | Simulovaná stabilizace kyvadla LQ regulátorem v horní poloze, poloha kyvadla . . . . . | 39 |
| 5.10 | Simulovaná stabilizace kyvadla LQ regulátorem v horní poloze, poloha ramene . . . . .  | 39 |
| 6.1  | SIMULINKové schema pro švih a stabilizaci kyvadla v horní poloze . . .                 | 41 |
| 6.2  | Vstupní signál pro vyšvihnutí kyvadla z dolní do horní polohy . . . . .                | 41 |
| 6.3  | Švih kyvadla z dolní do horní polohy . . . . .   | 42 |
| 7.1  | GUI pro prezentaci činnosti modelu . . . . .   | 43 |

# Seznam tabulek

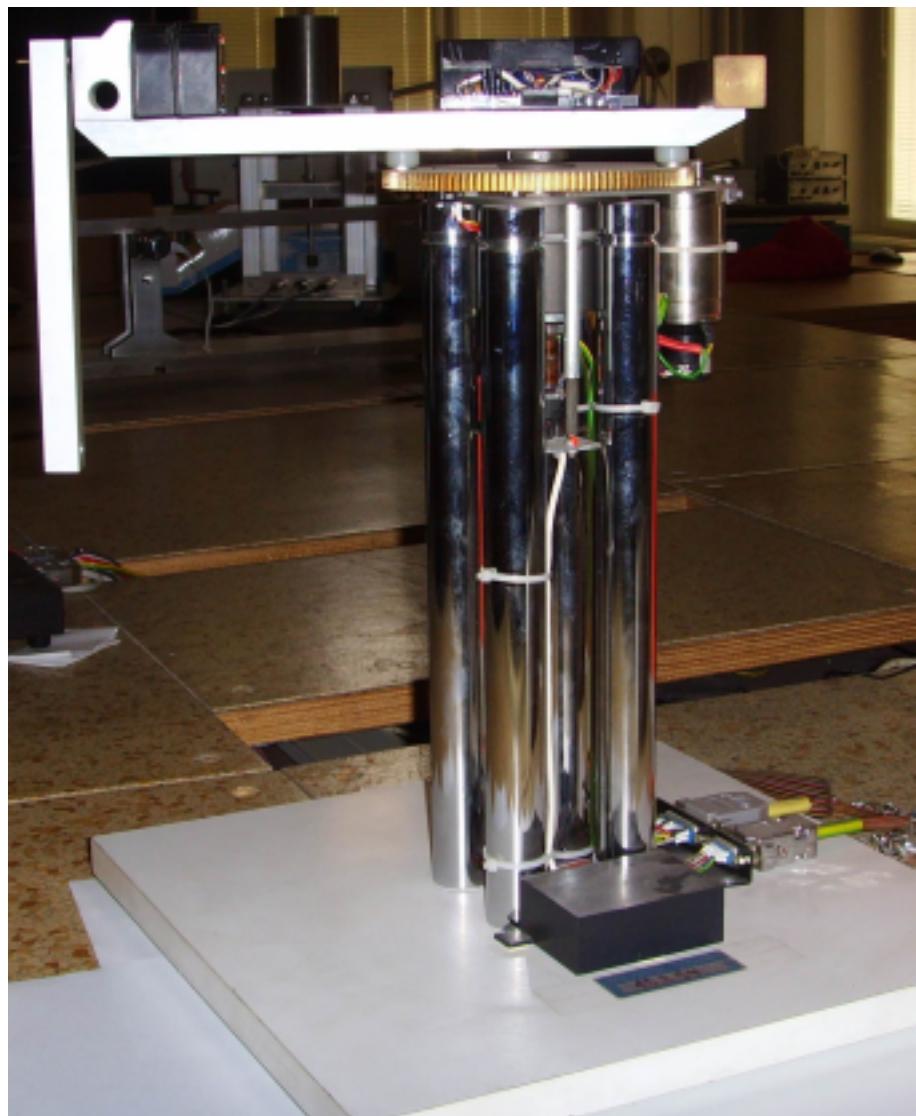
|     |   |    |
|-----|---|----|
| 4.1 | PD regulátory - dolní poloha . . . . .        | 23 |
| 4.2 | Porovnání LQ regulátorů . . . . .             | 29 |
| 4.3 | Póly ( $\mathbf{A} - \mathbf{Bk}$ ) . . . . . | 30 |
| 5.1 | Značení přechodových dějů . . . . .           | 34 |

# Kapitola 1

## Úvod

Model kyvadla je velmi názorným prostředkem pro demonstraci dvou základních druhů systémů, díky jeho dvěma rovnovážným bodům. Ve spodní rovnovážné poloze se jedná o kmitavý systém, v horní poloze se jedná o systém astabilní. Vzhledem k tomu, že tento systém je model rotačního kyvadla s nekonečně dlouhou dráhou v úhlu ramene, nemusí se brát ohled na absolutní polohu ramene, což zjednoduší veškeré experimenty oproti lineárnímu modelu kyvadla (posuvný vozík s kyvadlem). Fotografie modelu je na obrázku 1.1, schématické znázornění pak na obrázku 2.1

Inverzní kyvadlo je systém, který se chová podobně jako družice při přesunu na oběžné dráze, proto i řízení inverzního kyvadla najde své uplatnění v praxi. Také se jedná o velmi názorný prostředek pro výuku řízení astabilních systémů. Vyšvihnutí kyvadla z dolní do horní polohy je zajisté poutavou ukázkou funkční regulace tohoto zajímavého systému.



Obrázek 1.1: Inverzní rotační kyvadlo

# Kapitola 2

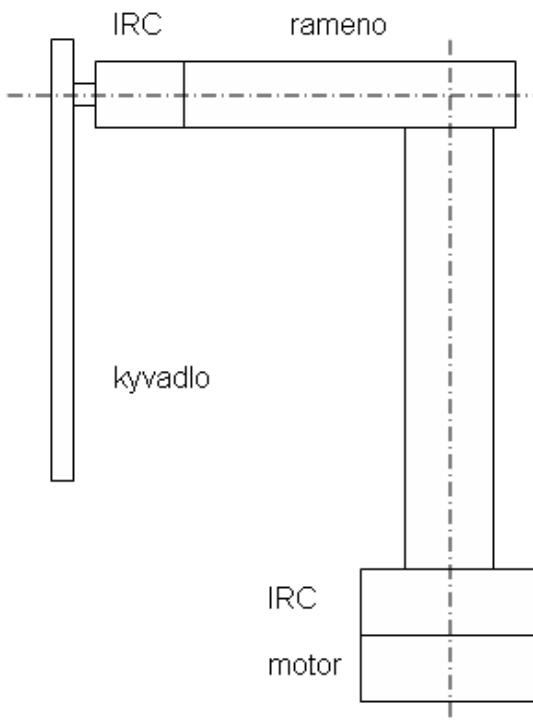
## Popis rotačního kyvadla

### 2.1 Popis fyzického modelu kyvadla

Model rotačního kyvadla má jeden vstup a dva výstupy, schématicky je model znázorněn na obrázku 2.1

Vstupem je napětí na stejnosměrném motoru (-10 až +10V), který otáčí ramenem kolem svislé osy. Vzhledem k přístupu k modelu z prostředí MATLABu jsou veškerá napětí nastavována v rozmezí -1 až 1 jako bezrozměrné hodnoty.

Výstupy systému jsou natočení ramena kolem svislé osy (natočení motoru) a poloha samotného kyvadla vzhledem k vertikální ose. Obě tyto polohy jsou měřeny inkrementálními snímači. Snímač natočení ramene má 7311 pulsů na otáčku, snímač polohy kyvadla má 1996 pulsů na otáčku. Tyto hodnoty jsem vždy přepočítal na úhel natočení ve stupních.



Obrázek 2.1: Schématické znázornění modelu kyvadla

## 2.2 Matematický popis systému inverzního kyvadla

Při sestavování rovnic popisujících tento model jsem vycházel z popisu stejnosměrného motoru a inverzního kyvadla podle základních fyzikálních zákonů, jako je rovnost momentů [7].

### 2.2.1 Popis motoru

Chování stejnosměrného motoru popisují dvě základní rovnice, rovnice mechanická 2.1 a rovnice elektrická 2.2. Mechanická se týká silových momentů motoru, elektrická pak napětí na motoru.

$$M = J\dot{\omega} + M_z \quad (2.1)$$

- $M$  [ $Nm$ ] - moment motoru
- $J$  [ $kg \cdot m^2$ ] - moment setrvačnosti motoru
- $\dot{\omega}$  [ $s^{-2}$ ] - úhlové zrychlení
- $M_z$  [ $Nm$ ] - moment zátěže

$$u = u_i + Ri + L \frac{di}{dt} \quad (2.2)$$

- $u$  [ $V$ ] - elektrické napětí na svorkách motoru
- $u_i$  [ $V$ ] - indukované elektrické napětí v kotvě
- $R$  [ $\Omega$ ] - elektrický odpor vinutí
- $i$  [ $A$ ] - elektrický proud motoru
- $L$  [ $H$ ] - indukčnost vinutí motoru

Moment setrvačnosti motoru bude v tomto případě pro zjednodušení zahrnovat i moment setrvačnosti dalších částí modelu připevněných k hřídeli motoru, zejména ramene. Další nezbytné rovnice jsou:

rovnice popisující vztah mezi mechanickým momentem a elektrickým proudem motoru

$$M = ki \quad (2.3)$$

a rovnice vyjadřující vztah mezi otáčkami motoru a napětím na rotoru

$$u_i = k \cdot \omega_M, \quad (2.4)$$

kde  $k$  je konstanta úměrná magnetickému toku, který je závislý na budícím proudu. Protože je motor buzen permanentním magnetem, je budící magnetický tok konstantní.

Do rovnice 2.1 dosadíme za  $M$  podle rovnice 2.3 a za  $M_z$  dosadíme podle následující rovnice 2.5.

$$M_z = B\omega + \dot{\omega}m_k \sin(\varphi) \quad (2.5)$$

- $B$  - strmost viskózní charakteristiky (tlumení)
- $\omega$  [ $rad \cdot s^{-1}$ ] - úhlová rychlosť
- $m_k$  [ $kg$ ] - hmotnosť kyvadla

- $\varphi$  [rad] - úhel natočení kyvadla

Člen  $B\omega$  představuje viskózní tlumení, člen  $\dot{\omega}m_k \sin(\varphi)$  zohledňuje změnu působení hmotnosti kyvadla proti síle motoru při různém natočení kyvadla. Tento člen bude významný zejména při pokusu vyšvihnout kyvadlo ze spodní do horní stabilní polohy. Po dosazení bude mít tedy rovnice 2.1 tvar

$$ki = J\dot{\omega} + B\omega + \dot{\omega}m_k \sin(\varphi). \quad (2.6)$$

Z rovnice 2.2 vyjádříme proud  $i$ , indukčnost vinutí motoru můžeme zanedbat, u takového motoru je velmi malá, a dosadíme do předchozí rovnice 2.6, ze které zároveň vyjádříme úhlové zrychlení  $\ddot{\omega}$ . Po několika úpravách dostaneme výsledný tvar

$$\ddot{\omega} = \frac{ku}{R(J + m_k \sin(\varphi))} - \frac{k^2 + BR}{R(J + m_k \sin(\varphi))} \omega. \quad (2.7)$$

### 2.2.2 Popis kyvadla

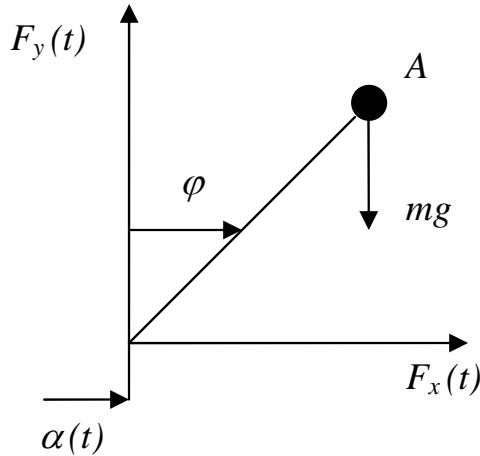
Kyvadlo je balancováno pohyblivým ramenem ve své nestabilní poloze podle obrázku 2.2. Uvažujme pouze pohyb v jednom směru, tedy vzhledem k pohybu po kružnici ve směru síly  $F_x$ , která je vždy kolmá na osu ramene. Kyvadlo má hmotnost  $m_k$ , moment setrvačnosti  $J$  vzhledem k těžišti a vzdálenost těžiště od bodu závěsu  $l$ . V bodě závěsu působí na kyvadlo vertikální a horizontální síla  $F_x(t)$  a  $F_y(t)$ . V těžišti působí síla  $F_g = m_k g$ . Vstupem do tohoto systému je změna úhlu natočení ramene  $\alpha(t)$ , která je vyvozena působením motoru popsaného v předešlé podkapitole. Výstupem je pak zmíněný úhel  $\alpha(t)$ , tedy poloha ramene, a úhel natočení kyvadla  $\varphi(t)$ . Chování kyvadla je popsáno následující soustavou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} m_k \frac{d^2}{dt^2} [\alpha(t) + l \sin(\varphi(t))] &= F_x(t) - C \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2, \\ m_k \frac{d^2}{dt^2} [l \cos(\varphi(t))] &= F_y(t) - m_k g + C \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \\ J \frac{d^2}{dt^2} \varphi &= l F_y(t) \sin(\varphi(t)) - l F_x(t) \cos(\varphi(t)). \end{aligned}$$

Konstanta  $C$  je substitucí konstant pro výpočet odporu vzduchu podle Newtonova zákona odporu

$$F_v = \frac{1}{2} S C_x \rho v^2$$

kde  $S$  je plocha kolmá na směr pohybu tělesa,  $C_x$  je součinitel odporu,  $\rho$  je hustota prostředí, tedy vzduchu, a  $v$  je rychlosť.



Obrázek 2.2: Síly působící na kyvadlo

Po úpravě

$$\begin{aligned}
 m_k\ddot{\alpha}(t) + m_kl\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - m_kl(\dot{\varphi})^2 \sin(\varphi) &= F_x - C(\dot{\alpha})^2, \\
 -m_kl\ddot{\varphi} \sin(\varphi) - m_kl(\dot{\varphi})^2 \cos(\varphi) &= F_y - m_kg + C(\dot{\varphi})^2, \\
 J\ddot{\varphi} &= lF_y \sin(\varphi) - lF_x \cos(\varphi). \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

Do rovnice 2.8 dosadíme za  $F_x$  a  $F_y$  z předešlých dvou rovnic

$$\begin{aligned}
 J\ddot{\varphi} &= l \sin(\varphi) [m_kg - m_kl\ddot{\varphi} \sin(\varphi) - m_kl(\dot{\varphi})^2 \cos(\varphi) - C(\dot{\varphi})^2] - \\
 &\quad - l \cos(\varphi) [m_k\ddot{\alpha} + m_kl\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - m_kl(\dot{\varphi})^2 \sin(\varphi) + C(\dot{\alpha})^2],
 \end{aligned}$$

po úpravě

$$-g \sin(\varphi) + \ddot{\varphi} \left( \frac{J + m_kl^2}{ml} \right) + \ddot{\alpha} \cos(\varphi) + \frac{C}{m_k} ((\dot{\varphi})^2 \sin(\varphi) + (\dot{\alpha})^2 \cos(\varphi)) = 0.$$

Z předchozího vztahu plyne výsledný tvar rovnice

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{l_1} \sin(\varphi) + \frac{1}{l_1} \ddot{\alpha} \cos(\varphi) + \frac{C}{m_k l_1} ((\dot{\varphi})^2 \sin(\varphi) + (\dot{\alpha})^2 \cos(\varphi)) = 0, \tag{2.9}$$

kde  $l_1 = \frac{J + m_kl^2}{ml}$  je tzv. efektivní délka kyvadla.

Celý systém inverzního kyvadla je popsán diferenciální rovnicí 2.9 a diferenciální rovnicí motoru 2.7, tedy soustavou rovnic

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} - \frac{g}{l_1} \sin(\varphi) + \frac{1}{l_1} \ddot{\alpha} \cos(\varphi) + \frac{C}{m_k l_1} ((\dot{\varphi})^2 \sin(\varphi) + (\dot{\alpha})^2 \cos(\varphi)) &= 0, \\ \ddot{\alpha} &= \frac{ku}{R(J + m_k \sin(\varphi))} - \frac{k^2 + BR}{R(J + m_k \sin(\varphi))} \dot{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

### 2.2.3 Linearizace v pracovních bodech

Systém inverzního kyvadla má dva rovnovážné stavy, stabilní a nestabilní. Nestabilní stav je při  $\varphi = 0^\circ$ , tedy když je kyvadlo v horní rovnovážné poloze a stabilní stav, kdy je  $\varphi = 180^\circ$ , tedy dolní rovnovážné poloze.

Nejprve převedeme dvě diferenciální rovnice druhého řádu 2.10 na 4 diferenciální rovnice prvního řádu. Stavový vektor systému je

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\varphi, \dot{\varphi}, \alpha, \dot{\alpha}]^T,$$

a stavové rovnice jsou

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{l_1} \sin(x_1) - \frac{1}{l_1} \left( \frac{ku}{JR} - \frac{k^2 - BR}{JR} x_4 \right) \cos(x_1) - \frac{C}{m_k l_1} (x_2^2 \sin(x_1) + x_4^2 \cos(x_1)), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \frac{ku}{JR} - \frac{k^2 - BR}{JR} x_4.\end{aligned}$$

Provedeme linearizaci těchto stavových rovnice kolem nominálního řešení  $\varphi = 0$ ,  $h(t) = 0$ ,  $\dot{\alpha}(t) = 0$ , tedy dolní ustálená poloha.

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{180} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-g}{l_1} & 0 & 0 & \frac{k^2 - BR}{l_1 JR} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-k^2 + BR}{JR} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{180} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{l_1 JR} \\ 0 \\ \frac{k}{JR} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Výstupní veličiny jsou  $y_1 = \varphi$  a  $y_2 = \alpha$ .

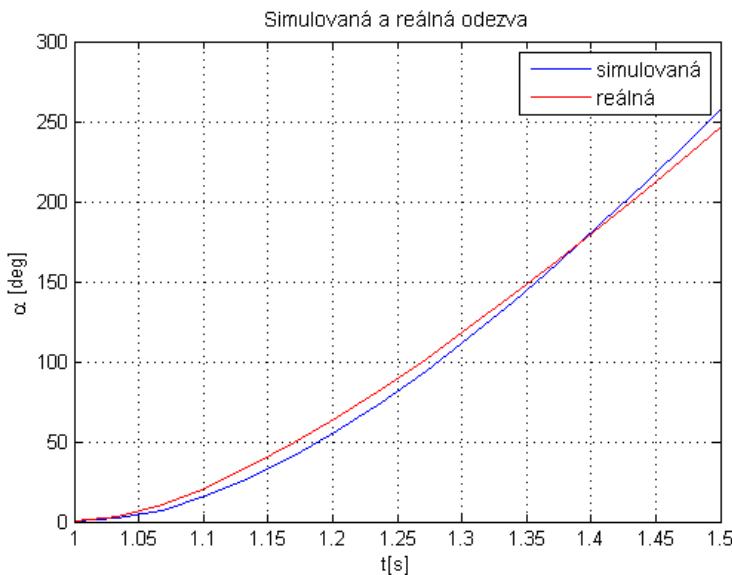
Obdobně pro horní ustálenou polohu kyvadla

$$\mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g}{l_1} & 0 & 0 & \frac{-k^2+BR}{l_1JR} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-k^2+BR}{JR} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-k}{l_1JR} \\ 0 \\ \frac{k}{JR} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

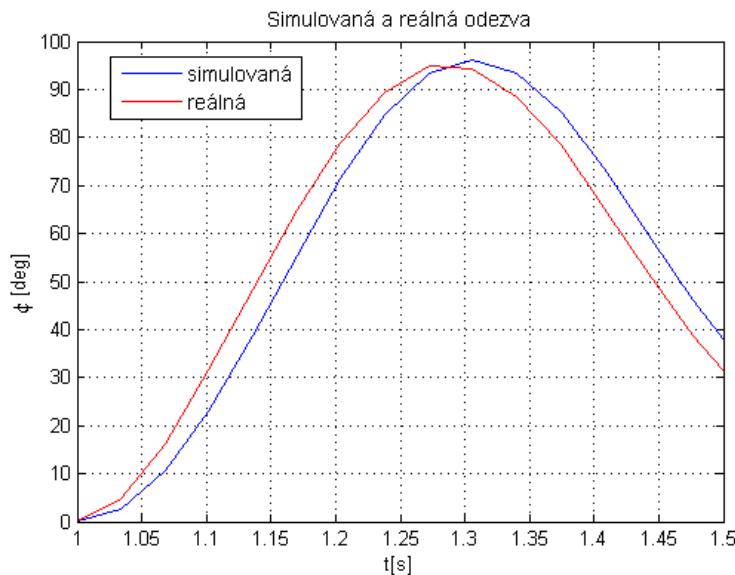
#### 2.2.4 Linearizovaný model, jeho ověření

V předchozí kapitole jsme odvodili popis systému inverzního kyvadla. Pro jeho další použití, zejména při pozdějším návrhu LQ regulátorů, je však potřeba vhodně navrhnout konstanty do lineárního modelu. Některé parametry reálného systému jsem byl schopen zjistit s dostatečnou předností, jiné jsem musel odhadnout. Chování modelu jsem se snažil úpravami těchto konstant co nejvíce přiblížit reálnému chování systému v okolí pracovních bodů. Jako referenci jsem zvolil odezvu systému na skok vstupního napětí z 0 na 4V v dolní poloze kyvadla. Odpovídající odezvy jsou na následujících obrázcích 2.3 a 2.4.



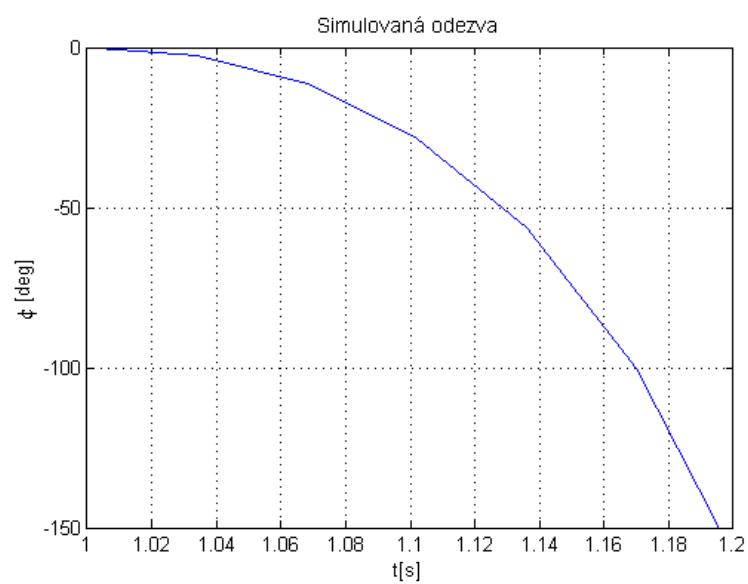
Obrázek 2.3: Poloha ramene

Porovnání chování modelu a reálného systému v horní ustálené poloze jsem vzhledem ke



Obrázek 2.4: Poloha kyvadla

špatně definovatelným podmínkám experimentu prováděl jen velmi přibližně. Parametry systému však zůstávají pro oba ustálené stavy stejné, dynamika systému se tedy nemění. Chování modelu kyvadla odpovídá očekávání. Chování ramene je stejné jako v předchozím případě viz 2.3, simulovaná odezva na obrázku 2.5 odpovídá rychlému pádu kyvadla z horní ustálené polohy.



Obrázek 2.5: Pád kyvadla z horní polohy

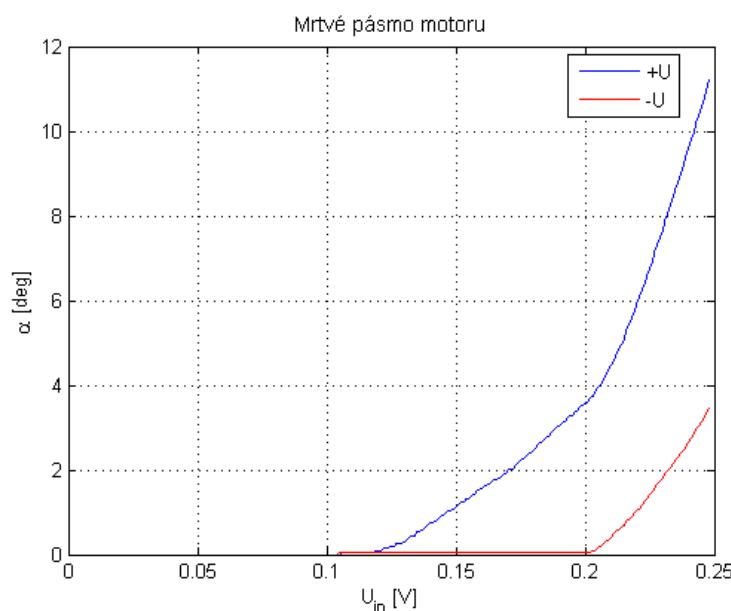
# Kapitola 3

## Identifikace

### 3.1 Identifikace motoru

#### 3.1.1 Mrtvé pásmo motoru

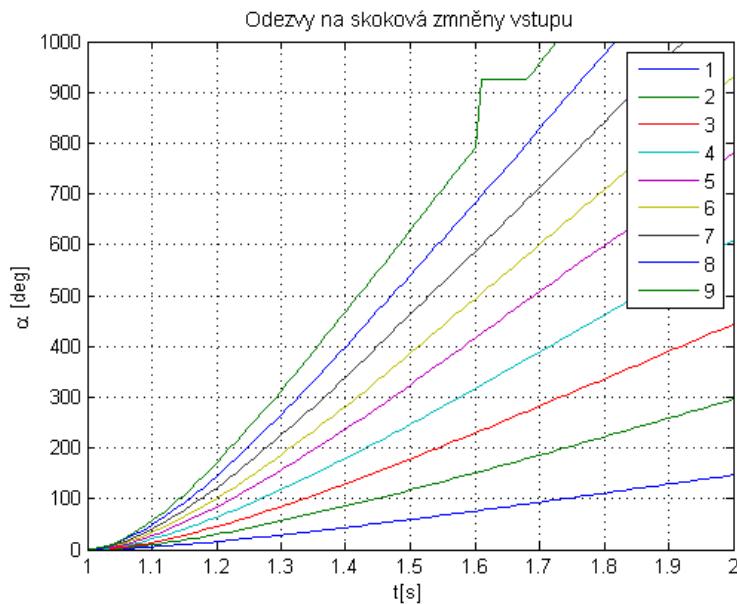
Motor se kvůli tření neroztáčí od nejnižších hodnot vstupního napětí, ale až když vstupní napětí dosáhne určité úrovně. Hodnota takového napětí je však pro oba směry otáčení motoru různá. Na obrázku 3.1 jsou vidět napětí, při kterých se motor rozběhne. Pro lepší přehlednost jsou veškeré hodnoty v absolutní hodnotě.



Obrázek 3.1: Mrtvé pásmo motoru

### 3.1.2 Přechodové charakteristiky, určení přenosu

Pro určení přenosu motoru bylo nutné naměřit přechodové charakteristiky motoru. Měření jsem provedl tak, že jsem na vstup motoru přiváděl signál -10 až 10 V. Odezvy na kladné a záporné hodnoty jsem porovnal, prakticky se nelišily, proto jsme pro další postup použil jen odezvy na kladné hodnoty napětí, které jsou na obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Přechodové charakteristiky

Pro další práci bylo nutné normalizovat odezvy kvůli různým vstupním napětím. Poté jsem určil průměrnou odezvu podle které jsem určil přenos systému. Normalizované odezvy včetně průměrné hodnoty jsou na obrázku 3.3.

V souladu s teoretickým popisem je zřejmé, že motor má přechodovou charakteristiku, která odpovídá přechodové charakteristice astatického systému prvního řádu. Přenos tedy bude ve tvaru

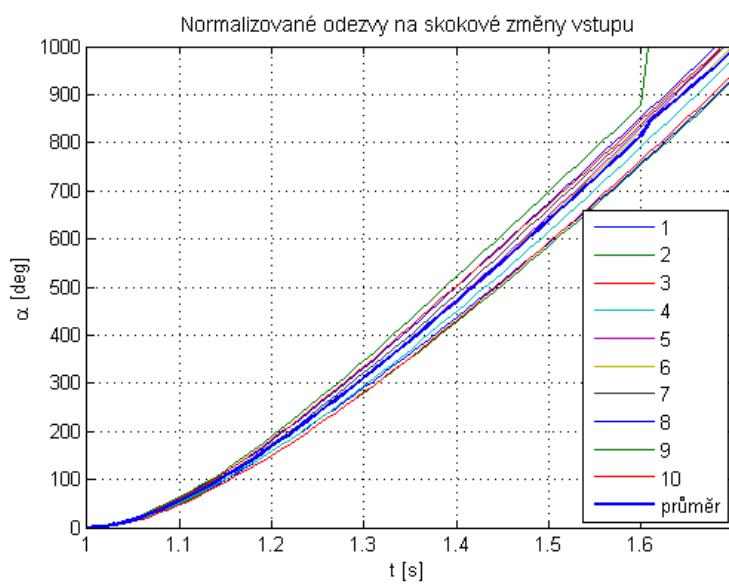
$$G(s) = \frac{K}{Ts^2 + s}$$

kde  $K$  je směrnice tečny,  $T$  je časová konstanta.

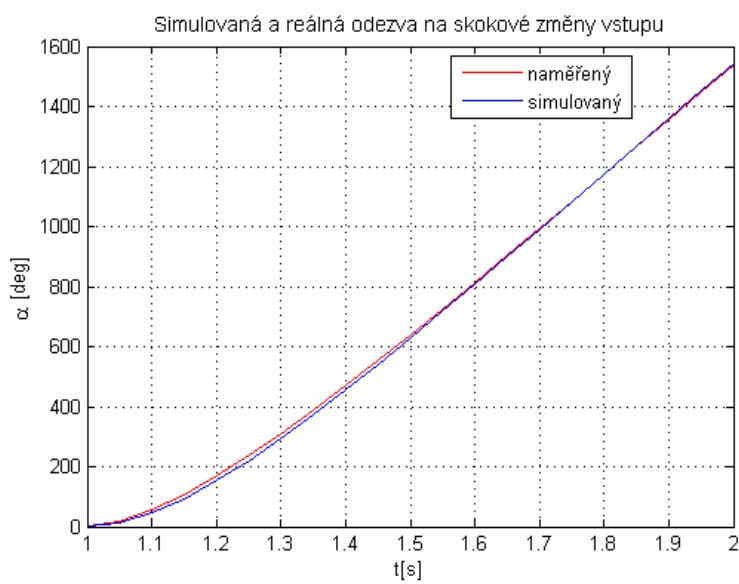
Z přechodové charakteristiky tedy plyne přenos motoru ve tvaru

$$G(s) = \frac{1860}{0,17s^2 + s}.$$

Na obrázku 3.4 je porovnání naměřené a simulované přechodové charakteristiky.



Obrázek 3.3: Normalizované přechodové charakteristiky, průměrná hodnota



Obrázek 3.4: Porovnání reálné a simulované přechodové charakteristiky

## 3.2 Identifikace kyvadla

Pro zjištění přenosu kyvadla v dolním rovnovážném bodě jsem změřil přechodovou charakteristiku tak, že jsem rukou vychýlil kyvadlo o  $15^\circ$  a následně jsem nechal kyvadlo ustálit. Menší výchylka způsobovala příliš rychlé ustálení kyvadla, pro větší výchýlení již není zanedbání nelinearit kyvadla zcela korektní.

Naměřená charakteristika na obrázku 3.5 není odezvou na jednotkový skok vstupní veličiny, ale přechodem z počátečního výchýlení do spodní ustálené polohy. Kyvadlo jsem vychýlil rukou o  $15^\circ$ , takže se nejednalo o zásah ze vstupu, kterým je pootočení ramene. Kyvadlo se tedy vrátilo do výchozí polohy a neustálilo se v jiné ustálené poloze, do které by se dostalo při změně skutečné vstupní veličiny. Takovému chování odpovídá systém druhého řádu s přenosem 3.1, kterým jsem kyvadlo modeloval.

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.1)$$

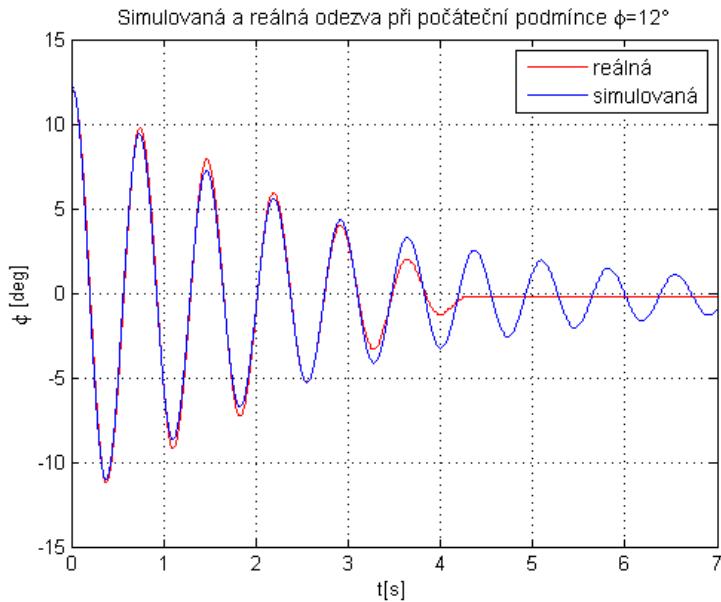
Z výše zmíněné charakteristiky 3.5 jsem určil hodnotu  $\omega$  jako průměr z několika period zaznamenaných kmitů. Postupným zpřesňováním konstant jsem zjistil vhodnou hodnotu tlumení  $\xi$ , která ovlivňuje rychlosť poklesu kmitů (exponenciální obálka). Pro určení zesílení  $k$ , které ovlivňuje amplitudu kmitů, jsem postupoval obdobně. Výsledný přenos kyvadla je tedy

$$G(s) = \frac{1,0125}{s^2 + 0,6932s + 75}.$$

Na obrázku 3.5 je vidět, že ve skutečnosti se poslední kmity utlumí mnohem výrazněji než u simulovaného průběhu, což je způsobeno nelinearitou tření.

## 3.3 ARX model

Pro další práci jsem potřeboval určit přenos polohy ramene na polohu kyvadla, tedy tu část systému, která není přímo měřitelná. Rozhodl jsem se využít ARX model, od kterého jsem očekával poměrně přesné přenosy ze vstupu na oba výstupy. Následným porovnáním obou přenosů, které by měly mít shodnou, nebo velice podobnou část reprezentující chování motoru, bych separoval rozdílnou část, která představuje přenos polohy ramene na polohu kyvadla.



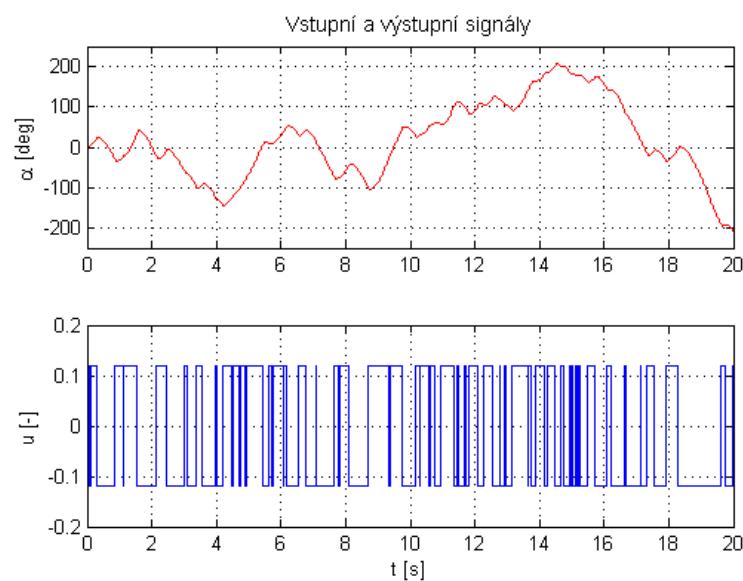
Obrázek 3.5: Přechodové charakteristiky

### 3.3.1 Získání dat

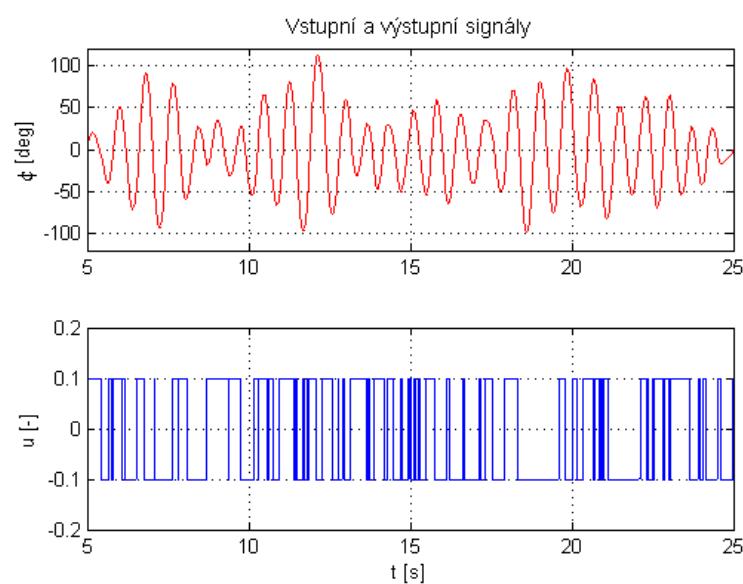
Pro co nejpřesnější určení výsledných přenosů jsem potřeboval naměřit vhodná data. Jako vstupní signál jsem zvolil náhodně šířkově modulovaný signál, jehož frekvenční rozsah byl zvolen tak, aby vhodně vybudil modelovaný systém. Amplitudu kmitů jsem volil tak, aby v žádném případě nedocházelo k otočení kyvadla kolem své osy o více jak  $180^\circ$ , maximální výchylky kyvadla se obvykle pohybovaly pod hranicí  $90^\circ$ . Na obrázku 3.6 je ukázka dat použitých pro zjištění přenosu ze vstupu na polohu ramene, na následujícím obrázku 3.7 je pak ukázka dat použitých pro zjištění přenosu vstupního signálu na polohu kyvadla.

### 3.3.2 Určení přenosů

Naměřená data jsem zpracoval pomocí `System identification toolbox` v MATLABu. Z naměřených dat jsem odstranil střední hodnoty signálů, které jsou pro toto zpracování nepodstatné. Volil jsem různé řady approximačních přenosů, které jsem odhadoval podle dosavadní znalosti dynamiky systému. Podle umístění pólů a nul těchto získaných přenosů a porovnáním simulované odezvy jsem nakonec zvolil vhodné řady přenosů. Přenos ze



Obrázek 3.6: Naměřená data pro identifikaci motoru



Obrázek 3.7: Naměřená data pro identifikaci celé soustavy

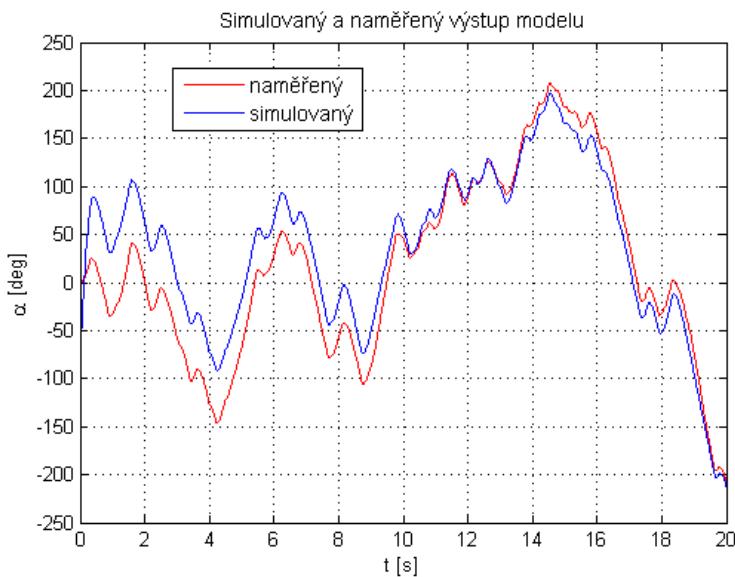
vstupu na polohu ramene je tedy

$$G_r(z) = \frac{0,70676z^2(z+0,9106)(z-0,3792)}{(z-1)(z-0,9163)(z-0,6605)(z^2+0,9108z+0,2326)}, T_s = 0,01s,$$

ve spojité časové oblasti pak

$$G_r(s) = \frac{1,6839(s+6590)(s+95,49)(s^2+334,6s+3,957e4)}{s(s+41,47)(s+8,738)(s^2+145,8s+8,404e4)}.$$

Na obrázku 3.8 je porovnána simulovaná a reálná odezva na náhodný šířkově modulovaný signál. Signály mají velmi podobný tvar, je však patrný posun obou signálů pravděpodobně způsobený třením na fyzickém modelu.



Obrázek 3.8: Simulovaná a měřená poloha ramene

Při určování přenosu ze vstupu na polohu kyvadla jsem vycházel z přenosu s pěti póly a čtyřmi nulami. Při pohledu na polohu pólů a nul approximačního přenosu jsem nalezl nulu a pól, které se prakticky překrývaly. Když jsem zmenšil řád přenosu o jedna, nový approximační přenos již vyšel zcela jinak. Rozhodl jsem se tedy tuto překrývající se nulu s pólem z přenosu vyškrtnout. Výsledná odezva na náhodně šířkově modulovaný signál se prakticky nezměnila. Upravený přenos má tedy tvar

$$G_k(z) = \frac{0,42437z^2(z+2,783)}{(z^2-1,989z+0,9954)(z^2+1,066z+0,4012)}, T_s = 0,01s,$$

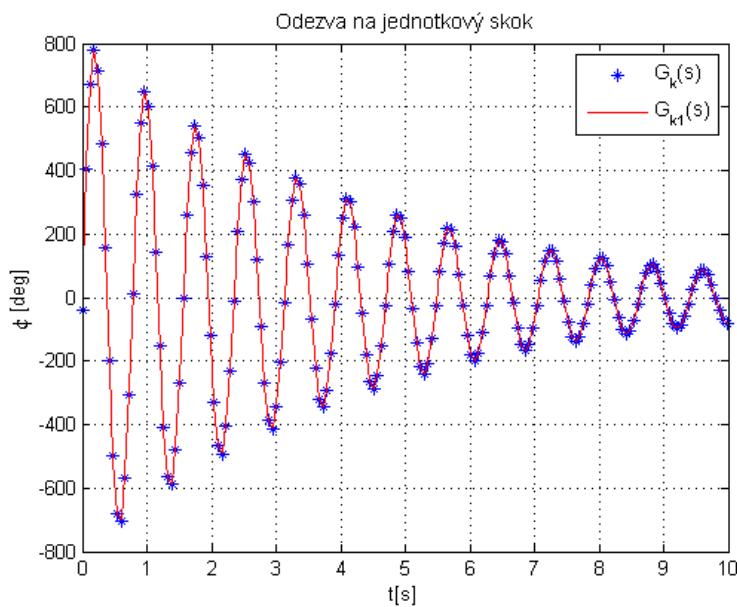
ve spojité časové oblasti pak

$$G_k(s) = \frac{-41,6184(s-355,8)(s^2+281,2s+3,005e4)}{(s^2+0,4612s+64,16)(s^2+91,33s+6,818e4)}.$$

V přenosu kyvadla  $G_k(s)$  je patrná nula v bodě  $355,8$ , tedy nula, která zásadně neovlivňuje modelovanou dynamiku. Pokud tedy zanedbáme tuto nulu, bude výsledný tvar přenosu

$$G_{k1}(s) = \frac{1.4808e4(s^2 + 281,2s + 3,005e4)}{(s^2 + 0,4612s + 64,16)(s^2 + 91,33s + 6,818e4)}.$$

Na obrázku 3.9 je porovnání odezvy na jednotkový skok přenosů  $G_k(s)$  a  $G_{k1}(s)$ . Je zřejmé, že úprava přenosu nemá na výslednou odezvu prakticky žádný vliv.

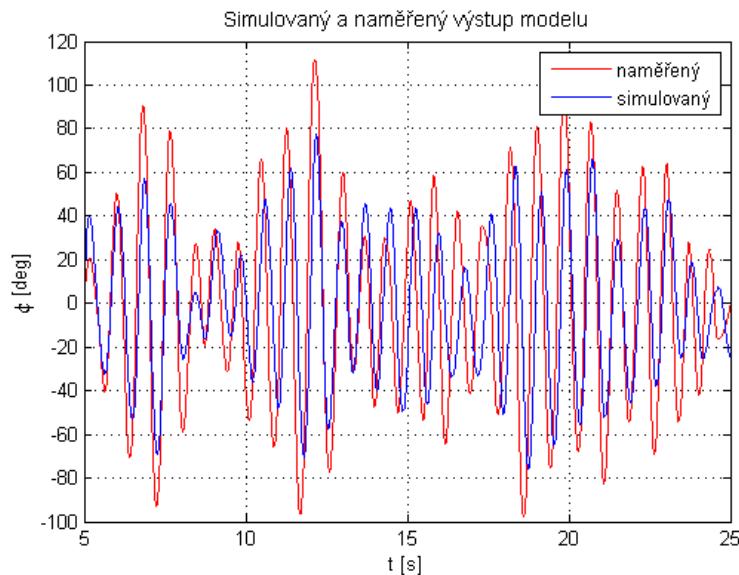


Obrázek 3.9: Porovnání simulovaných přechodových charakteristik

Na obrázku 3.10 je vidět, že se simulovaná a reálná odezva na náhodný šířkově modulovaný signál liší zejména v amplitudě signálu.

Z téhoto dvou přenosů  $G_r(s)$  a  $G_{k1}(s)$  jsem se pokusil získat přenos samotného kyvadla, tedy přenos rychlosti ramene na polohu kyvadla. Tento přenos nelze jednoduše získat z naměřených charakteristik, protože jednotkový skok by byl již ovlivněn dynamikou motoru, respektive ramene. Porovnal jsem tedy oba předchozí přenosy.

Na obrázku 3.11 je vidět, že přenos ramene má 2 póly velmi blízko nule, které vyjadřují integrační charakter motoru, další pól se nachází u hodnoty  $-40$  a jedná se o časovou konstantu motoru. Kmitavé póly motoru představují zpětný vliv pohybu kyvadla na motor, tyto póly jsou také velmi blízko kmitavým pólům kyvadla, považoval jsem je tedy za póly popisující stejnou dynamiku. Společně, respektive velmi podobné nuly  $-167 \pm$

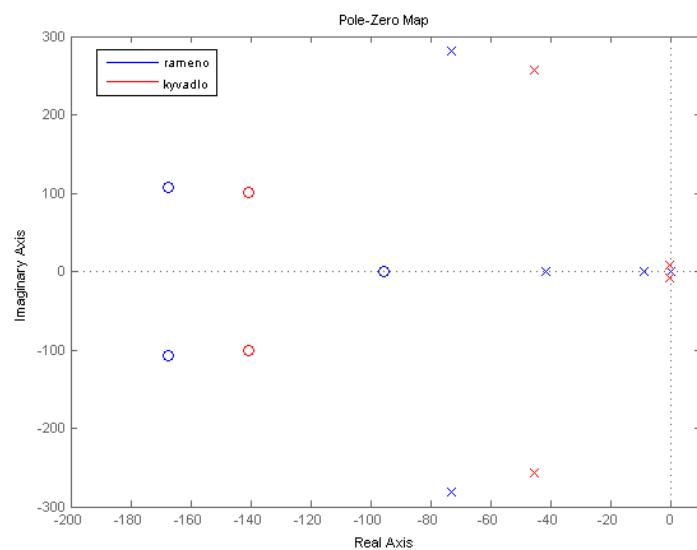


Obrázek 3.10: Simulovaná a měřená poloha kyvadla

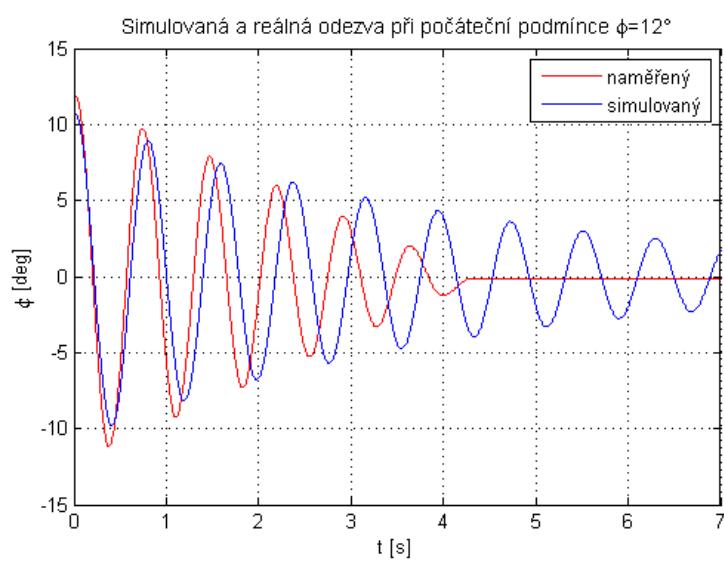
$108i$ ,  $-141 \pm 101i$  a póly  $-72, 9 \pm 281i$ ,  $-45, 7 \pm 257i$  jsem z přenosu  $G_{k1}(s)$  vyloučil. Tyto nuly a póly charakterizovaly dynamiku ramene, zbylé pak samotné kyvadlo. Získal jsem přenos samotného kyvadla, tedy přenos rychlosti ramene na polohu kyvadla ve tvaru

$$G_{k-r}(s) = \frac{6526,5}{(s^2 + 0,4612s + 64,16)}.$$

Na obrázku 3.12 je porovnání naměřené a simulované odezvy výše zmíněného přenosu samotného kyvadla  $G_{k-r}(s)$ . Je vidět, že amplituda naměřených kmitů klesá rychleji vlivem tření, ve vyšším čase se začíná rozcházet i fáze obou signálů.



Obrázek 3.11: Poloha některých pólů a nul přenosů



Obrázek 3.12: Přechodové charakteristiky

# Kapitola 4

## Regulace kyvadla v dolní poloze

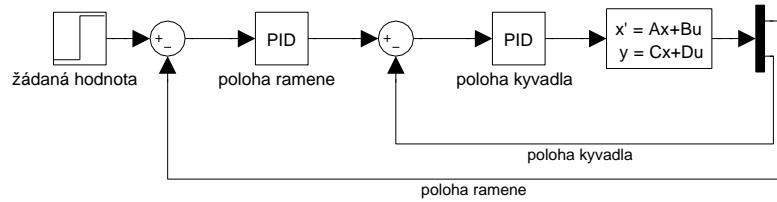
Dolní ustálená poloha kyvadla je stabilní, stačilo by tedy regulovat polohu ramene, kmity kyvadla se po čase ustálí sami. Dobu kmitání kyvadla však lze značně zkrátit, přidáme-li regulaci polohy kyvadla na tuto výchozí polohu, tedy přidáme-li aktivní tlumení kyvadla. Při použití P regulátoru systém kmitá, PD regulátor již kmitání tlumí. Použití integrační složky je zbytečné vzhledem k integračnímu charakteru motoru a faktu, že kyvadlo se v dolní pozici nakonec ustálí samo. Při regulaci kyvadla v dolní poloze je tato poloha považována za nulovou.

### 4.1 PD regulátory

Při návrhu klasických regulátorů jsem postupoval tak, že jsem navrhl samostatně regulátor pro polohu ramene a samostatně pro polohu kyvadla, tedy aktivní tlumení. Regulátory jsem navrhoval pomocí nástroje MATLABu `rltool`. Důvodem bylo rychlé experimentální doladování regulátorů, simulované a skutečné chování systému se někdy značně lišilo.

Nejprve jsem se pokusil soustavu regulovat pouhým sečtením akčních zásahů obou regulátorů, soustava však byla nestabilní. Tyto regulátory pracovaly tak, že jejich akční zásahy byly vždy v protifázi a amplituda akčních veličin rostla. Tuto strukturu zapojení PD regulátorů jsem tedy zavrhl a regulátory jsem zapojil do kaskády. Schématicky je toto zapojení znázorněno na obrázku 4.1.

První regulátor, regulující polohu ramene, dává druhému regulátoru, regulujícímu polohu kyvadla, požadavek na náklon kyvadla. Druhý regulátor musí měnit rychlosť otáčení



Obrázek 4.1: Kaskádní zapojení regulátorů

ramene pro dosažení požadovaného náklonu kyvadla, tím se samozřejmě dostává rameno do nové polohy.

V kaskádném zapojení jsem použil již samostatně navržené regulátory. Tyto regulátory však bylo nutné pro lepší výsledky dodatečně upravit.

Pro další experimenty jsem použil tyto regulátory:

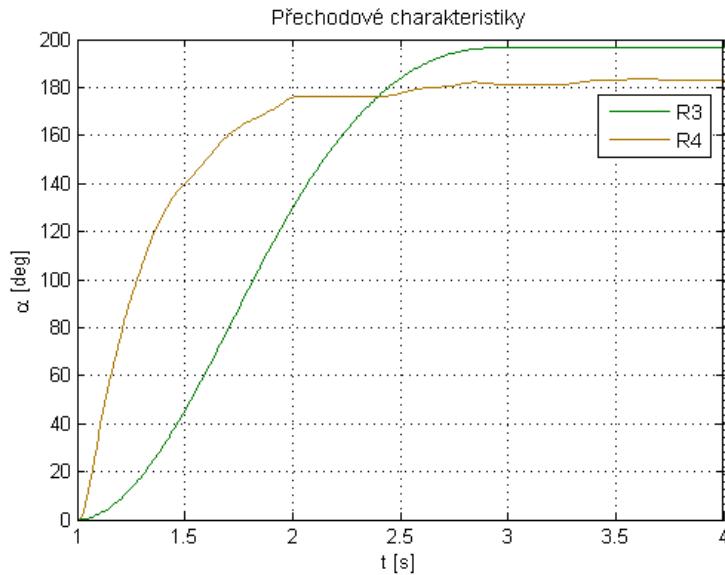
Tabulka 4.1: PD regulátory - dolní poloha

| označení | regulátor ramene                           | regulátor kyvadla                       |
|----------|--|---|
| R1       | $\frac{0,0059(s + 0,5309)}{(s + 0,624)}$   | $\frac{0,0984(s + 5,625)}{(s + 86,18)}$ |
| R2       | $\frac{0,0074(s + 0,4888)}{(s + 0,5461)}$  | $\frac{0,0984(s + 5,625)}{(s + 86,18)}$ |
| R3       | $\frac{0,0029(s + 7,292)}{(s + 2,392)}$    | -                                       |
| R4       | $\frac{0,0064621(s + 7,719)}{(s + 32,47)}$ | -                                       |

Z tabulky 4.1 je zřejmé, že regulátory R3 a R4 byly pouze regulátory polohy ramene bez regulace polohy kyvadla, zatímco regulátory R1 a R2 obsahovaly dva regulátory v kaskádném zapojení regulující jak polohu ramene, tak polohu kyvadla.

Na následujících obrázcích 4.2 a 4.3 je porovnání přechodových dějů, při změně žádané polohy ramena o  $180^\circ$ . V obou případech není pohyb kyvadla nijak regulován. Při použití pomalého regulátoru R4 se však vlivem tření kyvadlo příliš nerozkývalo a přechodový děj

je vzhledem k regulátoru R3 výrazně kratší.



Obrázek 4.2: Regulace polohy ramene bez regulace polohy kyvadla

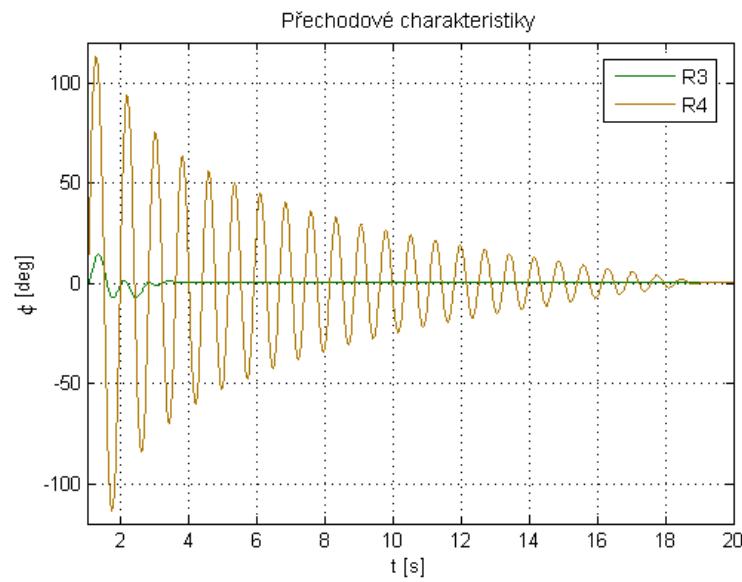
Vzhledem k výsledkům regulátoru R3 jsem se rozhodl porovnat s tímto regulátorem i regulátory R1 a R2, tedy regulátory s regulací polohy kyvadla.

Z obrázku 4.5 je patrné, že při použití regulátorů R1 a R2 je ustálení kyvadla rychlejší, maximální překmit kyvadla je však přibližně o  $5^\circ$  větší. Na obrázku 4.4 je jasně vidět větší ustálená odchylka od žádané hodnoty při použití R3 než při použití R1, popřípadě R2. S menším zesílením proporcionalní složky regulátoru R1 by se dosáhlo menší ustálené odchylky regulované veličiny, ovšem regulační pochod by se zcela jistě prodloužil.

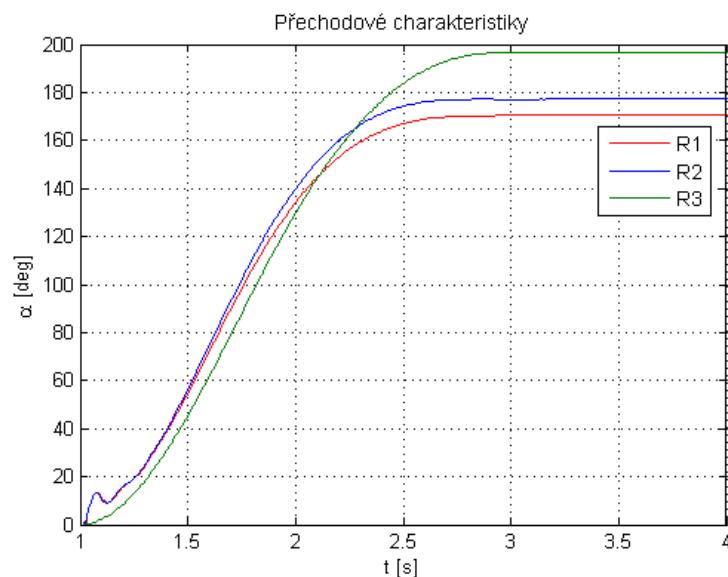
## 4.2 LQ regulace

### 4.2.1 Kalmanův filtr

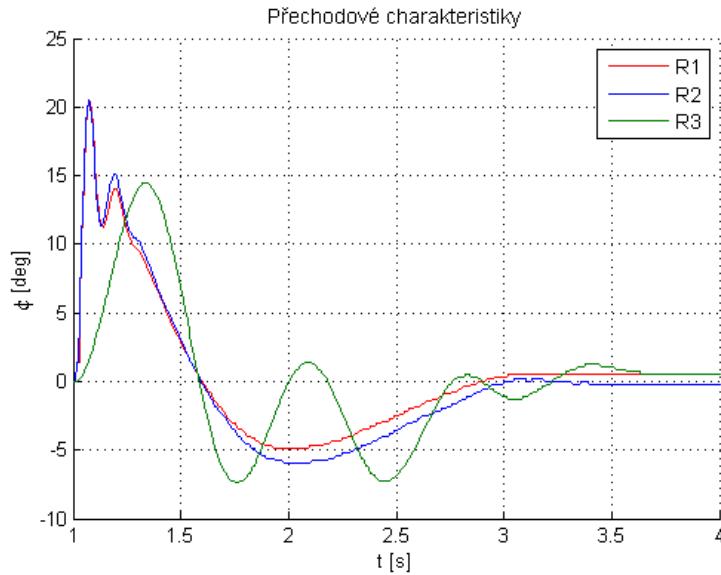
Vzhledem k tomu, že u fyzikálního modelu inverzního kyvadla jsou měřitelné pouze polohy ramene a kyvadla, bylo pro návrh LQ regulátorů nutné sestavit pozorovatele stavů systému pro odhad zbylých dvou stavů, tedy úhlové rychlosti kyvadla a úhlové rychlosti ramene. Jako pozorovatele stavů jsem použil Kalmanův filtr. Pro jeho návrh jsem využil funkce MATLABu `kalman`, přičemž jsem využil lineárního modelu odvozeného v kapi-



Obrázek 4.3: Regulace polohy ramene bez regulace polohy kyvadla



Obrázek 4.4: Porovnání regulace polohy ramene s regulací polohy kyvadla a bez regulace polohy kyvadla



Obrázek 4.5: Porovnání regulace polohy ramene s regulací polohy kyvadla  
a bez regulace polohy kyvadla

tole 2.2.3. Po dosazení konstant tedy dostáváme linearizovaný model pro dolní ustálenou polohu ve tvaru

$$\mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{180} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -53,267 & 0 & 0 & 2,8643 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5275 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{180} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1971,4 \\ 0 \\ 363,1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

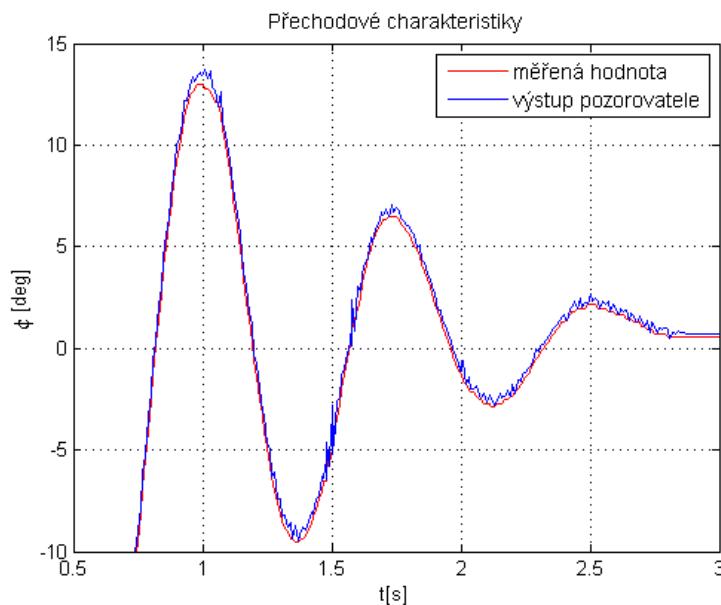
Zesílení Kalmanova filtru je

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2,8044 & 0,1423 \\ 180,3644 & 14,0866 \\ 0,4868 & 0,1702 \\ 32,9168 & 2,4622 \end{pmatrix}.$$

Póly  $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$  jsou:

$$-1.2159 \pm 15.2770i$$

$$-0.5352 \pm 0.5622i.$$

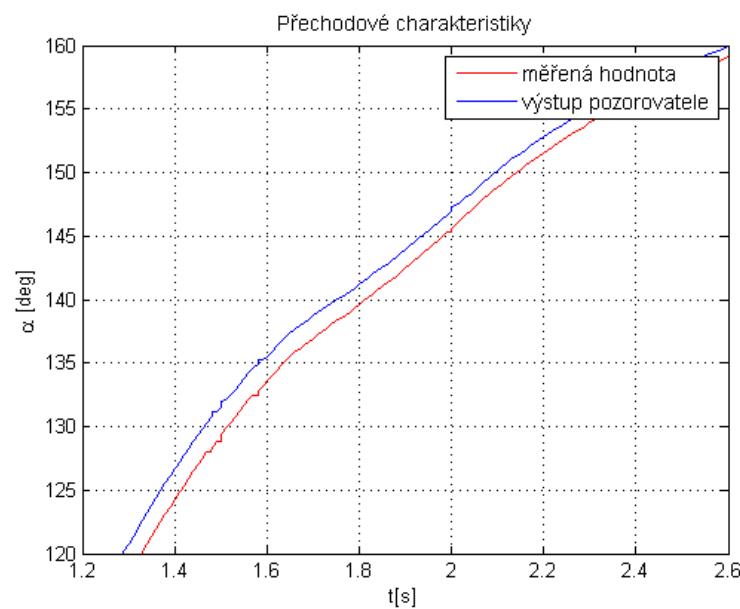


Obrázek 4.6: Měřený a odhadovaný výstup

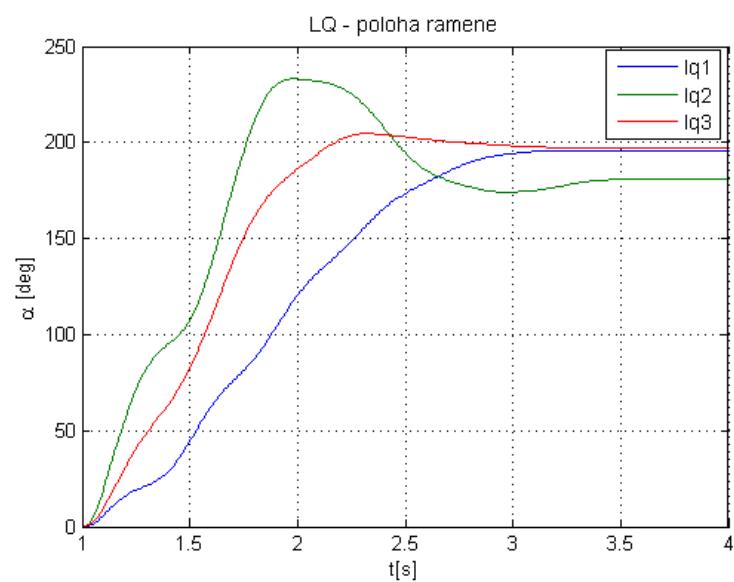
Z obrázku 4.6 je patrné, že odhad pozice kyvadla je dostatečně přesný, na obrázku 4.7 je již jistá nepřesnost patrná, pro regulaci kyvadla v dolní poloze jsou však obě přesnosti dostačující.

### 4.2.2 LQ regulátory

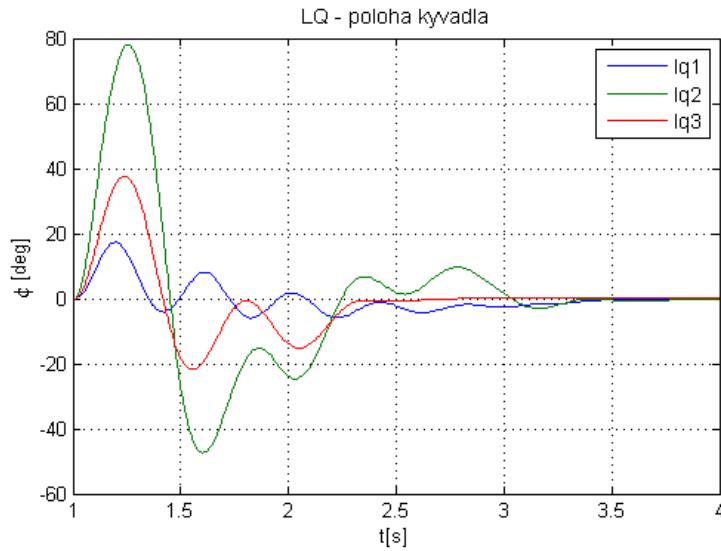
Při návrhu LQ regulátorů jsem vycházel z lineárního modelu odvozeného v kapitole 2.2.3. Pro samotný výpočet Kalmanova zesílení časově invariantní stavové zpětné vazby jsem použil funkci MATLABu `dare`. Navrhl jsem několik regulátorů, z nichž jsem vybral 3 typické zástupce. Průběhy regulačních pochodů jsou vidět na následujících obrázcích 4.8 a 4.9, kdy jsem požadoval otočení ramene o  $180^\circ$ . V tabulce 4.2 jsou parametry kvadratických kritérií pro jednotlivé regulátory.  $\varphi$  a  $\alpha$  jsou odpovídající prvky matice  $\mathbf{Q}$ , která váží odchylku příslušného stavu od nulové hodnoty, tedy úhel natočení kyvadla  $\varphi$  a polohu ramene  $\alpha$ . Hodnota  $R$  je konstanta kterou je vynásobena jednotková matice  $\mathbf{R}$ , která váží vynaloženou energii řízení.



Obrázek 4.7: Měřený a odhadovaný výstup



Obrázek 4.8: Srovnání LQ regulátorů



Obrázek 4.9: Srovnání LQ regulátorů

Tabulka 4.2: Porovnání LQ regulátorů

| regulátor | váha pro $\varphi$ | váha pro $\alpha$ | $R$ | $k$                           |
|-----------|--------------------|-------------------|-----|-------------------------------|
| lq1       | 10                 | 0,1               | 1   | [1,8100 0,0191 0,1815 0,1308] |
| lq2       | 2                  | 1                 | 10  | [0,3590 0,0004 0,2539 0,1065] |
| lq3       | 20                 | 3                 | 100 | [0,3577 0,0063 0,1397 0,0726] |

Z naměřených průběhů je patrné, že pouze regulátor lq2 byl schopen regulovat polohu ramene bez regulační odchylky. Ostatním dvěma regulátorům se obdobný výsledek nepodařil, přestože má motor integrační charakter. Tuto chybu jsem se snažil odstranit přidáním dalšího integrátoru do systému. Tímto integrátorem, respektive součtovým členem, jsem integroval polohu kyvadla  $\alpha$ . Samozřejmě bylo nutné rozšířit stavový popis systému o další stav. Kýženého výsledku jsem však nedosáhl. Soustava se vždy rozkmitala i přes to, že byl regulační pochod velmi pomalý díky vhodně zvoleným maticím kvadratického kritéria.

Z pohledu rychlosti ustálení kyvadla se nejlépe choval regulátor lq3, což odpovídá i zvolené hodnotě váhy  $\varphi$  a  $\boldsymbol{R}$  viz 4.2. Zcela obráceně se choval regulátor lq2, jehož překmit byl největší a ustálení kyvadla trvalo nejdéle.

Pokud bych tedy nebral v úvahu regulační odchylku polohy ramene, jevil by se jako nejlepší regulátor lq3 s přijatelným rozkmitem kyvadla, jeho rychlým ustálením a rychlou změnou polohy ramene s minimálním překmitem.

Tabulka 4.3: Póly ( $\mathbf{A} - \mathbf{Bk}$ )

| lq1               | lq2               | lq3               |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| -41,9837±42,6289i | -18,1826±19,6238i | -18,1984±19,5822i |
| -0,8715± 0,4704i  | -1,8065±1,8963i   | -1,4256±1,3218i   |

# Kapitola 5

## Regulace kyvadla v horní poloze

Regulace kyvadla v horní poloze je o poznání náročnější než v dolní. Kyvadlo se již v požadované poloze samo neustálí a tak je správné navržení regulátoru polohy kyvadla mnohem důležitější.

### 5.1 PID regulátory

Nejprve jsem se pokusil navrhnout pouze regulátor stabilizující polohu kyvadla s tím, že na poloze ramene mi nezáleží. Tento postup se ukázal jako zcela nevhodný. Ke stabilizaci kyvadla v horní poloze jsem navrhl nestabilní regulátor pomocí nástroje MATLABu `rltool`. Kyvadlo však vždy po velmi krátké době spadlo. Z naměřených průběhů bylo patrné, že kyvadlo kmitá kolem ustálené polohy, ale pohyb ramene se vždy začne zrychlovat, rameno začne ujízdět jedním směrem až kyvadlo spadne. Pokusil jsem se regulátor navrhнуть i nastavováním konstant v SIMULINKovém bloku PID, výsledky byly o něco lepší, ale kyvadlo stále velmi brzy spadlo do dolní polohy. Toto chování je způsobeno dvěma nestabilitami uzavřené smyčky, jednak nestabilitou kyvadla a také nestabilitou regulátoru. Vlivem nepřesnosti se tak tyto nestability dříve nebo později projevily a kyvadlo spadlo.

Zdálo se, že navržený PID regulátor by mohl pracovat poměrně dobře, pokud zamezím driftu kyvadla. Zapojil sem tedy do kaskády další regulátor pro polohu ramene. Schématické zapojení je stejné jako v případě regulace v dolní poloze.

### 5.1.1 Stabilizace kyvadla

Pro stabilizaci kyvadla jsem použil výše zmíněný PID regulátor s přenosem

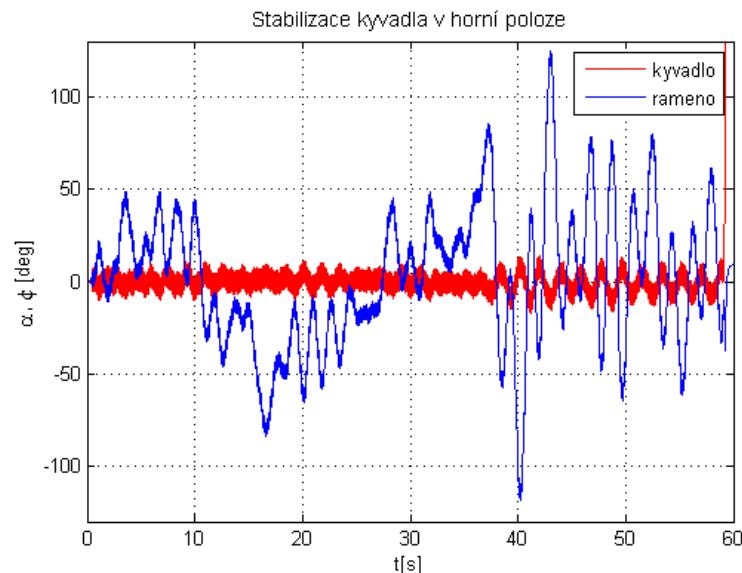
$$G_{PID}(s) = P + \frac{I}{s} + \frac{Ds}{\frac{1}{N}s + 1},$$

kde  $P = 0,05$ ,  $I = 0,01$ ,  $D = 0,1$  a  $N = 100$ .

Pro regulaci polohy ramene jsem navrhl několik regulátorů, jako nejlepší se jevil regulátor s přenosem

$$G_r = \frac{0,00456(s + 0,6957)}{s + 3,172}.$$

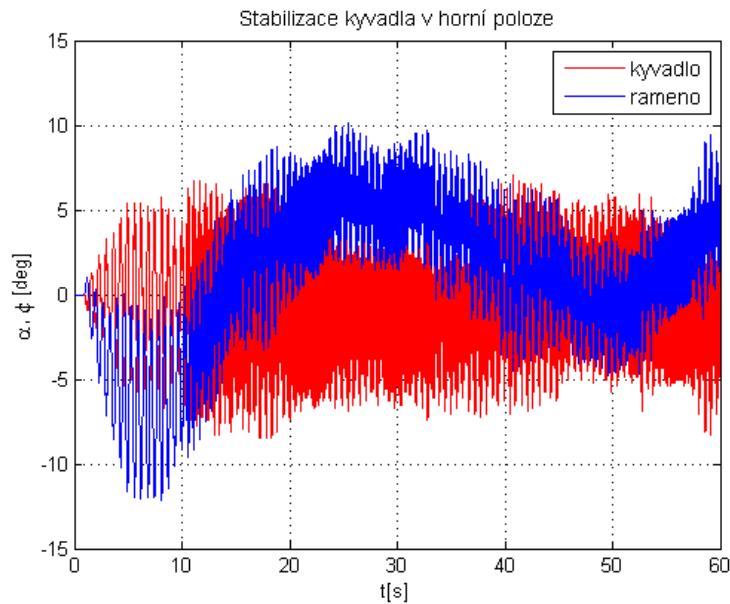
Výsledky však stále nebyly uspokojivé, rozkmit polohy ramene byl příliš velký, jak je patrné z obrázku 5.1, výkyvy dosahovaly hodnot přes  $100^\circ$ . Problém jsem odstranil



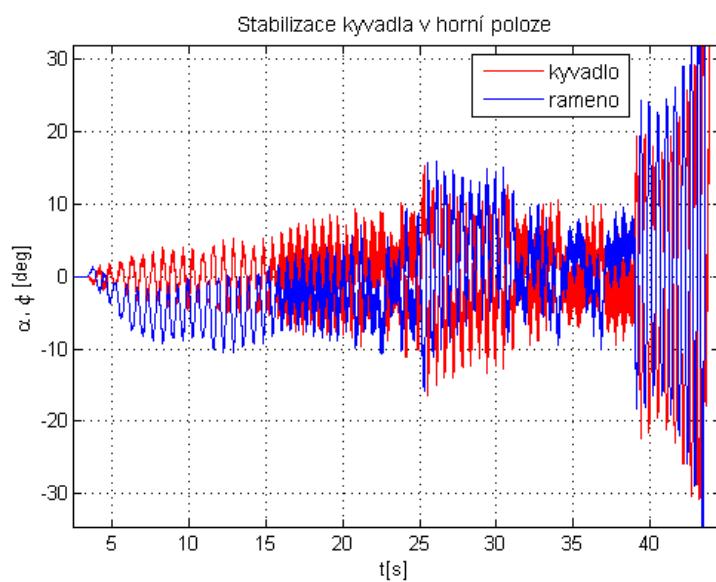
Obrázek 5.1: Stabilizace kyvadla v horní poloze

2,2 násobným zesílením regulační odchylky polohy ramene, rozkmit polohy kyvadla byl přibližně  $10^\circ$  jak je vidět na obrázku 5.2.

Pro ověření robustnosti stabilizace kyvadla jsem simuloval poruchy foukáním do kyvadla, popřípadě lehkým doteckem. Z obrázku 5.3 je patrné, že vychýlení do cca  $15^\circ$  regulátor ještě zvládl, pokud se však vychýlení přiblížilo k  $20^\circ$ , kyvadlo již spadlo do dolní polohy.



Obrázek 5.2: Stabilizace kyvadla v horní poloze



Obrázek 5.3: Vliv poruch na stabilizaci kyvadla

### 5.1.2 Řízení polohy ramene

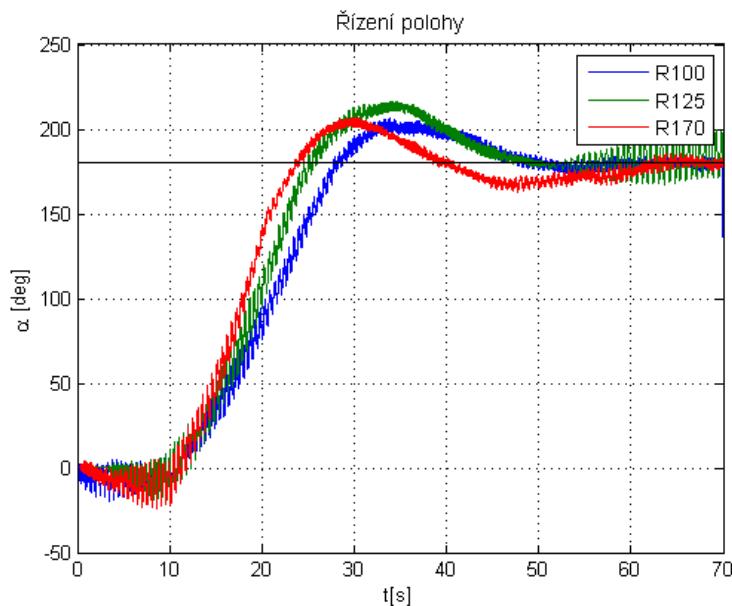
Pro stabilizaci polohy jsem navrhl jeden vhodný PID regulátor pomocí nástroje MATLABu **rltool**. Protože skoková změna požadované polohy ramene z 0 na  $180^\circ$  byla příliš rychlá, kyvadlo vždy spadlo do dolní polohy. Omezil jsem tedy náběh požadované hodnoty pomocí SIMULINKového bloku **Rate Limiter**. Zkoušel jsem různá omezení, nejlepších výsledků jsme dosáhl při změně požadované hodnoty od 10 do  $17^\circ/s$ . Řízení tedy probíhalo s regulátorem kyvadla z předchozí kapitoly, regulátor ramene měl přenos

$$G_r(s) = \frac{0,0456(s + 0,6957)}{s + 3,172}.$$

Na obrázku 5.4 jsou přechodové děje se stejným regulátorem polohy, lišila se pouze rychlosť změny požadované polohy.

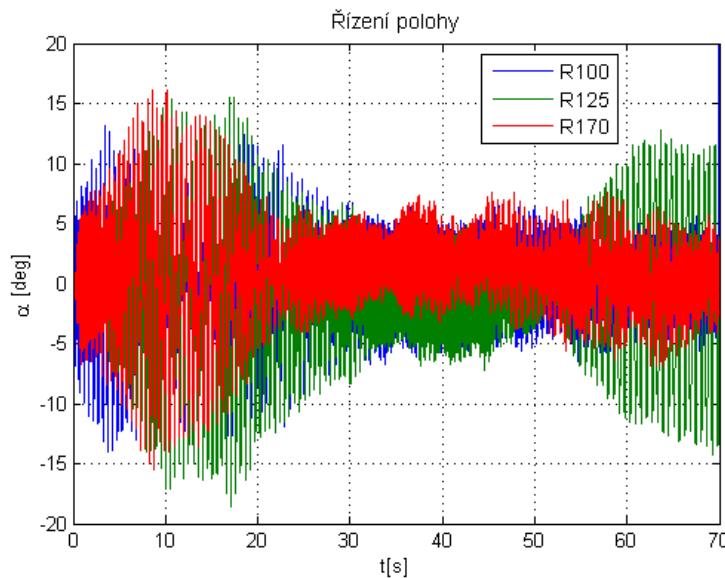
Tabulka 5.1: Značení přechodových dějů

| Označení | rychllosť změny žádané hodnoty $\varphi$ [ $^\circ/s$ ] |
|----------|---|
| R100     | 10  |
| R125     | 12,5  |
| R170     | 17  |



Obrázek 5.4: Vliv strmosti změny požadované hodnoty  $\varphi$

Je patrné, že nejrychleji se rameno ustálilo na požadované hodnotě při R100. Obdobně se regulátor choval i při R125, regulátor ovšem udržoval kyvadlo v dané poloze s větším rozkmitem a na nižší frekvenci kmitů, což je patrné i z obrázku 5.5.



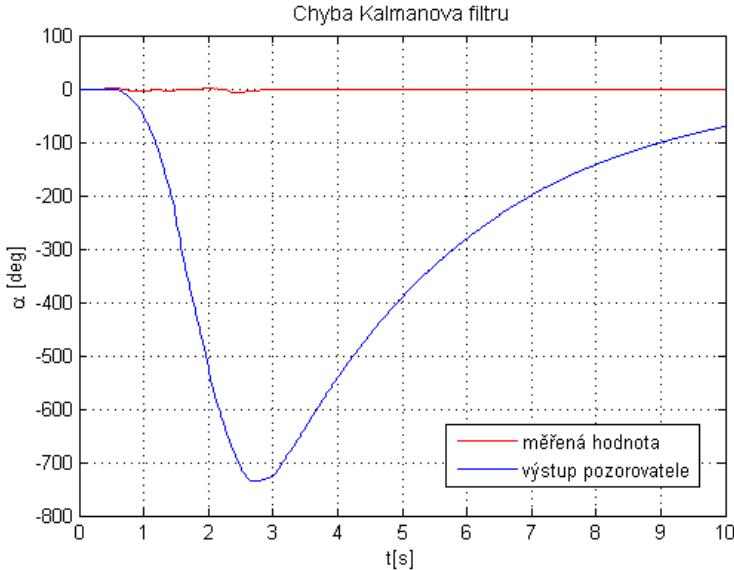
Obrázek 5.5: Vliv strmosti změny požadované hodnoty  $\varphi$

## 5.2 LQ regulace

### 5.2.1 Kalmanův filtr

Využil jsem stejný návrh Kalmanova filtru jako v předchozí kapitole, pouze jsem zaměnil linearizovaný model pro dolní polohu kyvadla za model pro horní polohu. Ponechal jsem i stejné kovarianční matice  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$ . Po spuštění regulace byl však reálný systém velmi nestabilní, přestože v simulaci se model choval stabilně. Porovnal jsem naměřené a odhadované stavové veličiny. Nestabilitu jsem přičítal nepřesnosti Kalmanova filtru při odhadu polohy ramene, která je v horní poloze o poznání důležitější než ve spodní. Vzhledem ke špatnému odhadu polohy ramene musela být špatně odhadována i jeho rychlosť. Pokoušel jsem se nastavováním kovariančních matic Kalmanova filtru zlepšit odhad stavů. Zlepšil-li se však odhad polohy ramene, zhoršil se zároveň odhad polohy kyvadla, což bylo velmi nežádoucí.

Provedl jsem tedy experiment, kdy jsem rukou otočil kyvadlo o  $360^\circ$  a snažil jsem se přitom nehýbat ramenem.



Obrázek 5.6: Vliv zpětné vazby polohy kyvadla na polohu ramene

Z obrázku 5.6 je patrný zcela špatný odhad polohy ramene. Přestože jsem se tímto experimentem dostal zcela mimo pracovní bod, pro který byl tento Kalmanův filtr navržen, je jasné patrná příliš silná zpětná vazba polohy kyvadla na polohu ramene. Problém jsem vyřešil návrhem nového Kalmanova filtru pouze pro odhad polohy ramene a jeho rychlosti, tedy posledních dvou stavů. Z lineárního popisu celého systému jsem použil pouze následující submatice, uvažující pouze samostatné rameno bez kyvadla

$$\mathbf{A}_r = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{-k^2 + BR}{JR} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_r = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{JR} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_r = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}.$$

Po dosazení konstant tedy

$$\mathbf{A}_r = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.0137 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_r = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 363, 1 \end{pmatrix},$$

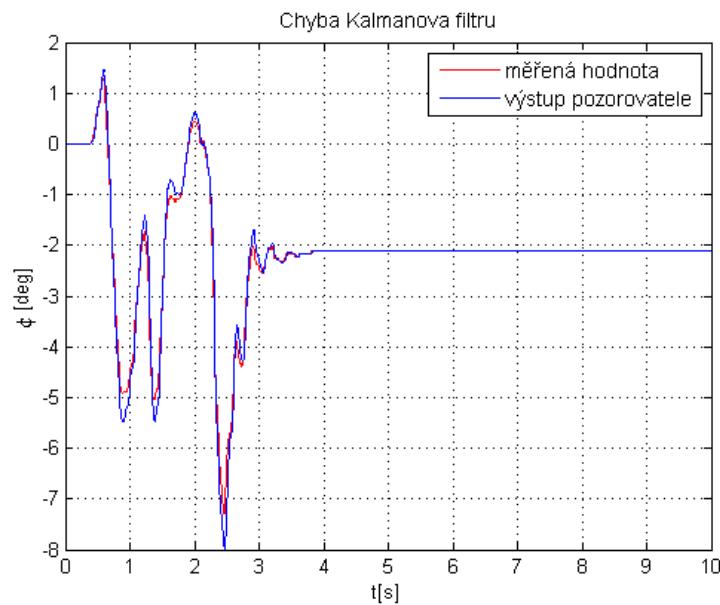
$$\mathbf{C}_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_r = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}.$$

Zesílení tohoto nového Kalmanova filtru je

$$\mathbf{L}_r = \begin{pmatrix} 0,6180 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Póly  $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$  jsou:  $-0,6180$  a  $-0,0137$ .

S tímto novým Kalmanovým filtrem pro polohu ramene jsem experiment opakoval. Nyní již tento Kalmanův filtr odhadoval polohu a rychlosť ramene s dostatečnou přesností, jak je vidět z obrázku 5.7.



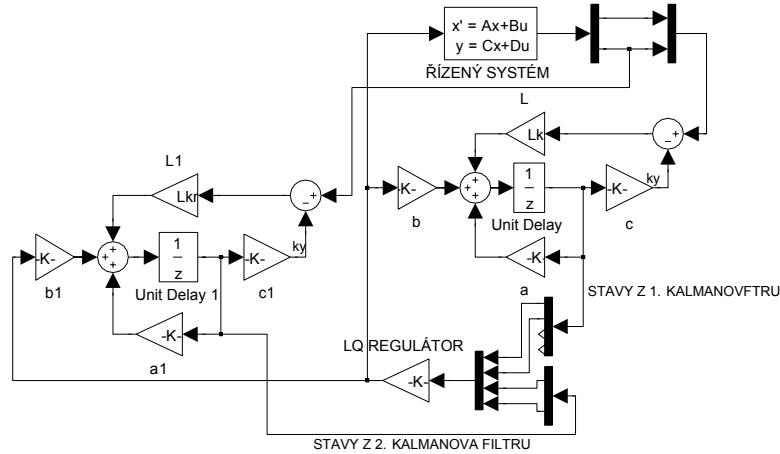
Obrázek 5.7: Vliv zpětné vazby polohy kyvadla na polohu ramene

### 5.2.2 Stabilizace kyvadla

Pro návrh LQ regulátoru jsem opět využil funkce MATLABu `dare` a linearizovaného popisu systému v horní ustálené poloze podle kapitoly 2.2.3.

Přestože mnou navržené regulátory v simulaci pracovaly dobře, reálný systém byl nestabilní. Pokusil jsem se zpřesnit odhad prvního Kalmanova filtru, nyní využívaného pouze pro odhad polohy a rychlosti kyvadla, tím, že jsem jeho stavy odpovídající poloze a rychlosti ramene nahradil přesnějšími stavami z druhého Kalmanova filtru. Zvýšit přesnost odhadu stavů jsem se pokusil i nahrazením odhadované polohy ramene prvního Kalmanova filtru přímo měrenou polohou ramene. Měření polohy ramene nebylo zatíženo

výrazným šumem, proto jsem se o tuto variantu pokusil. Soustava však byla stále nestabilní. Na obrázku 5.8 je pro ilustraci znázorněn princip zapojení Kalmanových filtrů a LQ regulátoru.

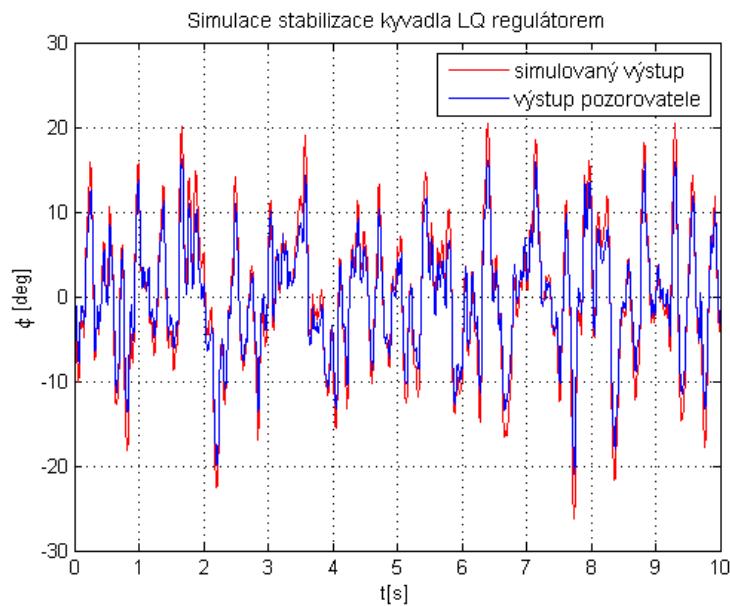


Obrázek 5.8: Zapojení Kalmanových filtrů a LQ regulátoru

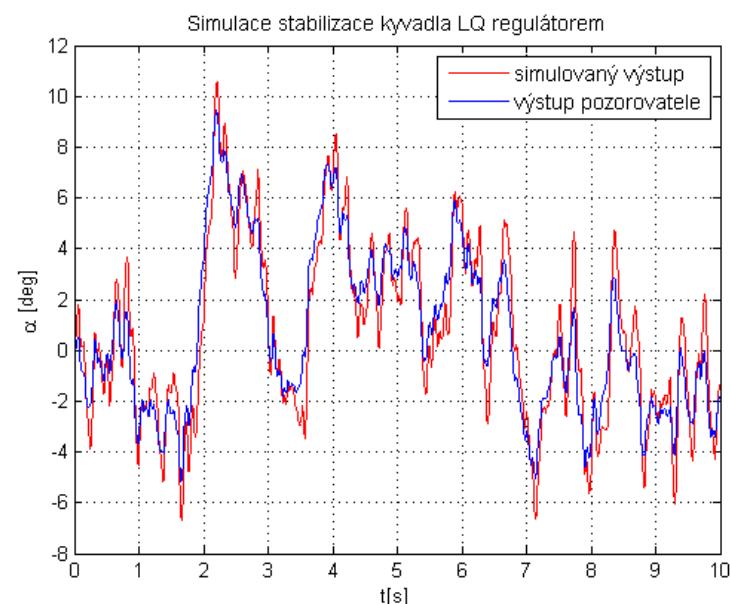
Po této úpravě zapojení jsem se snažil vhodně nastavit váhové matice LQ regulátoru pro reálný systém. Reakce regulátoru byly velmi pomalé, proto jsem se pokusil zvýšit derikační zásahy regulátoru snížením vah váhové matice  $\mathbf{Q}$  odpovídajících rychlosti kyvadla a ramena. Systém byl velmi citlivý i na poměr vah těchto dvou stavů. Snižení váhy ceny akčního zásahu spíše než urychlení reakce regulátoru způsobovalo ještě větší nestabilitu. Ve výsledku se mi nepodařilo najít vhodný poměr vah všech 4 stavů, který by zaručil stabilitu systému.

Na obrázcích 5.9 a 5.10 je simulovaná stabilizace systému při připojení generátoru bílého šumu *Band-Limited White Noise* na vstup systému, který způsobuje výkyvy kyvadla z ustálené horní polohy odpovídající reálným výkyvům, které bylo kaskádní zapojení PD a PID regulátorů ještě schopno stabilizovat. Parametry bloku *Band-Limited White Noise*:

- Noise power= [0.0001]
- Sample time= 0.01
- Seed= [23341]



Obrázek 5.9: Simulovaná stabilizace kyvadla LQ regulátorem v horní poloze, poloha kyvadla



Obrázek 5.10: Simulovaná stabilizace kyvadla LQ regulátorem v horní poloze, poloha ramene

# Kapitola 6

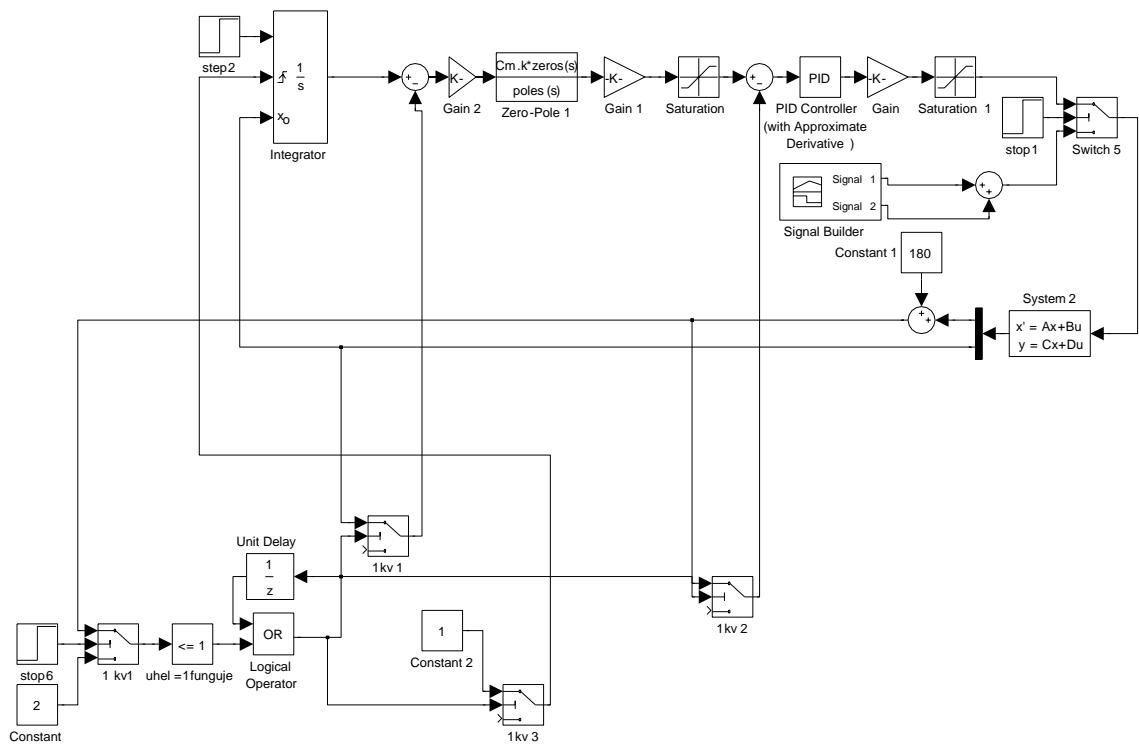
## Vyšvihnutí kyvadla z dolní do horní polohy

Pro vyšvihnutí kyvadla do horní polohy a jeho udržení v této poloze, pomocí kaskádního zapojení PID regulátorů z předchozí kapitoly, je důležité, aby mělo kyvadlo v horní ustálené poloze minimální kinetickou energii. Důvodem je bezproblémové připojení PID regulátorů, které proběhne jen tehdy, když je rychlosť ramena a kyvadla co nejnižší a poloha kyvadla je co nejblíž horní ustálené poloze. Je také třeba zajistit co nejmenší regulační odchylku polohy kyvadla a polohy ramene v okamžiku připojení PID regulátorů.

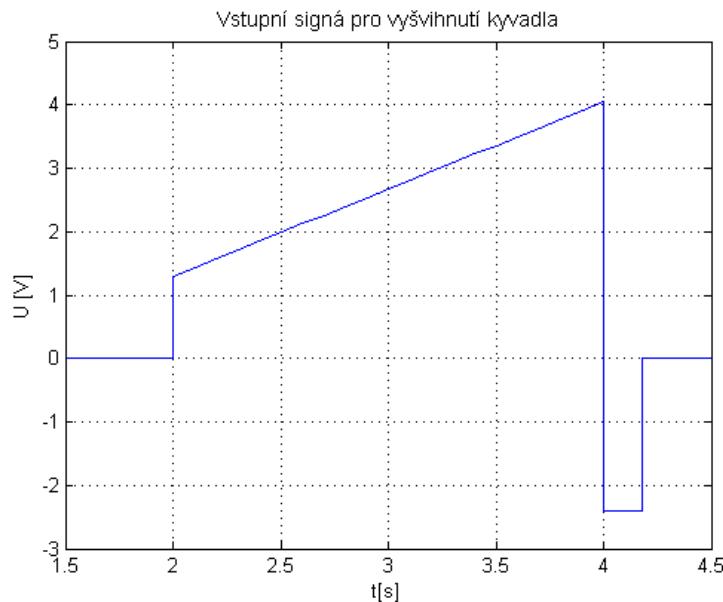
Samotné vyšvihnutí kyvadla jsem zajistil připojením vhodného vstupního signálu viz obrázek 6.2 . Tento vstupní signál zajistí pozvolné roztočení ramene a vychýlení kyvadla o přibližně  $60^\circ$ , následný krátký impuls obrácené polarity způsobí prudké zastavení ramene a vyšvihnutí kyvadla do horní polohy. Amplitudu impulsu obrácené polarity jsem experimentálně nastavil na takovou hodnotu, kdy se kyvadlo dostalo do horní polohy v minimální rychlosti.

Kaskádní PID regulátor pro stabilizaci v horní ustálené poloze se připojí v okamžiku kdy je kyvadlo vychýleno o  $1^\circ$  od horní ustálené polohy, tedy polohy  $0^\circ$ . Nulová regulační odchylka ramene je zajištěna skokovou změnou žádané hodnoty z 0 na aktuální pozici ramene, která je samozřejmě vlivem předchozího švihu nenulová. Výstupní pozice kyvadla je před švihem v dolní ustálené poloze měřená jako nulová. K pozici kyvadla se tedy přičítá hodnota  $180^\circ$  pro zajištění nulové pozice v horní poloze, při tomto směru švihu je totiž změna pozice kyvadla, tedy úhlu  $\varphi$ , záporná. SIMULINKové schema zapojení realizujícího vyšvihnutí a následnou stabilizaci kyvadla v horní poloze je na obrázku 6.1.

Na obrázku 6.3 je vidět roztočení ramene, které způsobí vychýlení kyvadla a následný

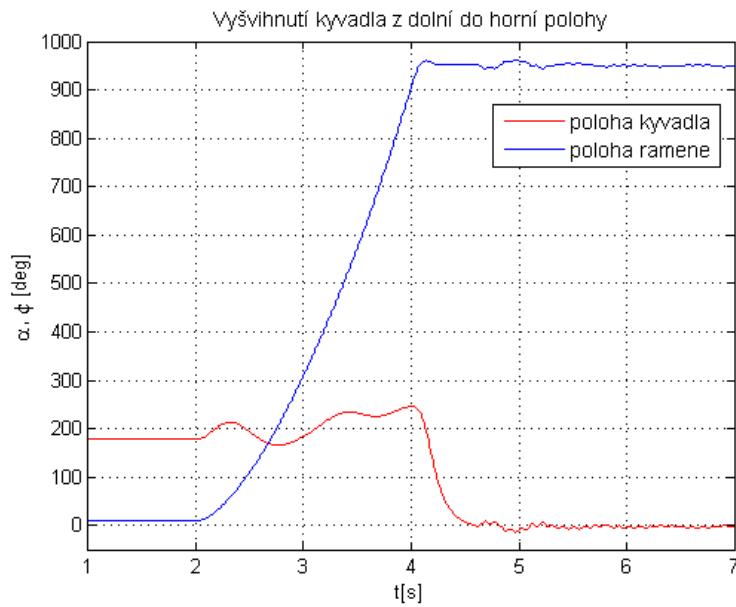


Obrázek 6.1: SIMULINKové schema pro švih a stabilizaci kyvadla v horní poloze



Obrázek 6.2: Vstupní signál pro vyšvihnutí kyvadla z dolní do horní polohy

švih kyvadla do horní polohy, tedy  $0^\circ$ . Následuje připojení PID regulace, ustálení kyvadla v horní poloze a ustálení ramene na nové nenulové pozici.



Obrázek 6.3: Švih kyvadla z dolní do horní polohy

# Kapitola 7

## Demo pro prezentaci činnosti modelu

Pro prezentaci činnosti modelu jsem vytvořil grafické rozhraní s popisem činnosti modelu v prostředí MATLABu SIMULINK. Model se spustí po kliknutí na příslušné tlačítka v grafickém uživatelském rozhraní. Kompletní demo je na přiloženém CD.



Obrázek 7.1: GUI pro prezentaci činnosti modelu

# Kapitola 8

## Závěr

V rámci této práce byl popsán systém inverzního rotačního kyvadla včetně nelinearit, které tento reálný systém obsahuje. Byl vytvořen linearizovaný model systému pro horní i dolní ustálenou polohu. Oba tyto modely byly následně experimentálně ověřeny.

Byla provedena měření pro získání potřebných přenosů a dalších parametrů systému. Přenosy byly určeny jednak podle tvaru přechodových charakteristik, ale i pomocí ARX modelu. Získané přenosy byly zpětně porovnány s naměřenými daty.

V této práci je popsán způsob návrhu regulátorů pro horní i dolní ustálenou polohu kyvadla, zdůvodnění použití vybraných regulátorů i návrh podpůrných prostředků pro návrh LQ regulátorů, jako je Kalmanův filtr. Výsledky dosažené pomocí různých regulátorů jsou nakonec porovnány.

Byl vypracován postup pro vyšvihnutí kyvadla z dolní do horní polohy, včetně vhodného způsobu připojení regulátoru.

Na závěr bylo vytvořeno demo pro snadnou ukázku řízení tohoto modelu. Demo je zpracováno tak, aby mohl být model předveden osobou se základní znalostí práce v MATLABu. Veškeré ukázky řízení jsou popsány, předvádějící osoba nemusí mít o systému inverzního kyvadla prakticky žádné znalosti.

Práce na tomto modelu neskrývala žádná úskalí v podobě špatné funkčnosti modelu. Měřené signály jsou bez znatelného šumu, pouze je občas potřeba očistit kontaktní kroužky pro přenos signálů z pohybujícího se ramene, jinak model pracoval spolehlivě a žádnou výtku k jeho funkčnosti nemám. Princip funkce modelu je velmi jednoduchý a názorný. Veškeré přechodové děje jsou dostatečně rychlé a množství experimentů uskutečnitelných během krátkého času tak dělá tento model, z mého pohledu, velmi vhodný pro výuku v laboratoři dynamických systémů.

# Literatura

- [1] <http://cs.wikipedia.org/>, stav k 18.5.2008.
- [2] <http://dce.felk.cvut.cz/roubal/>, stav k 18.5.2008.
- [3] BAIER, B., *Bakalářská práce: Systém rotačního inverzního kyvadla*, Praha: ČVUT, 2007.
- [4] HAVLENA, V. and ŠTECHA, J., *Moderní teorie řízení*, Praha: ČVUT, 2000.
- [5] HORÁČEK, P., *Systémy a modely*, Praha: ČVUT, 2005.
- [6] JANOUŠEK, J. and SUCHÁNEK, V., *Základy silnoproudé elektrotechniky*, Praha: ČVUT, 2004.
- [7] ŠTECHA, J. and HAVLENA, V., *Teorie dynamických systémů*, Praha: ČVUT, 1999.

# **Příloha A**

## **Obsah přiloženého CD**

- **Demo** - Komplet zdrojových kódů pro demonstraci činnosti modelu.
- **Dokumentace** - Tento dokument ve formátu PDF a zdrojové kódy pro L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.
- **Matlab\_work** - Veškeré zdrojové kódy pro MATLAB a naměřená data.
- **Video** - Videozáznam některých regulačních pochodů.

## **Příloha B**

### **Seznam použitého softwaru**

- Microsoft Windows XP Professional
- The MathWorks MATLAB R2007b
- Control System Toolbox
- MiKTeX 2.7