

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta elektrotechnická

Katedra řídicí techniky



**Odhad kovariančních matic šumu
lineárního stochastického systému**

Diplomová práce

Vypracoval: Peter Matisko

Školitel: Prof. Ing. Vladimír Havlena, CSc.

Praha, 2009

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Katedra řídicí techniky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Peter Matisko**

Studijní program: Elektrotechnika a informatika (magisterský), strukturovaný
Obor: Kybernetika a měření, blok KM1 - Řídicí technika

Název tématu: Odhad kovariančních matic šumu lineárního stochastického systému

Pokyny pro vypracování:

Při návrhu Kalmanova filtru pro odhad stavu lineárního stochastického systému je třeba specifikovat parametry stavového modelu a kovarianční matice šumu procesu a šumu měření. Tyto matice obvykle nejsou k dispozici a jsou v procesu ladění Kalmanova filtru nahrazeny heuristickými postupy.

Proveďte rešerši, seznámte se s metodami odhadu těchto matic.

Zhodnoťte jejich praktickou použitelnost z hlediska výpočetní složitosti a potřebného množství dat.

Ověřte vybrané metody na simulovaných a reálných datech.

Analyzujte dopad volby kovariančních matic šumu na kvalitu odhadu stavu.

Seznam odborné literatury:

Vallail, J and C. Georgakis, Systematic estimation of State noise Statistics for EKF. AICHE Journal, vol. 40, No. 2, 2000.

Duník, J., Design of nonlinear estimation system for filtering, prediction and smoothing. Disertační práce, ZČU Plzeň, 2007.

Vedoucí: Prof. Ing. Vladimír Havlena, CSc.

Platnost zadání: do konce letního semestru 2009/10


prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry




doc. Ing. Boris Šimák, CSc.
děkan

V Praze dne 27. 2. 2009

Prehlásenie

Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu vypracoval samostatne a použil som len podklady (literatúru, projekty, SW atď.) uvedené v priloženom zozname.

V Prahe dňa

.....

podpis

Pod'akovanie

... patrí predovšetkým Prof. Ing. Vladimírovi Havlenovi, CSc. za výborný prístup, cenné odborné rady a celkovo aktívne vedenie môjho akademického a profesionálneho života. Ďalej chcem poďakovať Ing. Jindřichovi Duníkovi, Ph.D. zo ZČU v Plzni za poskytnuté materiály, početné konzultácie a množstvo cenných rád a pripomienok. V neposlednom rade patrí poďakovanie mojej rodine za aktívnu podporu počas celého štúdia.

Abstrakt

Teória optimálneho odhadovania stavov dynamických systémov je dobre teoreticky prepracovaná. Pokiaľ sú splnené všetky predpoklady, dostaneme optimálny výsledok podľa zvoleného kritéria. Zásadným problémom tejto teórie je skutočnosť, že dosiahnutie optimálneho výsledku je podmienené znalosťou kovariančných matíc šumu. Tieto matice v praktických úlohách nikdy nepoznáme presne. Na základe zmeraných dát je potrebné charakteristiky šumu odhadovať. K tejto téme vzniklo od 70-tych rokov množstvo článkov popisujúcich metódy založené na rôznych princípoch. Cieľom tejto práce je otestovať vybrané metódy na niekoľkých dynamických systémoch a za rôznych podmienok. Ukážeme nedostatky a výhody jednotlivých metód, zameriame sa na teoretické vysvetlenie ich vlastností a naznačíme možné riešenia. V závere práce sú diskutované otvorené témy pre ďalšie pokračovanie výskumu v oblasti odhadovania a filtrácie.

Abstract

The theory of optimal state estimation is straight and very well described. If all the assumptions are satisfied we get optimal results according to the selected criterion. The main problem of optimal state estimation theory is that it works with known noise covariance matrices. However, these matrices are never known and they need to be estimated from measured data. In the 70s, the first articles on this topic were published. Since then, several new algorithms working on different principles were proposed. The aim of the diploma thesis is testing the methods with several different dynamic systems and with various conditions. We try to show advantages and disadvantages of chosen methods and also try to find theoretical explanation of these properties. In some cases we try to find solutions for problems that occur. Some open problems discussed at the end of the thesis that might be a topic for further research.

Obsah

1. ÚVOD	12
1.1. STAV A JEHO ODHAD	12
1.2. CIEĽ DIPLOMOVEJ PRÁCE	14
1.3. MATEMATICKÝ APARÁT	15
2. TEORETICKÉ ZÁKLADY	19
2.1. STOCHASTICKÝ SYSTÉM	19
2.2. ZHRNUTIE POZNATKOV Z ODHADOVANIA	20
2.3. KALMANOV FILTER	22
2.4. ANALÝZA VPLYVU KOVARIANČNÝCH MATÍC ŠUMU NA KVALITU ODHADU KALMANOVHO FILTRA	24
3. METÓDY ODHADOVANIA KOVARIANČNÝCH MATÍC ŠUMU	29
3.1. TEST OPTIMALITY KALMANOVHO FILTRA	31
3.2. ODHADOVANIE KOVARIANČNÝCH MATÍC ŠUMU METÓDOU MAXIMÁLNEJ VIEROHODNOSTI	33
3.3. MEHROVA METÓDA ODHADU S VYUŽITÍM KORELÁCIE VÝSTUPU	35
3.4. MEHROVA METÓDA ZLEPŠOVANIA ZHODY KOVARIANCIE	37
3.5. ODHADOVANIE OPTIMÁLNEHO ZOSILNENIA KF (CAREW, BÉLANGER)	39
3.6. BÉLANGEROVA METÓDA ODHADU KOVARIANČNÝCH MATÍC	42
3.7. METÓDA ALS (ODELSON, ET AL.)	49
3.8. METÓDA SCALS (RAJAMANI, RAWLINGS)	53
3.9. ROZŠÍRENIE ALS, METÓDA GALS	58
3.10. ODHAD ŠTRUKTÚRY ŠUMU	63
3.11. ZHRNUTIE METÓD ODHADU KOVARIANČNÝCH MATÍC	65
4. TESTOVANIE METÓD ODHADU KOVARIANČNÝCH MATÍC ŠUMU	66
4.1. MEHROV TEST OPTIMALITY KALMANOVHO FILTRA	67
4.2. MEHROVA METÓDA ODHADU KALMANOVHO ZOSILNENIA POMOCOU MAXIMÁLNEJ VIEROHODNOSTI	71
4.3. MEHROVA METÓDA S VYUŽITÍM KORELÁCIE VÝSTUPU	72
4.4. MEHROVA METÓDA ZLEPŠOVANIA ZHODY KOVARIANCIE	75
4.5. METÓDA ODHADU OPTIMÁLNEHO ZOSILNENIA (CAREW, BÉLANGER)	76
4.6. BÉLANGEROVA METÓDA ODHADU KOVARIANČNÝCH MATÍC ŠUMU	79
4.7. METÓDA ALS	87
4.8. METÓDA SCALS	93
5. ODHADOVANIE KOVARIANČNÝCH MATÍC ŠUMU Z EXPERIMENTÁLNYCH DÁT	94
5.1. POPIS REÁLNEHO SYSTÉMU	94
5.2. ODHADOVANIE KOVARIANČNÝCH MATÍC BÉLANGEROVOU METÓDOU	96
5.3. ODHADOVANIE KOVARIANČNÝCH MATÍC ŠUMU METÓDOU ALS	98
5.4. ODHADOVANIE KOVARIANČNÝCH MATÍC ŠUMU METÓDOU SCALS	103
5.5. ZHRNUTIE POZNATKOV Z ODHADOVANIA KOVARIANČNÝCH MATÍC ŠUMU Z EXPERIMENTÁLNYCH DÁT	104

6. ZÁVER	107
6.1. ZHODNOTENIE METÓD	107
6.2. ZHODNOTENIE DIPLOMOVEJ PRÁCE	109
6.3. PERSPEKTÍVY ĎALŠIEHO VÝSKUMU	109
PRÍLOHA 1 – POMOCNÉ FUNKCIE PRE MATLAB	112
POUŽITÁ LITERATÚRA	118

Značenie a skratky

V publikáciách a článkoch z oblasti lineárnych systémov a filtrácie sa používa niekoľko rôznych značení. V diplomovej práci bude väčšina značenia a skratiek prevzatá z [1]. Slovenská terminológia bude vychádzať predovšetkým z [1] a [2]. Väčšina zdrojov sú anglické články a publikácie. V určitých prípadoch bude v zátvorke uvádzaný anglický pojem. Odkazy na literatúru sú uvedené v hranatých zátvorkách.

Značenie matematických výrazov je nasledovné. Tučným písmom sú značené matice a vektory. Kurzívou sú značené konštanty a skalárne veličiny. Okrem jednoznačných prípadov majú funkcie uvedený argument. Pokiaľ nie je uvedené inak, čas t je uvažovaný ako diskrét-ny. Vektory sú stĺpcové. Hranaté zátvorky $[]$ vždy predstavujú matice a nie sú inak využívané v matematických výrazoch. Zložené zátvorky $\{ \}$ ohraničujú vo väčšine prípadov argument operátora, výnimočne dopĺňajú okrúhle zátvorky pri členení rozsiahlych výrazov.

A, B, C, D, G	matice systému
$\mathbf{x}(t)$	stav systému
$\mathbf{u}(t)$	deterministický vstup systému
$\mathbf{y}(t)$	výstup systému
$\hat{\mathbf{x}}(t)$	odhad strednej hodnoty $\mathbf{x}(t)$
$\hat{\mathbf{x}}(t t-1)$	odhad strednej hodnoty $\mathbf{x}(t)$ z dát získaných do času $t-1$
$\hat{\mathbf{x}}_{t t-1}(\boldsymbol{\theta})$	odhad strednej hodnoty $\hat{\mathbf{x}}(t t-1)$ ako funkcia parametrov $\boldsymbol{\theta}$
$\hat{\mathbf{x}}(t t)$	odhad strednej hodnoty $\mathbf{x}(t)$ z dát získaných do času t
$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t t-1)$	odchýlka stavu od jeho strednej hodnoty
$\boldsymbol{\varepsilon}(t t-1)$	chyba predikcie výstupu, <i>inovácia</i>
$\mathbf{v}(t)$	šum procesu, stochastický vstup
$\mathbf{e}(t)$	šum merania
n	počet stavov, rád systému
r	počet výstupov
Q	kovariančná matica šumu procesu
R	kovariančná matica šumu merania

\mathbf{S}	vzájomná kovariančná matica šumu procesu a merania
\mathbf{P}_0	kovariančná matica chyby odhadu počiatočného stavu
\mathbf{P}, \mathbf{P}_x	kovariančná matica chyby predikcie odhadu stavu
\mathbf{P}_y	autokovariančná matica chyby predikcie výstupu
\mathbf{I}_n	jednotková matica rozmerov $n \times n$
\mathbf{A}^T	transponovaná matica
$E\{ \cdot \}, m$	stredná hodnota
$\text{cov}\{ \cdot \}$	kovariancia
s^2	rozptyl
s	smerodajná odchýlka
$p(x y)$	pravdepodobnosť x podmienená y
$p(x, y)$	združená pravdepodobnosť
$d(t)$	Dirackov impulz resp. jednotkový impulz v diskretnom prípade
$h(t)$	Heavisidova funkcia, jednotkový skok v čase t
$\text{tr}(\mathbf{A})$	stopa matice \mathbf{A}
\mathbf{A}^\dagger	pseudoinverzia matice
$\text{diag}(\mathbf{d})$	matica, ktorá má na diagonále vektor \mathbf{d}
$\bigoplus_1^N \mathbf{A}$	priamy súčet matíc (<i>a.j.</i> direct sum)
\otimes	Kroneckerov produkt
\oplus	Kroneckerov súčet
$\text{vec}\{\mathbf{A}\}$	vektorizácia matice \mathbf{A}
$\mathbf{A}_{\text{vec}}, (\mathbf{A})_{\text{vec}}$	vektorizovaná matica \mathbf{A} , po aplikácii operátora $\text{vec}\{ \cdot \}$
$\text{vecMin}\{\mathbf{A}\}$	minimalizovaná vektorizácia symetrickej matice \mathbf{A}
$\mathbf{A}_{\text{mvec}}, (\mathbf{A})_{\text{mvec}}$	vektorizovaná matica \mathbf{A} , po aplikácii operátora $\text{vecMin}\{ \cdot \}$
$\mathcal{P}_{p,q,N}$	permutačná matica
\mathcal{D}_n	duplikačná matica
$\mathcal{K}_{n,p}$	komutačná matica
$a_{ij}, [\mathbf{A}]_{ij}$	prvok matice \mathbf{A} s indexom i, j

$\ \cdot\ _2, \ \cdot\ $	kvadratická norma
$\ \cdot\ _\infty$	nekonečná norma
\triangleq	definícia výrazu
\approx	rovnosť platí približne
h.p.	hustota pravdepodobnosti
p.h.p.	podmienená hustota pravdepodobnosti
MS	odhad v zmysle minimalizácie kvadratického kritéria
LMS	lineárny odhad v zmysle minimalizácie kvadratického kritéria
ML	maximálna vierohodnosť (<i>a.j.</i> maximum likelihood)
KF	Kalmanov filter
SDP	semidefinitné programovanie
LTI	lineárny časovo invariantný systém (<i>a.j.</i> linear time invariant)
MPC	prediktívny regulátor založený na modeli systému
SISO	systém s jedným vstupom a výstupom (<i>a.j.</i> single input/output)
MIMO	systém s viac vstupmi a viac výstupmi (<i>a.j.</i> multi input/output)

1. Úvod

1.1. Stav a jeho odhad

V druhej polovici minulého storočia začala vznikať nová teória popisu dynamických systémov založená na pojme stav. Jej autorom je Rudolf Kalman. Od šesťdesiatych rokov sa poznatky okolo stavového popisu rozvíjali rýchlym tempom a predstavovali veľký potenciál pre rozličné praktické úlohy, predovšetkým v oblasti regulácie a riadenia. Už v počiatkoch aplikácií novej teórie vyvstali prvé problémy reálneho sveta, ktorými sú neurčitosť a nelinearity. Tieto dva faktory ovplyvňovali použitie lineárnej teórie tak významne, že jej širšie uplatnenie v praxi sa oneskorilo o niekoľko desiatok rokov. Od osemdesiatych rokov nastal rapídny rozvoj výpočtovej techniky, ktorá umožňovala postupne aplikovať stále zložitejšie numerické metódy schopné pracovať v reálnom čase. Do modelov bolo možné zahrňovať čoraz viac nelineárnych prvkov a adaptívnych algoritmov, ktoré dokážu eliminovať neurčitosti v modeli a meniace sa pracovné podmienky. V niekoľkých posledných rokoch sa vedecké články sústreďujú na využitie prvkov umelej inteligencie ako neurónové siete, fuzzy a pod. Tieto metódy majú za úlohu zlepšiť vlastnosti filtra za zložitých podmienok, ako sú časovo premenlivé parametre, významné nelinearity v systéme, multimodálny korelovaný negaussovský šum a podobne.

Výsledkom lineárnej teórie v oblasti odhadovania a filtrácie je Kalmanov filter (KF), bližšie popísaný v nasledujúcich kapitolách. Matematicky sa dá dokázať, že tento filter je najlepším estimátorom stavu lineárneho stochastického systému s gaussovským šumom s nulovou strednou hodnotou v zmysle MS. Pre ostatné typy šumu je KF optimálny filter v zmysle LMS. Optimum v zmysle MS a LMS bude podrobne vysvetlené v kapitole 2. Kvalita odhadu je daná veľkosťou kovariancie chyby odhadu, filter teda minimalizuje kvadratickú chybu odhadu.

Na dodržanie optimality je potrebné splniť niekoľko prísnych podmienok. Predovšetkým je to presná znalosť systému a popisu stochastických zložiek a neurčítostí. Tieto podmienky nie sú v reálnych aplikáciách takmer nikdy splnené, preto je potrebné modifikovať KF tak, aby dosahoval „vyhovujúce“ výsledky. Pojem vyhovujúci je obvykle stanovený inžiniersky podľa konkrétnej aplikácie. Nevyhnutnou podmienkou použitia filtra je zachovanie stability, resp. konvergencia odhadu.

Ako prvý predpoklad sme uviedli znalosť modelu reálneho systému. K zostaveniu modelu nám môžu pomôcť fyzikálne (resp. chemické, biologické) princípy a početné identifikačné metódy. V súčasnosti existujú softvérové balíky so sadou funkcií na identifikáciu systémov z nameraných dát. Menšia pozornosť sa venuje druhému významnému predpokladu, ktorým je znalosť stochastickej časti dynamických systémov. Dôležitosť týchto poznatkov sa ukáže už pri odvodení Kalmanovho filtra, v ktorom kovariančné matice šumu vystupujú ako ladiace parametre a práve od nich závisí optimalita filtra a výsledných odhadov. V lineárnej teórii uvažujeme biely gaussovský šum s nulovou strednou hodnotou. V reálnych systémoch sa však môže vyskytovať farebný šum. Túto skutočnosť je nevyhnutné rozpoznať na základe meraní. Farebný šum môžeme modelovať pridaním tzv. tvarovača šumu do modelu ako ďalšiu dynamickú časť. Zahrnutím zložitejších modelov stochastických vlastností systému môžeme výrazne zvýšiť kvalitu odhadovania.

Teória odhadovania je dobre prepracovaná a pri splnení všetkých predpokladov dostaneme optimálny výsledok podľa zvoleného kritéria. Už pri uvažovaní najjednoduchších podmienok (nekorelovaný gaussovský biely šum) sa však vyskytne problém, že v minimalizovanom kritériu sa vyskytujú neznáme matice popisujúce kovariancie šumu. Tieto prvky je nutné odhadovať na základe zmeraných dát čo najpresnejšie, aby bolo možné priblížiť sa optimálnemu riešeniu.

Šum merania môžeme odvodiť z presnosti jednotlivých meracích členov a zo znalostí charakteru procesu, napríklad turbulencie pri prúdení a pod. Niektoré vedecké články z tejto oblasti považujú šum merania za známy. Komplikovanejšie je popísať šum procesu, o ktorom v mnohých prípadoch nemáme žiadne apriórne znalosti. Úlohou je nájsť algoritmy, ktoré dokážu na základe dát spoľahlivo určiť stochastické vlastnosti dynamických systémov a detekovať štruktúry v zdrojoch šumu.

Prvé práce v oblasti popisu stochastických vlastností systému začali vznikať na začiatku sedemdesiatych rokov minulého storočia. Medzi veľmi často citované články patria práce Mehru a Bélanger [10], [11], [22], [23]. V komentári k Mehrovmu článku v [14] upozornili autori Neethling a Young na dôležitý poznatok, že autokorelačná funkcia inovácií je lineárne závislá na neznámych parametroch \mathbf{Q} , \mathbf{R} . Tento fakt využil vo svojej práci P. R. Bélanger, [23]. Lineárna závislosť umožňuje vyriešiť minimalizáciu kvadratického kritéria analyticky. Iné dostupné metódy využívajúce napríklad maximálnu vierohodnosť vždy vyústia do nutnosti numerických metód a prípadne výrazného zjednodušovania problému. Príkladom môžu byť práce [9], [10], [22]. Metódy odhadu kovariančných matíc šumu sa stále vyvíjajú a vyvstávajú nové problémy, medzi ktoré patrí identifikácia stochastickej časti systému, tvarovače šumu

a podobne. Až články z roku 2008 sa zaoberajú určením zdroja šumu minimálnej dimenzie. Predošlé vedecké práce považovali maticu systému \mathbf{G} za známu, alebo pracovali len s maticou $\mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T$, ktorá má rozmer rovnaký ako rád systému. Identifikovať skutočnú štruktúru šumu má veľký význam pre zlepšenie výsledkov v oblasti odhadovania a filtrácie a je významnou otvorenou témou súčasného výskumu.

1.2. Cieľ diplomovej práce

Cieľom diplomovej práce je vytvorenie prehľadu metód odhadovania kovariančných matíc u lineárnych stochastických dynamických systémov. Práca začína krátkym zhrnutím matematického aparátu a úvodom do tematiky. Druhá kapitola predstavuje odvodenie a súhrn poznatkov z oblasti odhadovania a filtrácie. Samostatná podkapitola je venovaná Kalmanovmu filtru a jeho ladeniu. Kľúčové kapitoly sú tri a štyri. Tretia kapitola obsahuje popis jednotlivých metód. Prvé podkapitoly sa venujú Mehrovým metódam, ktoré patria medzi často citované a často sú označované ako „klasické“. Odkaz na články [10], [11] nájdeme takmer v každej publikácii venovanej odhadom kovariančných matíc. Na tieto dve publikácie nadväzujú práce [22], [23] od autorov Carewa a Bélanger. Druhá časť kapitoly sa venuje najnovším prácam v tejto oblasti medzi ktoré patria [12], [16], [20] od autorov Rajamani, Rawlings, Odelson et al. a Akesson et. al. V najnovších publikáciách, medzi ktoré patria aj tri uvedené, sa začínajú objavovať prvé riešenia na určenie štruktúry šumu. Tento problém je otvorený a je predmetom súčasného výskumu.

Štvrtá kapitola porovnáva jednotlivé metódy z rôznych hľadísk na základe ich implementácie v prostredí Matlab. Testovanie pozostáva z niekoľkých krokov a zameriava sa na otestovanie metódy so systémami rôznej zložitosti a rôznych podmienok. Tri testovacie systémy boli zvolené tak, aby postupne narastala zložitosť. Prvým je jednoduchý skalárny systém. Kovariančné matice obsahujú len jeden prvok. Druhý je systém tretieho rádu s jedným stochastickým vstupom a jedným výstupom. Tretí rád vytvára zložitejšiu dynamiku procesu a náročnejšie podmienky pre odhad kovariančných matíc. Posledný je systém piateho rádu s tromi stochastickými vstupmi a dvomi výstupmi. U tohto systému sú podmienky zložitejšie aj v tom zmysle, že autokorelácia inovácií je súbor matíc miesto vektora v prvých dvoch prí-

kladoch. To má za následok ďalšie numerické komplikácie, ktoré budú bližšie špecifikované práve v kapitole 4 aj s návrhom možných riešení.

Hlavným zámerom práce je overenie vlastností publikovaných metód. Autori článkov často vyberú ako príklad vyhovujúce zadanie a neupozorňujú predovšetkým na numerické problémy spojené s riešením. Numerická stabilita je veľmi významným faktorom algoritmov a je potrebné jej venovať patričnú pozornosť. Pri prechode od akademických úloh a implementácie pomocou matematických softvérov k priemyselným aplikáciám je dôležité zväziť aj pamäťové nároky. Priemyselné počítače a automaty sú obvykle vybavené omnoho menšími výpočtovými možnosťami ako PC s prepracovaným matematickým nástrojom. Ak algoritmus obsahuje inverzie matíc, rozklady SVD, prípadne manipulácie s veľkými maticami, ktoré sú často výsledkom Kroneckerových operácií, potom implementácia v reálnych praktických aplikáciách je veľmi obtiažna a zdĺhavá. V práci bude kladený dôraz na testovanie algoritmov s rôznym nastavením a so systémami rôznej zložitosti. Výsledky budú porovnané a analyzované tak, aby bolo možné posúdiť danú metódu z pohľadu aplikovateľnosti na reálne systémy. Aplikácia môže byť vo forme adaptívnej filtrácie, prípadne ako pomoc inžinierom nastaviť parametre Kalmanovho filtra čo najbližšie optimu.

V piatej kapitole nasadíme vybrané metódy na súbor dát z reálneho systému. V tomto prípade nemáme žiadne apriórne informácie o šume. Úlohou bude aplikovať niektoré metódy, odhadnúť kovariančné matice a zhodnotiť výsledky.

V závere práce budú diskutované otvorené problémy pre ďalší výskum v oblasti odhadu stochastických vlastností procesov. V Prílohe 1 sú kódy pomocných funkcií, ktorých význam bude upresnený v kapitole 3, predovšetkým u metód ALS a scALS.

1.3. Matematický aparát

Uvedieme základné vzťahy z maticovej algebry a kalkulu. Podrobné odvodenia a dôkazy vzťahov sú uvedené v početných matematických monografiách a prekračujú rozsah tejto práce, preto budú uvádzané len výnimočne. Podrobnejšie zhrnutie vzťahov používaných v tematike odhadovania a filtrácie môžeme nájsť v [3]. Niektoré dôkazy viet štatistiky nájdeme v [7]. Podrobná publikácia o maticovej algebre je [24], kde je možné nájsť definície Kroneckerových operátorov, vlastnosti duplikačných, permutačných, komutačných matíc a pod.

Parciálne derivácie funkcie podľa vektorov je možné definovať dvomi spôsobmi. Prvý vytvorí derivovaním skaláru podľa vektora stĺpec. V tejto práci bude použitý postup, kde výsledkom derivovania podľa vektora bude riadok. Rovnaký postup je využívaný vo väčšine publikácii. Je možné používať oba spôsoby zápisu derivácii, ale je dôležité zachovať konzistentnosť vo všetkých výrazoch. Pre derivovanie platia nasledujúce vzťahy

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \right],$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T), \quad \frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{y}^T \mathbf{B}^T, \quad \frac{\partial \mathbf{y}^T \mathbf{C} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{y}^T \mathbf{C}.$$

Pre skrátenie matematických výrazov a lepšiu čitateľnosť využijeme v niektorých prípadoch zápis prevzatý z [3]. Označme

$$E\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T (\dots)\} = E\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\},$$

kde bodky v druhej zátvorke znamenajú presnú kópiu výrazu v predchádzajúcej zátvorke. Toto skrátenie je vhodné pri zápise kvadratických foriem.

Stopa matice značená $\text{tr}(\mathbf{A})$ (z anglického slova trace) je súčet prvkov na diagonále, zároveň je rovná súčtu vlastných čísel matice. Platí

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_i a_{ii} = \sum_i I_i.$$

Porovnanie matíc definujeme nasledovne. Maticu \mathbf{A} prehlásime za väčšiu ako maticu \mathbf{B} v prípade, že rozdiel $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ je pozitívne definitná matica. Platí nasledovný zápis, kde I_i označuje vlastné čísla matice

$$\mathbf{A} \geq \mathbf{B} \Leftrightarrow I_i(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \geq 0, \forall i.$$

Pre stopu matice a jej derivácie platí ([9], [3])

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\mathbf{AB}) &= \operatorname{tr}(\mathbf{BA}), & \frac{\partial \operatorname{tr}(\mathbf{ABA}^T)}{\partial \mathbf{A}} &= 2\mathbf{AB} \quad \text{kde } \mathbf{B} = \mathbf{B}^T, \\ \operatorname{tr}(\mathbf{A}) &= \operatorname{tr}(\mathbf{A}^T), & \frac{\partial \operatorname{tr}(\mathbf{AXB})}{\partial \mathbf{X}} &= \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T, \\ \operatorname{tr}(a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) &= a \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + b \operatorname{tr}(\mathbf{B}), & \frac{\partial \operatorname{tr}(\mathbf{AX}^T \mathbf{B})}{\partial \mathbf{X}} &= \mathbf{AB}. \end{aligned}$$

Normálne rozdelenie jednej premennej má tvar

$$N(\mathbf{m}, \mathbf{s}^2): f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} \exp\left(-\frac{1}{2s^2}(x-\mathbf{m})^2\right).$$

Pre n premenných platí

$$N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{P}): f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2p)^{n/2} \sqrt{\det(\mathbf{P})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right).$$

V uvedenom prípade sú premenné $\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}$ vektory dĺžky n a kovariančná matica \mathbf{P} má rozmer $n \times n$. Zo vzťahu je zrejmé, že matica \mathbf{P} musí byť regulárna, aby bola invertovateľná.

Kroneckerov produkt a súčet matice sú pre $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ definované nasledovne

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \triangleq \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} \triangleq (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_m) + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B}).$$

Priamy súčet matice definujeme ako

$$\bigoplus_{i=1}^N \mathbf{A}_i \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_N \end{bmatrix}.$$

Pseudoinverzia matice je zovšeobecneným pojmom inverzie. Je možné ju aplikovať na obdĺžnikové matice. Platia nasledovné rovnosti

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} &= \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger &= \mathbf{A}^\dagger\end{aligned}$$

Vyššie uvedené vzťahy existujú, pokiaľ matica \mathbf{A} má hodnotu rovnú menšiemu rozmeru. V prípade všeobecnej matice môžeme využiť pseudoinverziu Moore–Penrose. Maticu \mathbf{A} rozložíme pomocou rozkladu SVD nasledovne

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T.$$

Potom pre MP inverziu platí

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{U}\mathbf{S}^+\mathbf{V}^T,$$

pričom matica \mathbf{S}^+ obsahuje inverziu všetkých nenulových singulárnych čísel. Nulové singulárne čísla ostanú nulové. Pseudoinverziu MP uplatníme tam, kde invertujeme maticu so singulárnymi číslami blízky nule.

2. Teoretické základy

2.1. Stochastický systém

Diskrétny lineárny časovo invariantný stochastický systém (skr. LTI) je definovaný nasledovne

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}\mathbf{v}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t),\end{aligned}\tag{2.1}$$

kde matica \mathbf{G} je daná zosilnením jednotlivých zložiek šumu a jeho štruktúrou. Šum procesu $\mathbf{v}(t)$ a šum merania $\mathbf{e}(t)$ sú gaussovské stacionárne náhodné postupnosti s nulovou strednou hodnotou, ide o tzv. biele šумы. Sú v dvoch rôznych časových okamihoch vzájomne nezávislé. Platí

$$\begin{aligned}E\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}\right\} &= \mathbf{0}, \\ \text{cov}\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}\right\} &= E\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}^T\right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Matice \mathbf{Q} , \mathbf{R} predstavujú kovarianciu šumu procesu resp. šumu merania. Matica \mathbf{S} reprezentuje vzájomnú kovarianciu medzi šumom merania a procesu. V [1] je ukázané, že v prípade korelovaných šumov (nenulová matica \mathbf{S}) je možné nájsť transformáciu systému tak, že výsledná kovariančná matica má tvar $\begin{bmatrix} \mathbf{Q}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}' \end{bmatrix}$. Systém s korelovaným šumom je možné previesť na systém s nekorelovaným šumom. Pre tento systém platí $\mathbf{v} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}')$ a $\mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}')$.

Pre stochastický systém platia nasledovné vzťahy podrobne odvodené v [1] resp. [8]. Premenná $\boldsymbol{\mu}_x$ predstavuje strednú hodnotu \mathbf{x} .

$$\mathbf{P}_x(t) = E\left\{\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t)\right\} = E\left\{(\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\mu}_x(t))(\dots)^T\right\},\tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_x(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{P}_x(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}, \\ \mathbf{P}_y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{P}_x(t)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}, \\ \mathbf{P}_{xy}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{P}_x(t)\mathbf{C}^T + \mathbf{S},\end{aligned}\tag{2.4}$$

Pokiaľ uvedené vzťahy konvergujú, platí $\mathbf{P}_x = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x(t)$ a ďalej platí Ljapunovova rovnica v tvare

$$\mathbf{P}_x = \mathbf{A}\mathbf{P}_x\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}.\tag{2.5}$$

Pre rekurzívne vzťahy sú dôležité počiatkové podmienky. Tie sú dané v podobe $\hat{\mathbf{x}}(0)$ a $\mathbf{P}_x(0)$. Tieto dva parametre v sebe obsahujú informáciu o počiatkovom stave systému a o neurčitosti tejto informácie. Čím väčšia je kovariančná matica $\mathbf{P}_x(0)$, tým menšiu istotu máme o danom systéme v počiatkovom stave.

2.2. Zhrnutie poznatkov z odhadovania

V rôznych úlohách potrebujeme odhadovať hodnoty stavov dynamického systému na základe niekoľkých meraných výstupov. Dynamika systému a meraná veličina sú zaťažené šumom procesu a šumom merania. Hodnoty stavov chceme odhadovať optimálne v určitom zmysle. Matematicky je táto úloha formulovaná ako minimalizácia normy. Využívajú sa tri normy s označením L_1 , L_2 a L_∞ . Tieto normy sa zapisujú aj nasledovne $|\cdot|$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$. Obvykle sa označenie $\|\cdot\|$ bez indexu využíva pre Euklidovskú L_2 normu.

Pre odvodenie Kalmanovho filtra využijeme kvadratické kritérium, ktoré má tvar

$$J_{MS} = E \left\{ (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{MS}(\mathbf{y}))^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{MS}(\mathbf{y})) \right\}\tag{2.6}$$

Úlohou je nájsť takú funkciu meraných dát aby kritérium J_{MS} bolo minimálne (MS značí z angličtiny mean square). Kritérium prepíšeme do integrálneho tvaru

$$J_{MS} = \iint (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{MS}(\mathbf{y}))^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{MS}(\mathbf{y})) p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}. \quad (2.7)$$

Kritérium ďalej upravíme dosadením za $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(\mathbf{x} | \mathbf{y}) p(\mathbf{y})$, vykonáme obe integrácie a pomocou derivácie podľa $\hat{\mathbf{x}}_{MS}(\mathbf{y})$ nájdeme minimum výsledného vzťahu. Z výpočtu dostaneme hľadaný vzťah

$$\hat{\mathbf{x}}_{MS}(\mathbf{y}) = E\{\mathbf{x} | \mathbf{y}\}. \quad (2.8)$$

Interpretácia tohto vzťahu je, že odhadom minimalizujúcim strednú kvadratickú chybu je podmienená stredná hodnota. Pomocou princípu ortogonalít je možné dokázať, že tento odhad je najlepším možným odhadom v zmysle minimalizácie Euklidovskej normy $\|\cdot\|_2$.

Použitie výsledku z predošlého odstavca je vo väčšine prípadov obtiažne alebo nemožné, pretože nepoznáme združenú hustotu pravdepodobnosti. Je vhodné očakávať funkciu odhadu stavu v nejakej zjednodušenej forme. Takýmto zjednodušením je lineárna funkcia. Odhad stavu $\hat{\mathbf{x}}$ budeme počítať v tvare

$$\hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}, \quad (2.9)$$

kde maticu \mathbf{A} a vektor \mathbf{b} budeme voliť tak, aby sme získali kvadraticky optimálny odhad. Minimalizujeme kritérium

$$J_{LMS} = E\left\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y}))^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y}))\right\}, \quad (2.10)$$

kde za $\hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y})$ dosadíme všeobecnú lineárnu funkciu $\hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$. Potom platí

$$J_{LMS} = E\left\{(\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{b})^T (\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{b})\right\}. \quad (2.11)$$

Minimalizovaním tohto kritéria dostaneme vzťahy podrobne odvodené v [1]

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y}) &= \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y), \\ \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{LMS}} &= \mathbf{P}_{xx} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

kde $\boldsymbol{\mu}_x$ je stredná hodnota \mathbf{x} a $\boldsymbol{\mu}_y$ je stredná vektora \mathbf{y} predstavujúceho odmerané dáta. Vzťahy môžeme interpretovať nasledovne. Odhad stavu $\hat{\mathbf{x}}_{LMS}$ sa na základe nameraných dát \mathbf{y} upraví tým výraznejšie, čím väčšia je väzba medzi dátami a stavom, teda väčšia vzájomná kovariančná matica \mathbf{P}_{xy} a zároveň čím menší je rozptyl dát charakterizovaný autokovariančnou maticou \mathbf{P}_{yy} . Obdobne platí, že čím väčšia závislosť stavu na dátach a čím menšia neurčitost' dát, tým viac sa zníži neurčitost' odhadu stavu.

2.3. Kalmanov filter

Kalmanov filter je pozorovateľ, ktorý odhaduje hodnotu stavu dynamického systému na základe meraných vstupov a výstupov. Pracuje s prvými dvomi štatistickými momentmi, ktoré plne charakterizujú práve gaussovské rozloženie náhodnej veličiny. V prípade lineárneho systému s gaussovským šumom je tento odhad optimálny v zmysle MS. Pre iný šum je odhad optimálny v zmysle LMS. Ďalej v tejto kapitole uvažujeme nekorelovaný gaussovský šum. KF je dynamický systém definovaný jednokrokovovo alebo dvojkrokovovo. Pre jednokrokový algoritmus platia vzťahy

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \\
 \mathbf{K}(t) &= \mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}, \\
 \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{A}\mathbf{K}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1), \\
 \mathbf{P}(t+1|t) &= \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{K}(t)\mathbf{C})\mathbf{P}(t|t-1)(\mathbf{I} - \mathbf{K}(t)\mathbf{C})^T \mathbf{A}^T - \mathbf{A}\mathbf{K}(t)\mathbf{R}\mathbf{K}^T(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q},
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

kde $\mathbf{K}(t)$ je Kalmanovo zosilnenie a rozdiel $\boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1) \triangleq \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t|t-1)$ je chyba predikcie výstupu, tzv. *inovácia*. Je to rozdiel meraného výstupu reálnej sústavy a odhadu výstupu pomocou KF. Tento rozdiel je privádzaný do filtra násobený Kalmanovým zosilnením a nazýva sa injekcia výstupu do stavu. Na základe chyby odhadu výstupu sa koriguje odhad stavov v pozorovateľovi.

Odhad stavu je možné počítať v dvoch krokoch. Prvý je filtračný krok a druhý predikčný. Filtračný krok vytvorí aposteriórny odhad stavu $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$ a kovariančnej matice chyby odhadu $\mathbf{P}(t|t)$, pretože zohľadňuje skutočnú hodnotu výstupu v čase t . Platia nasledujúce vzťahy

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(t) &= \mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}, \\ \hat{\mathbf{y}}(t|t-1) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \\ \hat{\mathbf{x}}(t|t) &= \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{K}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1), \\ \mathbf{P}(t|t) &= \mathbf{P}(t|t-1) - \mathbf{K}(t)(\mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R})\mathbf{K}^T(t).\end{aligned}\tag{2.14}$$

Vo filtračnom kroku sa vypočíta Kalmanovo zosilnenie $\mathbf{K}(t)$ a aktualizuje sa stav a kovariančná matica chyby na základe dát, teda merania vstupu a výstupu reálneho systému.

Nasleduje predikčný krok algoritmu (nazývaný aj časový), ktorý vytvorí apriórnu informáciu pre nasledujúci časový krok $t+1$. Platí

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t|t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{P}(t+1|t) &= \mathbf{A}\mathbf{P}(t|t)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Po predikčnom kroku prejde systém do času $t+1$ a celý proces sa opakuje. Inicializácia Kalmanovho filtra je daná našou apriórnou informáciou o systéme. Určíme počiatočný stav systému a jeho neurčitosť v tvare

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(0) &= \hat{\mathbf{x}}(0|-1) = \hat{\mathbf{x}}_0, \\ \mathbf{P}(0) &= \mathbf{P}(0|-1) = \mathbf{P}_0.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Kalmanov filter popísaný uvedenými vzťahmi je v zmysle MS odhadu najlepší estimátor stavu lineárneho dynamického systému s gaussovským šumom. Toto tvrdenie je možné matematicky dokázať. Parametrami KF sú matice systému \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{G} a kovariančné matice šumu \mathbf{Q} , \mathbf{R} . V prípade, že maticu \mathbf{G} nepoznáme, odhadujeme namiesto matice \mathbf{Q} súčin $\mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T$. V tomto prípade vyjadrenie matíc \mathbf{Q} , \mathbf{G} nie je jednoznačné. Jednou z možností ako postupovať pri neznalosti \mathbf{G} je zvoliť túto maticu jednotkovú a odhadovať priamo \mathbf{Q} rozmeru systému n .

Najlepší odhad, v zmysle najmenej kovariancie chyby odhadu, dostaneme v prípade, že presne poznáme charakteristiky šumu. Z tohto tvrdenia vyplývajú problémy spojené

s aplikáciou KF. Lineárne modely sú vždy len aproximáciou skutočných sústav. Šum vo väčšine prípadov nepoznáme a navyše často nemusí byť gaussovský. U negaussovského šumu je odhad optimálny v zmysle LMS. Parametre systému a šumu môžu byť v čase premenlivé, čo môže spôsobiť, že odhad stavu KF môže byť nevyhovujúci, alebo dokonca po čase divergovať od skutočnej hodnoty. V reálnych aplikáciách je nevyhnutné filter adaptovať na nové stochastické vlastnosti na základe zmeraných dát.

Medzi prvé významné práce v tejto tematike zaraďujeme články autorov Mehra [10], [11] a Bělnager [22], [23] z rokov 1970 až 1974. Najnovšie uvedené metódy sú v [12], [16], [20] od autorov Odelson et al., Rajamani, Rawlings a Akesson et al. z rokov 2005 až 2008. Jednotlivé metódy popisuje nasledujúca kapitola.

2.4. Analýza vplyvu kovariančných matíc šumu na kvalitu odhadu Kalmanovho filtra

V tejto kapitole sa budeme venovať krátkej analýze vplyvu kovariančných matíc na odhad Kalmanovho filtra. Ukážeme význam matíc \mathbf{Q} , \mathbf{R} ako ladiacich parametrov filtra a potrebu ich znalosti. Rovnice pre výpočet Kalmanovho zosilnenia a kovariancie chyby odhadu \mathbf{P}_x sú zhodné ako pri výpočtu optimálneho LQ riadenia. Vytvoríme preto paralelu medzi LQ a ladením KF.

U LQ riadenia stavová spätná väzba minimalizuje kvadratické kritérium

$$J = \int_{t_0}^{t_n} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (2.17)$$

a \mathbf{Q} , \mathbf{R} predstavujú váhové matice. Matica \mathbf{Q} váži odchýlku stavov od nulovej hodnoty. Čím je \mathbf{Q} väčšie, tým rýchlejšie dynamický systém s optimálnou stavovou spätnou skonverguje do nuly. Pre \mathbf{Q} blížiac sa nekonečnu by spojitý systém skonvergoval do nuly v nekonečne krátkom čase. Naproti tomu matica \mathbf{R} váži energiu vynaloženú na stabilizáciu systému. Pokiaľ je \mathbf{R} blízka nule, neuvažujeme vynaloženú energiu a akčný zásah môže dosahovať ľubovoľne veľkých hodnôt. V opačnom prípade, ak sa \mathbf{R} blíži nekonečnu, deklaruujeme, že chceme na

stabilizáciu systému využiť čo najmenšiu energiu (limitne nulovú) a systém nebude stabilizovaný, pretože zosilnenie v spätnnej väzbe sa bude blížiť nule, spätná väzba bude prerušená.

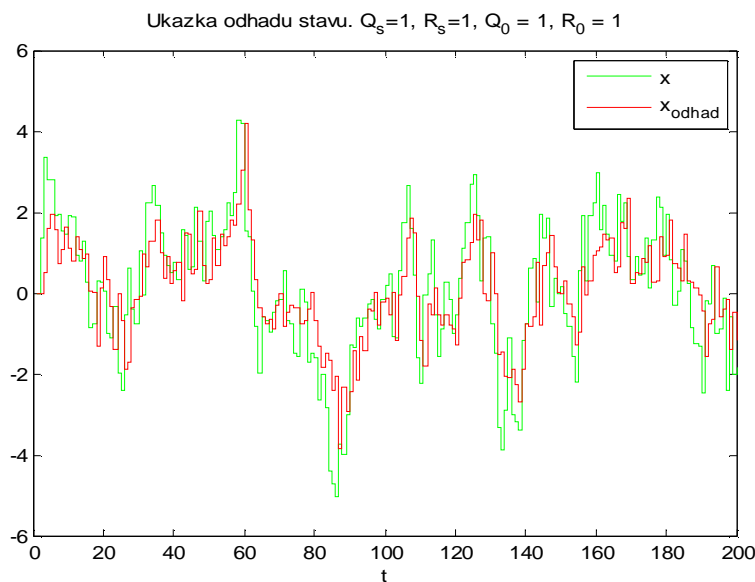
U pozorovateľa stavu je duálne k stavovej spätnej väzbe zavedená injekcia výstupu do stavu. Rozdiel skutočného výstupu a jeho odhadu je po vynásobení Kalmanovým zosilnením privedený do stavu pozorovateľa a aktualizuje hodnoty odhadov na základe merania. Kalmanovo zosilnenie je u pozorovateľa aj u LQ riadenia počítané podľa analogických vzťahov, a preto aj dopad kovariančných matíc \mathbf{Q} , \mathbf{R} bude analogický ako váhové matice pre LQ.

Ponechajme skutočné kovariancie šumu jednotkové a pozorujme vplyv apriórnych odhadov kovariancií, z ktorých je počítané zosilnenie \mathbf{K} . Budeme sledovať veľkosť zosilnenia a rozptyl odhadu stavu od jeho skutočnej hodnoty. Simulácie urobíme na systéme prvého rádu s popisom

$$\begin{aligned} x(t+1) &= 0,8x(t) + v(t) \\ y(t) &= x(t) + e(t). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Kalmanovo zosilnenie určíme podľa vzťahu $\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}$, kde \mathbf{P} je riešením algebrickej Riccatiho rovnice.

Ako prvé ukážeme priebeh pre optimálne nastavený KF. Index „S“ označuje skutočnú hodnotu, index „0“ apriórnu.

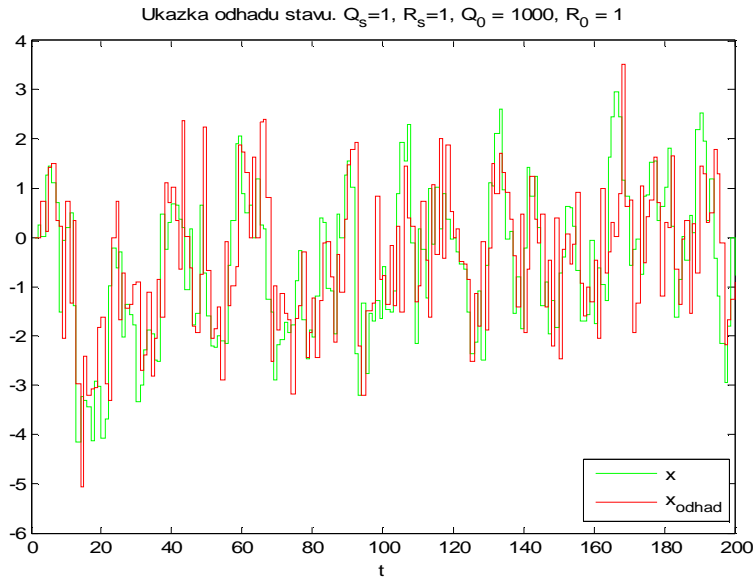


$$\text{cov}\{x(t) - \hat{x}(t|t-1)\} = 1,373$$

$$\text{cov}\{y(t) - C\hat{x}(t|t-1)\} = 2,356$$

$$K = 0,5781$$

Zafixujme maticu R na hodnotu 1 a zmeníme Q na hodnotu 1000.



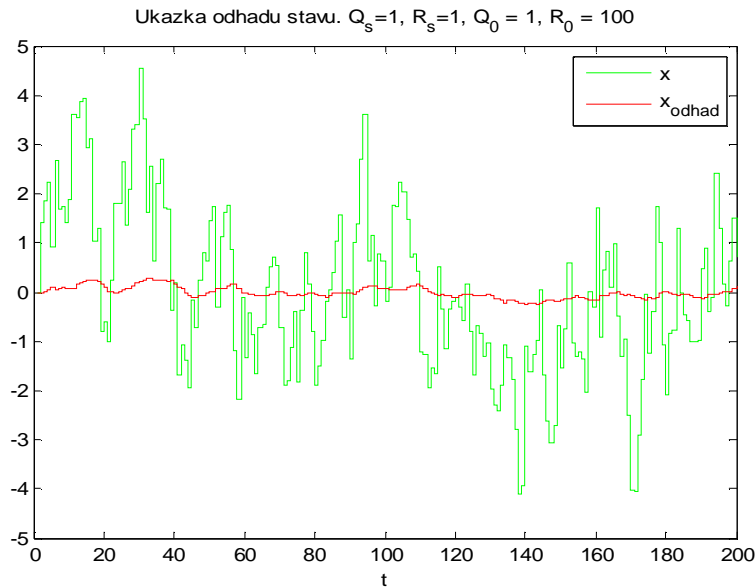
$$\text{cov}\{x(t) - \hat{x}(t|t-1)\} = 1,777$$

$$\text{cov}\{y(t) - C\hat{x}(t|t-1)\} = 2,885$$

$$K = 0,999$$

Na predošlom výsledku môžeme pozorovať analógiu k LQ. Zvýšením hodnoty matice Q sme dostali väčšie zosilnenie, narastie veľkosť injekcie výstupu do stavu. Zároveň môžeme pozorovať, že vzrástol rozptyl inovácií aj chyby odhadu stavu. Tento jav je daný tým, že chyba predikcie výstupu má väčší vplyv na aktualizáciu stavov. Na druhej strane sa do aktualizácie stavu viac premieta šum merania, ktorý zhoršuje celkovú kvalitu odhadu. Tento efekt si môžeme všimnúť na porovnaní dvoch predošlých obrázkov. Pri optimálnom nastavení (prvý obrázok) sa červený priebeh javí ako zaostávajúci za skutočným stavom. Rozdiel medzi priebehmi má však nižší rozptyl ako v druhom prípade, kde vysoká injekcia výstupu do stavu vnesie do odhadu veľkú chybu zo šumu merania. Červený priebeh (odhad) v mnohých prípadoch značne prekmitne nad skutočné hodnoty stavov. Celkový rozptyl chyby predikcie je vyšší ako u optimálneho nastavenia. Zvýšenie alebo zníženie matice Q vždy vedie na zhoršenie odhadu v zmysle zvýšenia kovariancie chyby odhadu.

V ďalšom príklade zafixujeme Q na hodnotu 1 a nastavíme $R = 100$.



$$\text{cov}\{x(t) - \hat{x}(t|t-1)\} = 2,292$$

$$\text{cov}\{y(t) - C\hat{x}(t|t-1)\} = 3,329$$

$$K = 0,026$$

Hodnota zosilnenia potvrdzuje analógiu s LQ. Vysoká matica \mathbf{R} u LQ deklaruje vysokú váhu akčného zásahu. U KF je to analogicky vysoká váha hodnoty injekcie výstupu do stavu. Stav v pozorovateľovi sa aktualizuje málo a jeho hodnota výrazne zaostáva za skutočným systémom. U KF vysoká matica \mathbf{R} deklaruje veľký šum merania. Cieľom naladenia KF je čo najmenší vplyv tohto šumu na odhadované stavy a práve to vedie na nízke Kalmanovo zosilnenie. Celková kvalita odhadu sa podľa predpokladu zhorší.

Ostatné kombinácie matíc \mathbf{Q} , \mathbf{R} zachovávajú rovnaký princíp ako sme popísali v predošlých odstavcoch. Je ešte vhodné doplniť, že viaceré kombinácie matíc môžu viesť na rovnaké výsledné Kalmanovo zosilnenie. Napríklad pre $Q=1, R=1$ a $Q=10, R=10$ dostaneme v oboch prípadoch $K = 0,5781$. Zjednodušene môžeme povedať, že zvýšenie hodnoty matice \mathbf{Q} má obdobný vplyv na hodnotu zosilnenia ako zníženie matice \mathbf{R} . V prípade, že obe hodnoty vzrastú alebo klesnú rovnako, efekt tejto zmeny sa eliminuje a výsledné zosilnenie je približne rovnaké. Pre výsledné zosilnenie \mathbf{K} je kľúčový pomer medzi \mathbf{Q} a \mathbf{R} .

Na dvoch príkladoch sme ukázali, že nesprávne apriórne matice majú za následok zhoršenie odhadovania v zmysle vyššej kovariancie chyby odhadu stavu. Tento fakt je motiváciou pre čo najpresnejšie odhadovanie kovariančných matíc šumu a celkovo stochastických vlast-

ností dynamických systémov. Aby bol odhad stavu použiteľný pre riadenie alebo detekciu porúch, požadujeme čo najnižšiu kovarianciu chyby odhadu a zaručenú konvergenciu. V prípade, že máme nepresný model a nesprávne nastavenie filtra, odhad môže byť nepoužiteľný.

3. Metódy odhadovania kovariančných matíc šumu

V predošlých kapitolách sme uviedli, že na úspešné použitie Kalmanovho filtra je potrebné splniť niekoľko predpokladov. Predovšetkým potrebujeme poznať čo najpresnejšie model dynamického systému. K tomu nám v počiatočnom návrhu výrazne pomáha znalosť fyzikálnej (resp. chemickej, ekonomickej, biologickej) podstaty reálnej sústavy. Po zostavení príslušných rovníc musíme dodať parametre systému. Na to slúžia početné identifikačné metódy. Tejto oblasti sa venovala od počiatku rozvoja stavových metód veľká pozornosť. Moderné algoritmy sú schopné aktualizovať hodnoty parametrov v čase pomocou nameraných dát a udržiavať tak vysokú mieru presnosti modelu. Súčasný výskum sa orientuje na regulačné systémy obsahujúce vysokú úroveň adaptivity a tým schopné zachovať optimalitu za dlhý časový úsek pri premenlivých podmienkach.

Menšia pozornosť v tematike pozorovateľov stavu bola venovaná popisu šumu a neurčitostí. Často sa ako parametre šumu volia len konštantné diagonálne matice ad hoc spôsobom tak, aby výsledok bol v určitom zmysle vyhovujúci. Treba znovu zdôrazniť, že parametre šumu sú ladiacimi parametrami KF a práve oni ovplyvňujú kvalitu odhadovania. Ak chceme aby filter pracoval v optimálnom režime aj pri premenlivých podmienkach v čase, je nevyhnutné venovať stochastickým zložkám vysokú pozornosť.

V nasledujúcich podkapitolách uvedieme metódy odhadu kovariančných matíc na základe zmeraných dát. Z inovácií vieme určiť, či filter pracuje v optimálnom alebo suboptimálnom režime. Pomocou dát vieme aktualizovať informácie o šume a následne adaptovať filter na nové podmienky. Zložitejšou časťou v popise šumu je jeho štruktúra. Ukazuje sa, že aj do systémov vysokých rádov vstupuje len niekoľko významných zdrojov šumu. Ako príklad môže slúžiť destilačná kolóna, ktorá pozostáva z niekoľkých poschodí. V každom poschodí prebiehajú procesy popísané dynamickým modelom. Jednou z rušivých veličín je vonkajšia teplota. V prípade jej zmeny ovplyvní všetky poschodia. Vonkajšia teplota teda predstavuje jediný zdroj šumu.

Maximálny počet nezávislých zdrojov šumu, ktorý má zmysel uvažovať je n . Pre optimálny chod filtra je dôležité štruktúru týchto zdrojov rozpoznať a vhodne popísať. Od algoritmov sa požaduje čo najnižšia výpočtová a časová zložitosť. Príkladom môže byť čo najnižší počet maticových inverzií, vysoká numerická stabilita, nízka pamäťová náročnosť a podobne.

Metódy adaptívnej filtrácie (v zmysle adaptivity matíc \mathbf{Q} , \mathbf{R}) môžeme rozdeliť do niekoľkých základných kategórií. Sú to bayesovské metódy, metódy maximálnej vierohodnosti,

techniky zlepšovania zhody kovariancie (a.j. matching model techniques), korelačné metódy a medzi novšie kategórie patria metódy tzv. subspace identifikácie a chyby predikcie.

Bayesovské metódy pracujú so štatistickými rozdeleniami a poskytujú pravdepodobnostné odhady. Ku každému odhadu získame rozloženie pravdepodobnosti tohto výsledku. Ostatné metódy pracujú s bodovými odhadmi. Nevýhodou bayesovských metód je vysoká výpočtová náročnosť pri integrovaní cez vysoké dimenzie. Tento problém je možné v súčasnosti riešiť pomocou numerických metód, napríklad Monte Carlo. Bayesovské metódy boli dlhé obdobie mimo záujmu vedeckých skupín, ale nové numerické postupy a výkonné výpočtové systémy umožňujú využitie tohto prístupu.

Metódy postavené na maximálnej vierohodnosti vychádzajú z bayesovského prístupu. Ich zásadnou nevýhodou je nelinearita uvažovaných vzťahov. Na získanie riešenia je vždy nevyhnutné problém zjednodušiť a následne riešiť numerickými metódami. Tento prístup vnáša do celého postupu riešenia značné chyby a pri nesprávnom zjednodušení alebo numerických problémoch dostaneme výrazne chybné výsledky. Ďalšou podstatnou nevýhodou je výrazný nárast zložitosti pri systémoch vyšších dimenzií.

Metódy subspace identifikácie patria medzi novšie a vykazujú veľmi dobré vlastnosti. Algoritmy umožňujú vložiť do odhadovania parametrov systému rôzne apriórne informácie a tým zásadným spôsobom zlepšiť identifikáciu. Členy Kalmanovho zosilnenia je možné odhadovať spolu s parametrami systému a tým získať alternatívu k odhadovaniu kovariančných matíc. Využitie subspace metód v odhadovaní stochastických vlastností je predmetom súčasného výskumu.

Metódy zlepšovania chyby kovariancie a algoritmy založené na korelácií inovácií prípadne stavu budú podrobne popísane v ďalších kapitolách.

Zhrnieme vzťahy pre Kalmanov filter stochastického systému s popisom

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

V celej kapitole 3, až na metódu gALS uvažujeme nekorelovaný šum. Prvá metóda zohľadňujúca korelácie medzi šumom procesu a šumom merania je práve gALS publikovaná až v roku 2008. V tejto oblasti je výskum len v počiatkových fázach. Všetky ostatné metódy uvažujú zjednodušené podmienky s nekorelovaným šumom. V kapitole 2 sme uviedli tvrdenie, že sys-

tém s korelovaným šumom je možné transformovať na systém s nekorelovaným šumom. Problém s využitím tohto tvrdenia uvidíme z vyjadrenia transformovaných matíc

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} - \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}, \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} - \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Je zrejmé, že na získanie transformovaného systému musíme poznať matice \mathbf{Q} , \mathbf{R} . Našou úlohou je práve odhadnutie týchto matíc, ktoré nepoznáme.

Vzťahy pre KF definovaný dvojkrokovú sú nasledovné

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t) &= \mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T \left(\mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \right)^{-1}, \\ \hat{\mathbf{y}}(t|t-1) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \\ \hat{\mathbf{x}}(t|t) &= \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{K}(t)(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t|t-1)), \\ \mathbf{P}(t|t) &= \mathbf{P}(t|t-1) - \mathbf{K}(t)(\mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R})\mathbf{K}^T(t), \\ \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t|t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{P}(t+1|t) &= \mathbf{A}\mathbf{P}(t|t)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Vlastnosti šumu sú definované

$$\begin{aligned} E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \right\} &= \mathbf{0}, \\ \text{cov} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \right\} &= E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3.1. Test optimality Kalmanovho filtra

V úvode sme zdôraznili, že matice (nekorelovaného) šumu \mathbf{Q} , \mathbf{R} sú ladiacimi parametrami pre KF. Pokiaľ parametre presne vystihujú vlastnosti šumu, filter pracuje v optimálnom režime a odhad stavov má najnižší možný rozptyl. V praktických situáciách máme o týchto vlastnostiach len veľmi malé apriórne informácie a ich ad hoc nastavenie vedie k suboptimálnemu chodu filtra. Pre vylepšenie vlastností odhadu stavu je vhodné aktualizovať znalosti o

šume pomocou zmeraných dát. Prvou úlohou pri aktualizácii vlastností šumu je rozpoznať fakt, že filter pracuje v suboptimálnom režime. Z teórie o KF vyplýva, že pri optimálnom fungovaní tvoria inovácie nekorelovaný stacionárny biely šum. Našou úlohou je nájsť koreláciu šumu v čase a následne rozhodnúť o optimalite alebo neoptimalite chodu filtra. Inovácia je definovaná nasledovne

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1) \triangleq \mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1). \quad (3.4)$$

Odhad autokorelačnej funkcie na intervale N určíme pomocou vzťahu

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=k}^N \boldsymbol{\varepsilon}(i)\boldsymbol{\varepsilon}^T(i-k). \quad (3.5)$$

Takto definovaná autokorelačná funkcia je nevychýlená asymptoticky pre $N \rightarrow \infty$. Ak chceme zachovať túto vlastnosť aj pre konečné N , je potrebné deliť výrazom $(N-k)$ namiesto N . Definícia podľa (3.5) však dáva autokoreláciu s menšou chybou v zmysle najmenších štvorcov, preto je tento postup u niektorých algoritmov preferovaný, [11]. Ďalšími vlastnosťami sú asymptotická konzistentnosť a blíženie k normálnemu rozdeleniu. Zároveň platí $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0 \geq \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k$, $k > 0$. Špeciálne pre biely šum a $N \rightarrow \infty$ teoreticky platí $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k = 0$, $k \neq 0$. Autokorelačnou funkciou bieleho šumu je impulz v bode 0.

Aby sme rozhodli o optimalite filtra na základe uvedenej autokovariančnej funkcie, využijeme intervalový odhad so šírkou 5%. Ide v podstate o test bielosti postupnosti inovácií a algoritmus je definovaný nasledovne. Určíme normalizované autokovariančné koeficienty podľa vzťahu

$$[\hat{\boldsymbol{\rho}}_k]_{ij} = \frac{[\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k]_{ij}}{\sqrt{([\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0]_{ii} [\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0]_{jj})}}. \quad (3.6)$$

Skontrolujeme, koľko z prvkov z množiny $[\hat{\boldsymbol{\rho}}_k]_{ii}$ pre $k > 0$ leží mimo intervalu $\pm \frac{1,96}{\sqrt{N}}$. V prípade, že viac ako 5% hodnôt leží mimo uvedený interval, filter pracuje suboptimálne.

Test optimality je vhodný v situácii, keď neaktualizujeme matice \mathbf{Q} a \mathbf{R} , resp. zosilnenie \mathbf{K} v každej vzorkovacej perióde. V pravidelných intervaloch môžeme otestovať optimalitu KF a v

prípade potreby aktualizovať hodnoty kovariančných matíc šumu. Tento postup je výhodný v prípade, že parametre šumu sa menia pomaly relatívne k vzorkovacej frekvencii.

3.2. Odhadovanie kovariančných matíc šumu metódou maximálnej vierohodnosti

Táto metóda bola publikovaná v [10] a poslúži na porovnanie prístupu ML s využitím autokorelačnej funkcie inovácií. Algoritmus nebudeme podrobne odvodzovať, len zhrnieme podstatné časti výpočtu.

Uvažujeme lineárny stochastický systém definovaný rovnicami (3.1). Systém musí byť časovo invariantný a úplne riaditeľný a pozorovateľný. Ďalej predpokladáme, že ubehol dostatočný čas a vplyv počiatočných podmienok je zanedbateľný. Systém aj filter pracujú v ustálenom režime.

Odvodenie v skratke je nasledovné. Neznáme parametre sú uložené do vektoru $\boldsymbol{\theta}$ v tvare $[\boldsymbol{\Xi}^T \quad \mathbf{K}^T]^T$. Premenná $\hat{\boldsymbol{\Xi}}(t)$ predstavuje odhad kovariancie inovácií. Označme D_{t-1} ako reprezentáciu všetkých dostupných dát získaných do času $t-1$. Definujeme vierohodnostnú funkciu pre súčasný odhad stavov a neznámych parametrov podmienenú zmeranými dátami

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta} | D_{t-1}) &= \log p(D_{t-1} | \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}) = \\
 &= -\frac{1}{2} \left\{ \log |\mathbf{P}_{t|t}(\boldsymbol{\theta})| + \|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t | t-1)\|^2 \mathbf{P}_{t|t}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=1}^t \|\mathbf{y}(i) - \mathbf{C}\mathbf{x}_{i|i-1}(\boldsymbol{\theta})\|^2 (\mathbf{C}\mathbf{P}_{i|i-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} + \log |\mathbf{C}\mathbf{P}_{i|i-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{C}^T + \mathbf{R}| \right\} \\
 &\quad + \log \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) + \textit{konst.}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Deriváciu vierohodnosti položíme rovnú nule. Pri analytickom vyjadrení dostaneme pomerne zložitú nelineárnu závislosť na parametroch $\boldsymbol{\theta}$. Tento problém je možné riešiť numericky napríklad Newtonovou metódou, ale zložitosť výpočtov výrazne narastá s veľkosťou rádu sústavy. Zanedbáme preto niektoré členy a využijeme predpoklady o ustálení systému. Zjednodušenú deriváciu vierohodnosti môžeme zapísať v tvare

$$\sum_{i=1}^t \text{tr} \left\{ \left(\hat{\Xi}^{-1} - \hat{\Xi}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(i) \boldsymbol{\varepsilon}^T(i) \hat{\Xi}^{-1} \right) \frac{\partial \hat{\Gamma}}{\partial \boldsymbol{\theta}_j} - 2 \hat{\Xi}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(i) \frac{\partial \mathbf{x}^T(i|i-1)}{\partial \boldsymbol{\theta}_j} \mathbf{C}^T \right\} = 0, \quad (3.8)$$

kde $\boldsymbol{\theta}_j$ značí j -tú zložku vektora. Derivácie v (3.8) sú podľa skaláru. Riešením rovnice (3.8) dostaneme rekurzívne vzťahy pre každý prvok Kalmanovho zosilnenia \mathbf{K} , označme $\mathbf{K}^{i,j}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(t) &= \mathbf{y}(t) - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(t|t-1), \\ \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= \mathbf{A} [\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{K}(t) \boldsymbol{\varepsilon}(t)] + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t+1|t)}{\partial \mathbf{K}^{i,j}} &= \mathbf{A} (\mathbf{I} - \mathbf{K}(t) \mathbf{C}) \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t|t-1)}{\partial \mathbf{K}^{i,j}} + \mathbf{I}_{i,j} \boldsymbol{\varepsilon}(t), \\ \boldsymbol{\Lambda}(t+1) &= \boldsymbol{\Lambda}(t) + \text{tr} \left(\mathbf{C} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t+1|t)}{\partial \mathbf{K}^{i,j}} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t+1|t)}{\partial \mathbf{K}^{i,j}} \right)^T \mathbf{C}^T \right), \\ \mathbf{g}(t+1) &= \mathbf{g}(t) + \text{tr} \left(\boldsymbol{\varepsilon}(t) \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t+1|t)}{\partial \mathbf{K}^{i,j}} \right)^T \mathbf{C}^T \right), \\ \mathbf{K}^{i,j}(t+1) &= \mathbf{K}^{i,j}(t) + \boldsymbol{\Lambda}_{(t+1)}^{-1} \mathbf{g}(t+1), \\ \hat{\Xi}(t) &= \hat{\Xi}(t-1) + \frac{1}{t} \left(\boldsymbol{\varepsilon}(t) \boldsymbol{\varepsilon}^T(t) - \hat{\Xi}(t-1) \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

kde počiatočné podmienky sú dané $\hat{\mathbf{x}}(0) = 0$, $\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(0|-1)}{\partial \mathbf{K}^{i,j}} = 0$, $\hat{\Xi}(0) = 0$, $\mathbf{g}(0) = 0$, $\boldsymbol{\Lambda} = 1$. Matica $\mathbf{I}_{i,j}$ je nulová okrem pozície i, j , na ktorej je jednotka. Konštanty i, j majú hodnoty $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots r$, rozmer matice \mathbf{K} je $n \times r$.

Algoritmom (3.9) získame priamo hľadané Kalmanovo zosilnenie. Z pomerne veľkého zjednodušenia celého výpočtu a využitia iteračných metód na riešenie nelineárnych vzťahov je zrejmé, že na získanie zosilnenia blízkeho optimálnemu je potrebné veľká sada dát. Konvergencia filtra ale nie teoreticky je zaručená.

3.3. Mehrova metóda odhadu s využitím korelácie výstupu

Dve metódy popísané v [10] využívajú hodnoty výstupu sústavy, resp. veľkosť chyby predikcie výstupu, k aktualizácii kovariančných matíc šumu a zosilnenia. Obe metódy umožňujú priamo vyčíslieť Kalmanovo zosilnenie bez nutnosti samostatne počítat kovariancie šumu. Princíp metód spočíva vo využití autokorelačných funkcií. Druhý prístup je intuitívne efektívnejší, pretože chyby predikcie výstupu s ktorými pracuje sú korelované menej ako samotné výstupy. Podľa [12] sa metódy založené na korelácii výstupu nehodia pre integrovaný biely šum, modelovaný tzv. náhodnou prechádzkou. Tento model šumu je využívaný v priemyselných MPC regulátoroch na odstránenie trvalého offsetu.

Pri optimálnom nastavení KF dostaneme ako chybu predikcie výstupu biely šum nekorelovaný v čase. V prípade, že tento šum je korelovaný, je to príznak suboptimálneho nastavenia filtra. Na základe veľkosti korelácie máme možnosť aktualizovať nastavenie KF tak, aby sa výsledný priebeh predikcie výstupu blížil nekorelovanému bielému šumu. Podmienkou oboch týchto metód je systém úplne pozorovateľný a riaditeľný. V prípade farebného šumu je potrebné do modelu pridať tvarovací filter šumu, aby boli splnené predpoklady KF.

Mehrovej metóde využívajúcej koreláciu inovácií sa nebudeme venovať podrobne, pretože ďalší autori poukázali na jej vážne nedostatky, [12], [14]. Výsledkom Mehrovej metódy je síce jednoznačný odhad zosilnenia \mathbf{K} a matice \mathbf{R} , ale nedokáže už jednoznačne nájsť maticu \mathbf{Q} , pokiaľ obsahuje viac neznámych ako je nr . Dôležitý poznatok, ktorý si uvedomil už Bélanger [23], je v tom, že autokorelácia inovácií je lineárnou funkciou neznámych matíc \mathbf{Q} , \mathbf{R} . Tento fakt nám umožní vyjadriť riešenie analyticky. Mehrov prístup vedie na nelineárne maticové rovnice, ktorých riešenie je možné nájsť numerickými metódami. Využitie lineárnej závislosti autokorelácie na neznámych kovarianciách využívajú aj ďalší autori v nových prácach, [12], [16], [20].

V prípade nulového deterministického vstupu je výstup \mathbf{y} budený len šumom s nulovou strednou hodnotou. Výstup \mathbf{y} má tiež nulovú strednú hodnotu a môžeme definovať autokorelačnú funkciu výstupu závislú len na posunutí k . V prípade nenulového deterministického vstupu je nutné zvažovať strednú hodnotu výstupu a musíme definovať autokovariančnú funkciu. V ďalšom postupe prijmeme predpoklad o nulovosti vstupu \mathbf{u} .

Autokorelačná funkcia s uvažovaním nulovej strednej hodnoty výstupu má tvar

$$\mathbf{\Gamma}_k = E\{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t-k)\}, \quad (3.10)$$

pre ktorú platí

$$\mathbf{\Gamma}_k = \begin{cases} \mathbf{C}\mathbf{\Sigma}\mathbf{C}^T + \mathbf{R} & k = 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{\Sigma}\mathbf{C}^T & k > 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

kde $\mathbf{\Sigma} = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\}$ a platí $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}$. Ďalej definujeme maticu

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^n \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

kde matica $\mathbf{\Phi}$ má hodnotu n za predpokladu pozorovateľnosti systému a regulárnosti matice \mathbf{A} . Potom platí rovnosť

$$\mathbf{\Phi}\mathbf{\Sigma}\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{\Gamma}_n \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

z toho po úprave

$$\mathbf{\Sigma}\mathbf{C}^T = \mathbf{\Phi}^\dagger \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{\Gamma}_n \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Pomocou prvého vzťahu (3.11) môžeme vyjadriť kovariančnú maticu \mathbf{R} pre $k = 0$. Na určenie optimálneho Kalmanovho zosilnenia využijeme nasledovné vzťahy

$$\mathbf{\Pi} = E\{\hat{\mathbf{x}}(t|t-1)\hat{\mathbf{x}}^T(t|t-1)\} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{A} \left\{ \mathbf{\Pi} + (\mathbf{\Sigma} - \mathbf{\Pi})\mathbf{C}^T (\hat{\mathbf{\Gamma}}_0 - \mathbf{C}\mathbf{\Pi}\mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{C}(\mathbf{\Sigma} - \mathbf{\Pi})^T \right\} \mathbf{A}^T \quad (3.16)$$

$$\mathbf{K} = (\mathbf{\Sigma} - \mathbf{\Pi})\mathbf{H}^T (\mathbf{\Gamma}_0 - \mathbf{C}\mathbf{\Pi}\mathbf{C}^T)^{-1}$$

Prvá rovnica (3.16) je kontrahujúce zobrazenie a má jednoznačné riešenie, pretože výraz ΣC^T poznáme zo vzťahu (3.14). Bližšie numerické riešenie popíšeme v kapitole 4. K dokončeniu výpočtu ešte potrebujeme poznať odhad autokorelačnej funkcie na základe zmeraných dát na intervale N . Definujeme

$$\hat{\Gamma}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=k}^N \mathbf{y}(i) \mathbf{y}^T(i-k) \quad (3.17)$$

alebo rekurzívny vzťah

$$\hat{\Gamma}_k^N = \hat{\Gamma}_k^{N-1} + \frac{1}{N} (\mathbf{y}(N) \mathbf{y}^T(N-k) - \hat{\Gamma}_k^{N-1}) \quad (3.18)$$

Uvedený odhad je asymptoticky nevychýlený, konzistentný a normálny.

Pozn. Mehra pri formulovaní algoritmov nebral do úvahy neurčitost' vstupujúcu do odhadu autokorelačnej funkcie z konečného množstva dát. V ideálnom prípade, pri použití teoretickej autokorelačnej funkcie, je postačujúce uvažovať k vo vzťahu (3.5) rovné rádu systému. Toto ale neplatí pre odhadnutú autokorelačnú funkciu. Matica $\hat{\Gamma}_k$ v predošlých vzťahoch je odhadom autokorelačnej funkcie. Na minimalizovanie pridanej neurčitosti je nevyhnutné využiť väčšie posunutia u autokorelácie ako je rád systému. Na túto skutočnosť upozornili autori C. Neethling a P. Young v komentári k Mehrovým článkom, [14].

3.4. Mehrova metóda zlepšovania zhody kovariancie

Uvedená metóda sa v angličtine nazýva *Covariance-matching technique*. Myšlienka algoritmu je nasledovná. Kovarianciu chyby odhadu stavu v čase t označme $\mathbf{P}(t|t-1)$. Pre kovarianciu chyby predikcie výstupu $\boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1)$ platí

$$\mathbf{P}_e(t|t-1) = \mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}.$$

Pokiaľ je náš odhad správny, potom odmeraná kovariancia chyby výstupu $E\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t)^T\}$ by mala korešpondovať s predošlým výpočtom. Podstatou algoritmu je upraviť maticu \mathbf{P} tak, aby čo najviac odpovedala odmeraným dátam. Nevýhodou tejto metódy je vychýlený odhad matíc \mathbf{Q} , \mathbf{R} , [12]. Aktualizácia kovariančnej matice chyby odhadu je

$$\mathbf{P}_e = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \boldsymbol{\varepsilon}(t-i)\boldsymbol{\varepsilon}^T(t-i), \quad (3.19)$$

kde konštanta M je zvolená empiricky a vyjadruje počet vzoriek, ktoré uvažujeme do výpočtu kovariancie chyby predikcie výstupu.

Uviedli sme, že platí

$$\mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R} = E\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^T(t)\}, \quad (3.20)$$

kam dosadíme za $\mathbf{P}(t|t-1)$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{P}(t-1|t-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q})\mathbf{C}^T + \mathbf{R} = E\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^T(t)\}. \quad (3.21)$$

Z toho platí

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{C}^T &= E\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t)^T\} - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{P}(t-1|t-1)\mathbf{A}^T\mathbf{C}^T - \mathbf{R}, \\ \mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{C}^T &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \boldsymbol{\varepsilon}(t-i)\boldsymbol{\varepsilon}(t-i)^T - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{P}(t-1|t-1)\mathbf{A}^T\mathbf{C}^T - \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Z poslednej rovnice môžeme vyčísliť hľadanú kovariančnú maticu \mathbf{Q} . Jednoznačné riešenie dostaneme v prípade, že matica \mathbf{C} má hodnotu n rovnú rádu systému. Maticu \mathbf{R} určíme nasledovne

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \boldsymbol{\varepsilon}(t-i)\boldsymbol{\varepsilon}^T(t-i) - \mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T. \quad (3.23)$$

Vzťah (3.23) je vhodný na aktualizáciu matice \mathbf{R} v prípade, že poznáme \mathbf{Q} . Ak kovarianciu \mathbf{Q} nepoznáme, môžeme ju odhadnúť podľa vzťahov (3.22).

3.5. Odhadovanie optimálneho zosilnenia KF (Carew, Bélanger)

Uvažujeme pozorovateľný a riaditeľný stochastický dynamický systém. Predpokladáme, že a priori približne poznáme kovariančné matice šumu. Filter pracuje v suboptimálnom režime so zosilnením K_{So} . Definujeme kovariančnú maticu odchýlky suboptimálneho odhadu od optimálneho. Index „So“ označuje suboptimum. Platí

$$\bar{\mathbf{P}}_{So} \triangleq E \left\{ \left(\hat{\mathbf{x}}(t+1|t) - \hat{\mathbf{x}}_{So}(t+1|t) \right) (\dots)^T \right\}. \quad (3.24)$$

Pre ustálené riešenie platí Ljapunovova rovnica v tvare

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_{So} &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_{So} \mathbf{C}) \bar{\mathbf{P}}_{So} (\mathbf{A} - \mathbf{K}_{So} \mathbf{C})^T + (\mathbf{K}_{So} - \mathbf{K}) \bar{\mathbf{P}}_y (\mathbf{K}_{So} - \mathbf{K})^T, \\ \bar{\mathbf{P}}_y &= \mathbf{C} \bar{\mathbf{P}}_{So} \mathbf{C}^T + \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Pre autokorelačnú funkciu platí

$$\begin{aligned} \Gamma_j &= E \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}(t) \boldsymbol{\varepsilon}^T(t-j) \right\} = E \left\{ \left(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C} \mathbf{x}_{So}(t|t-1) \right) \left(\mathbf{y}(t-j) - \mathbf{C} \mathbf{x}_{So}(t-j|t-j-1) \right)^T \right\} \\ &= \begin{cases} \mathbf{C} (\mathbf{A} - \mathbf{K}_{So} \mathbf{C})^{j-1} \left((\mathbf{A} - \mathbf{K}_{So} \mathbf{C}) \bar{\mathbf{P}}_{So} \mathbf{C}^T - \mathbf{K}_{So} \bar{\mathbf{P}}_y + \mathbf{K} \bar{\mathbf{P}}_y \right), & j \neq 0 \\ \mathbf{C} \bar{\mathbf{P}}_{So} \mathbf{C}^T + \bar{\mathbf{P}}_y & j = 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Po dosiahnutí optimálneho zosilnenia $\mathbf{K}_{So} = \mathbf{K}$ bude platiť $\bar{\mathbf{P}}_{So} = \mathbf{0}$. Označme ďalej maticu pozorovateľnosti ako

$$\boldsymbol{\vartheta} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

ktorá má hodnotu n v prípade pozorovateľného systému. Túto vlastnosť a priori predpokladáme. Výraz (3.26) zapíšeme s využitím matice pozorovateľnosti nasledovne

$$\mathbf{H} \triangleq \boldsymbol{\mathcal{O}} \left(\mathbf{A} \bar{\mathbf{P}}_{s_0} \mathbf{C}^T + \mathbf{K} \bar{\mathbf{P}}_y \right) = \begin{bmatrix} \Gamma_1 + \mathbf{C} \mathbf{K}_{s_0} \Gamma_0 \\ \Gamma_2 + \mathbf{C} \mathbf{K}_{s_0} \Gamma_1 + \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{K}_{s_0} \Gamma_0 \\ \vdots \\ \Gamma_n + \mathbf{C} \mathbf{K}_{s_0} \Gamma_{n-1} + \dots + \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{K}_{s_0} \Gamma_0 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Matica pozorovateľnosti $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ má hodnotu n a môžeme využiť jej pseudoinverziu. Matica $\bar{\mathbf{P}}_y$ je pozitívne definitná. Tento predpoklad je zaručený pre $\mathbf{R} > 0$. Môžeme teraz určiť hľadané optimálne zosilnenie \mathbf{K} .

$$\mathbf{K} = \left(\boldsymbol{\mathcal{O}}^\dagger \mathbf{H} - \mathbf{A} \bar{\mathbf{P}}_{s_0} \mathbf{C}^T \right) \bar{\mathbf{P}}_y^{-1}. \quad (3.29)$$

Na odhad autokorelačnej funkcie inovácii využijeme známy vzťah

$$\hat{\Gamma}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=k}^N \boldsymbol{\varepsilon}(i) \boldsymbol{\varepsilon}^T(i-k). \quad (3.30)$$

Iteratívny algoritmus na výpočet optimálneho \mathbf{K} je možné zapísať nasledovne

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_y &= \Gamma_0 - \mathbf{C} \bar{\mathbf{P}}_{s_0} \mathbf{C}^T, \\ \mathbf{K} &= \left(\boldsymbol{\mathcal{O}}^\dagger \mathbf{H} - \mathbf{A} \bar{\mathbf{P}}_{s_0} \mathbf{C}^T \right) \bar{\mathbf{P}}_y^{-1}, \\ \bar{\mathbf{P}}_{s_0} &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_{s_0} \mathbf{C}) \bar{\mathbf{P}}_{s_0} (\mathbf{A} - \mathbf{K}_{s_0} \mathbf{C})^T + (\mathbf{K}_{s_0} - \mathbf{K}) \bar{\mathbf{P}}_y (\mathbf{K}_{s_0} - \mathbf{K})^T, \end{aligned} \quad (3.31)$$

kde počiatočné suboptimálne zosilnenie \mathbf{K}_{s_0} je určené z približnej apriórnej znalosti matíc \mathbf{Q} , \mathbf{R} . Konvergencia algoritmu (3.31) je dokázaná v [22]. Dôkaz je postavený na vete o kontrahujúcom zobrazení a pevnom bode funkcie.

Metódu popísanú v predošlom odstavci je možné zlepšiť inou definíciou korelačnej funkcie inovácií, [14]. Na rozdiel od (3.28) definujeme

$$\mathbf{H} \triangleq \boldsymbol{\mathcal{O}} \mathbf{A} \bar{\mathbf{P}}_{s_0} \mathbf{C}^T \quad (3.32)$$

a miesto (3.26) zavedieme výraz $\Gamma_j \triangleq \mathbf{L}_j \mathbf{S}$, kde

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{s_0} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{R} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_0 = [\mathbf{C}, \mathbf{I}], \quad (3.33)$$

$$\mathbf{L}_j = \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{K}_{s_0} \mathbf{C})^{j-1} [(\mathbf{A} - \mathbf{K}_{s_0} \mathbf{C}), -\mathbf{K}_{s_0}],$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{s_0} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_{s_0} \mathbf{C}) \bar{\mathbf{P}}_{s_0} (\mathbf{A} - \mathbf{K}_{s_0} \mathbf{C})^T + \mathbf{K}_{s_0} \mathbf{R} \mathbf{K}_{s_0}^T + \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T. \quad (3.34)$$

Po zlúčení predošlých vzťahov a zoradení prvkov matíc \mathbf{Q} , \mathbf{R} do vektorov môžeme zapísať autokovariančnú funkciu ako lineárnu funkciu

$$\mathbf{z} = \mathbf{M}\boldsymbol{\theta}, \quad (3.35)$$

kde vektor $\boldsymbol{\theta}$ je zložený z neznámych prvkov \mathbf{Q} , \mathbf{R} a vektor \mathbf{z} obsahuje unikátne prvky matice $\hat{\Gamma}_j$. Pri odhade autokorelačnej funkcie dochádza k pridávaniu neurčitosti, ktorú môžeme modelovať pomocou vzťahu

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{M}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}, \quad (3.36)$$

kde \mathbf{e} je gaussovský šum s kovarianciou \mathbf{W} . Na základe tejto úvahy môžeme formulovať kvadratické kritérium, ktoré minimalizuje vplyv pridaného šumu

$$J = (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{M}\boldsymbol{\theta}) \mathbf{W}^{-1} (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{M}\boldsymbol{\theta})^T. \quad (3.37)$$

Dostali sme štandardnú úlohu kvadratického programovania, ktorá umožňuje definovať aj ďalšie obmedzenia ako je symetria a pozitívnosť matíc \mathbf{Q} , \mathbf{R} . Problémom vo vzťahu (3.37) je neznáma kovariančná matica \mathbf{W} . Dobrý odhad matice \mathbf{W}^{-1} je možné získať uvažovaním autokorelácie s nulovým posunutím, teda $\hat{\Gamma}_0$.

Odvodili sme metódu na odhadnutie optimálneho zosilnenia a navrhli zlepšenie pomocou váhovej matice. Algoritmus vyjadrený vzťahmi (3.31) počíta zosilnenie iteračne z odhadu autokorelačnej funkcie inovácií danej vzťahom (3.30).

3.6. Bélangerova metóda odhadu kovariančných matíc

V predošlej podkapitole bolo naznačené, že autokorelačná funkcia inovácií je lineárne závislá na prvkoch matíc \mathbf{Q} , \mathbf{R} . Toto pozorovanie má veľký význam pri zostavovaní metód odhadu a umožňuje analytické riešenie minimalizácie kvadratickej normy. P. R. Bélanger navrhol metódu [23], ktorá je vhodná pre odhad matíc časovo premenného lineárneho stochastického systému. Filter je možné pravidelne adaptovať aktualizáciou Kalmanovho zosilnenia.

Metóda vyžaduje, aby systém bol pozorovateľný, riaditeľný a stabilný. Šum je gaussovský s nulovou strednou hodnotou. Šum procesu a šum merania môžu byť korelované. Na začiatku musíme zvoliť apriórny odhad kovariančných matíc. Čím lepší je tento odhad, tým metóda rýchlejšie konverguje k správnym hodnotám \mathbf{Q} , \mathbf{R} . Ďalšou podmienkou je voľba báзовých matíc \mathbf{Q}_i , \mathbf{R}_i , ktorých význam bude vysvetlený v nasledujúcom odstavci.

Šum procesu a šum merania sú charakterizované nasledovnými kovarianciami

$$\text{cov}\{\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(l)\} = \mathbf{Q}d(t-l), \quad \text{cov}\{\mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(l)\} = \mathbf{R}d(t-l), \quad \text{cov}\{\mathbf{e}(t)\mathbf{v}^T(l)\} = \mathbf{S}d(t-l). \quad (3.38)$$

Ďalej definujeme uvedené kovariancie nasledovne

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \mathbf{Q}_i, \quad \mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \mathbf{R}_i, \quad \mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \mathbf{S}_i, \quad (3.39)$$

kde vektor \mathbf{a} je neznámy a matice \mathbf{Q}_i , \mathbf{R}_i , \mathbf{S}_i sú báзовé matice definované a priori. Bélangerova metóda hľadá práve vektor \mathbf{a} tak, aby sa filter čo najviac priblížil optimálnemu. Metódu odvodíme.

Pre filter definovaný jednokrokovovo platia známe vzťahy

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1) &= \mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1), \\
 \mathbf{P}_y &= \mathbf{C}(t)\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T(t) + \mathbf{R}, \\
 \mathbf{K}(t) &= \left(\mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{S} \right) \mathbf{P}_y^{-1}, \\
 \mathbf{F}(t) &= \mathbf{A}(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{C}(t), \\
 \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{K}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1) \\
 \mathbf{P}(t+1|t) &= \mathbf{F}(t)\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{F}^T(t) - \mathbf{G}(t)\mathbf{S}\mathbf{K}^T(t) \\
 &\quad - \mathbf{K}(t)\mathbf{S}^T\mathbf{G}^T(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{R}\mathbf{K}^T(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}\mathbf{G}^T(t).
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Odchýlku hodnoty stavu systému od odhadu označíme

$$\tilde{\mathbf{x}}(t|t-1) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) \tag{3.41}$$

a po dosadení do prvého vzťahu z (3.40) dostaneme tvar inovácie

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1) = \mathbf{C}(t)\tilde{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{v}(t). \tag{3.42}$$

Pre transformáciu odchýlok platí

$$\tilde{\mathbf{x}}(t+1|t) = \mathbf{F}(t)\tilde{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{G}(t)\mathbf{v}(t) - \mathbf{K}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1) \tag{3.43}$$

a pre ľubovoľný časový okamih platí

$$\tilde{\mathbf{x}}(t|t-1) = \boldsymbol{\Psi}(t,0)\tilde{\mathbf{x}}(0) + \sum_{j=0}^{t-1} \boldsymbol{\Psi}(t, j+1) \left(\mathbf{G}(j)\mathbf{v}(j) - \mathbf{K}(j)\boldsymbol{\varepsilon}(j|j-1) \right), \tag{3.44}$$

kde

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\Psi}(t_1, t_2) &= \mathbf{F}(t_1-1)\mathbf{F}(t_1-2) - \dots - \mathbf{F}(t_2), \quad t_1 > t_2, \\
 \boldsymbol{\Psi}(t_1, t_1) &= \mathbf{I}.
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Pokiaľ t je dostatočne veľké, môžeme považovať počiatkové podmienky za odznené a prvý člen vo vzťahu (3.44) zanedbať. Z (3.42) určíme autokorelačnú funkciu v nasledovnom tvare

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1)\boldsymbol{\varepsilon}^T(t-l|t-l-1)\} = \mathbf{C}(t)E\{\tilde{\mathbf{x}}(t|t-1)\tilde{\mathbf{x}}^T(t-l|t-l-1)\}\mathbf{C}(t-l) + \mathbf{C}(t)E\{\tilde{\mathbf{x}}(t|t-1)\mathbf{v}^T(t-l)\} + \mathbf{R}d(l). \quad (3.46)$$

Kombináciou (3.46) a (3.44) môžeme pre autokorelačnú funkciu napísať výsledný vzťah v tvare

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1)\boldsymbol{\varepsilon}^T(t-l|t-l-1)\} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\Gamma}_i(t, l)\mathbf{a}_i, \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}_i(t, l) = & \mathbf{C}(t) \sum_{j=0}^{t-l-1} \left\{ \boldsymbol{\Psi}(t, j+1) \left(\mathbf{G}(j)\mathbf{Q}_i\mathbf{G}^T(j) - \mathbf{K}(j)\mathbf{S}_i^T\mathbf{G}^T(j) \right. \right. \\ & \left. \left. - \mathbf{G}(j)\mathbf{S}_i\mathbf{K}^T(j) + \mathbf{K}(j)\mathbf{R}_i\mathbf{K}^T(j) \right) \boldsymbol{\Psi}(t-l, j+1) \right\} \mathbf{C}(t-l) \\ & + \mathbf{C}(t)\boldsymbol{\Psi}(t, t-l+1) \left\{ \mathbf{G}(t-l)\mathbf{S}_i - \mathbf{K}(t-l)\mathbf{R}_i \right\} h(l-1) + \mathbf{R}_i d(l). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Využitie (3.48) by vyžadovalo zbytočne vysoké výpočtové nároky. Preto je výhodné odvodiť rekurzívne vzťahy.

$$\begin{aligned} \Xi_i(t) = & \sum_{j=0}^{t-1} \left\{ \boldsymbol{\Psi}(t, j+1) \left(\mathbf{G}(j)\mathbf{Q}_i\mathbf{G}^T(j) - \mathbf{K}(j)\mathbf{S}_i^T\mathbf{G}^T(j) \right. \right. \\ & \left. \left. - \mathbf{G}(j)\mathbf{S}_i\mathbf{K}^T(j) + \mathbf{K}(j)\mathbf{R}_i\mathbf{K}^T(j) \right) \boldsymbol{\Psi}(t, j+1) \right\}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Rekurzívny výpočet má potom tvar

$$\begin{aligned} \Xi_i(t+1) = & \mathbf{F}(t)\Xi_i(t)\mathbf{F}^T(t) - \mathbf{K}(j)\mathbf{S}_i^T\mathbf{G}^T(j) - \mathbf{G}(j)\mathbf{S}_i\mathbf{K}^T(j) \\ & + \mathbf{K}(j)\mathbf{R}_i\mathbf{K}^T(j) + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}_i\mathbf{G}^T(t), \end{aligned} \quad (3.50)$$

kde $\Xi_i(0) = \mathbf{0}$. Zároveň platí vzťah $P(t+1|t) = \sum_{i=1}^N \Xi_i(t)\mathbf{a}_i$. Zavedieme poslednú substitúciu

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i(t, 0) &= \Xi_i(t)\mathbf{C}^T(t), \\ \mathbf{M}_i(t, l) &= \boldsymbol{\Psi}(t, t-l)\Xi_i(t-l)\mathbf{C}^T(t-l) \\ &+ \boldsymbol{\Psi}(t, t-l-1) \left\{ \mathbf{G}(t-l)\mathbf{S}_i - \mathbf{K}(t-l)\mathbf{R}_i \right\}, \quad l > 0, \end{aligned} \quad (3.51)$$

kde platí $\mathbf{M}_i(t, l) = \mathbf{0}$, $t < l$. Je možné jednoducho dokázať, že platí rekurzívny vzťah v tvare

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_i(t+1,1) &= \mathbf{F}(t)\mathbf{M}_i(t,0) + \mathbf{G}(t)\mathbf{S}_i - \mathbf{K}(t)\mathbf{R}_i, \\
 \mathbf{M}_i(t+1,l) &= \mathbf{F}(t)\mathbf{M}_i(t,l), \quad l > 0, \\
 \mathbf{M}_i(t,l) &= 0, \quad k < l.
 \end{aligned}
 \tag{3.52}$$

Z predošlých vzťahov plynie

$$\begin{aligned}
 \mathbf{\Gamma}_i(t,0) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{M}_i(t,0) + \mathbf{R}_i, \\
 \mathbf{\Gamma}_i(t,l) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{M}_i(t,l), \quad l > 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.53}$$

Pre časovo invariantný systém sa vzťahy zjednodušia na výsledný tvar

$$\begin{aligned}
 \mathbf{\Xi}_i &= \mathbf{F}\mathbf{\Xi}_i\mathbf{F}^T - \mathbf{K}\mathbf{S}_i^T\mathbf{G}^T - \mathbf{G}\mathbf{S}_i\mathbf{K}^T + \mathbf{K}\mathbf{R}_i\mathbf{K}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}_i\mathbf{G}^T, \\
 \mathbf{\Gamma}_i(0) &= \mathbf{C}\mathbf{\Xi}_i\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_i, \\
 \mathbf{\Gamma}_i(l) &= \mathbf{C}\mathbf{F}^l\mathbf{C}^T + \mathbf{C}\mathbf{F}^{l-1}(\mathbf{G}\mathbf{S}_i - \mathbf{K}\mathbf{R}_i), \quad l > 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.54}$$

Platí vzťah

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1)\boldsymbol{\varepsilon}^T(t-l|t-l-1)\} = \sum_{i=1}^N \mathbf{\Gamma}_i(t,l)\mathbf{a}_i,
 \tag{3.55}$$

z ktorého vidíme, že autokorelačná funkcia je lineárne závislá na neznámom vektore $\boldsymbol{\alpha}$. Tento vektor nájdeme analyticky pomocou metódy najmenších štvorcov. Na algebraické úpravy využijeme operátor $\text{vec}\{\}$, ktorý usporiada stĺpce matice do jedného vektora. Autokorelačná matica s indexom $l=0$ obsahuje opakujúce sa prvky. Môžeme využiť minimálnu reprezentáciu tejto matice. Získame ju tak, že z vektorizovanej matice vylúčime tie prvky a_{ij} kde $i < j$. Podrobnejší výklad minimálnej formy matice bude uvedený v kapitole 3.8, kde vysvetlíme aj prechod od minimálnej formy k plnej forme matice pomocou tzv. duplikačnej matice.

Index „NV“ zdôrazňuje, že ide o maticu N vektorizovaných autokorelačných matíc.

$$\mathbf{\Gamma}_{\text{NV}}(t,l) = \left[\text{vec}\{\mathbf{\Gamma}_1(t,l)\} \quad \text{vec}\{\mathbf{\Gamma}_2(t,l)\} \quad \cdots \quad \text{vec}\{\mathbf{\Gamma}_N(t,l)\} \right].$$

Predošlý výraz je matica autokorelačíí v ideálnom prípade. Hodnoty, ktoré odmeriame na reálnom systéme sú zaťažené neurčitost'ou modelovanou ako pridaný gaussovský šum. Od-

hadneme kovarianciu tohto šumu, ktorá následne poslúži ako váhová matica v kvadratickom kritériu. Model, po vylúčení rovnakých prvkov z vektora $\Gamma_{NV}(t, l)$, vyzerá nasledovne

$$\hat{\Gamma}_{\text{vec}}(t, l) = \Gamma_{NV}(t, l)\mathbf{a} + \boldsymbol{\eta}(t, l), \quad (3.56)$$

kde $\boldsymbol{\eta}(t, l)$ je šum s nulovou strednou hodnotou. Na ľavej strane je vektorizovaný odhad autokorelačnej funkcie označený strieškou. Odhad $\hat{\Gamma}_{\text{vec}}$ je vypočítaný na základe meraní zo vzťahu

$$\hat{\Gamma}(t, l) = \boldsymbol{\varepsilon}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t-l) \quad (3.57)$$

a vektorizovaný nasledovne

$$\hat{\Gamma}_{\text{vec}}(t, l) = \left[\hat{\Gamma}(1, 0) \quad \hat{\Gamma}(1, 1) \quad \dots \quad \hat{\Gamma}(1, L) \quad \dots \quad \hat{\Gamma}(t, 0) \quad \dots \quad \hat{\Gamma}(t, L) \right]^T \quad (3.58)$$

Konštanta L je parameter určujúci dĺžku dát, z ktorých sa počíta odhad $\hat{\Gamma}(t, l)$. Vo vzťahu (3.56) definujeme jediný ukazovateľ pozície. Platí

$$k = (t-1)(L+1) + l, \quad (3.59)$$

kde L predstavuje výšku matice Γ_{NV} . Vzťah (3.56) prepíšeme do tvaru

$$\hat{\Gamma}_{\text{vec}}(k) = \Gamma_{NV}(k)\mathbf{a} + \boldsymbol{\eta}(k). \quad (3.60)$$

Pravá strana výrazov (3.56) a (3.60) predstavuje autokorelačnú funkciu zmeraných inovácií. Vo vzťahu (3.60) sa snažíme nájsť optimálny vektor \mathbf{a} . Definujeme nasledovné kvadratické kritérium

$$J(k) = \sum_{j=0}^k \left(\hat{\Gamma}_{\text{vec}}(j) - \Gamma_{NV}(j)\mathbf{a} \right)^T \mathbf{W}^{-1}(\dots) + (\mathbf{a} - \mathbf{a}_0)^T \boldsymbol{\Theta}_0^{-1}(\dots). \quad (3.61)$$

Matice \mathbf{W} , $\mathbf{\Phi}_0$ sú symetrické, pozitívne definitné. Ich určenie bude vysvetlené v nasledujúcich odstavcoch. Na nájdenie optimálneho riešenia, označme $\hat{\mathbf{a}}$, minimalizujúceho kritérium (3.61) môžeme využiť rekurzívne vzťahy v nasledovnom tvare

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{a}}(k+1) &= \hat{\mathbf{a}}(k) + \mathbf{\Phi}(k)\mathbf{\Gamma}_{\text{NV}}^T(k)\mathbf{W}^{-1}(k)(\boldsymbol{\sigma}(k) - \mathbf{\Gamma}_{\text{NV}}\hat{\mathbf{a}}(k)), \\ \mathbf{\Phi}(k+1) &= \mathbf{\Phi}(k) - \mathbf{\Phi}(k)\mathbf{\Gamma}_{\text{NV}}^T(k)\left(\mathbf{W}(k) + \mathbf{\Gamma}_{\text{NV}}(k)\mathbf{\Phi}(k)\mathbf{\Gamma}_{\text{NV}}^T(k)\right)^{-1}\mathbf{\Gamma}_{\text{NV}}(k)\mathbf{\Phi}(k),\end{aligned}\tag{3.62}$$

počiatočné podmienky sú $\hat{\mathbf{a}}(0) = \hat{\mathbf{a}}_0$, $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{\Phi}_0$. Určenie počiatočných podmienok bude vysvetlené ďalej.

Časovo invariantné systémy

Pre časovo invariantné systémy môžeme použiť jednoduchší zápis predošlých vzťahov. Definujeme kvadratické kritérium v tvare s váhovou maticou \mathbf{V} , ktorú určíme rovnako ako \mathbf{W}

$$J(t) = \sum_{j=0}^t \sum_{l=0}^L (\boldsymbol{\sigma}(t,l) - \mathbf{\Gamma}_{\text{NV}}(l)\mathbf{a})^T \mathbf{V}^{-1}(\dots).\tag{3.63}$$

Minimalizácia tohto kritéria vedie na výsledné vzťahy

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}(t) &= \frac{1}{t} \left(\sum_{l=0}^L \mathbf{\Gamma}_{\text{NV}}^T(l)\mathbf{V}^{-1}(l)\mathbf{\Gamma}_{\text{NV}}(l) \right)^{-1}, \\ \hat{\mathbf{a}}(t+1) &= \frac{t-1}{t} \hat{\mathbf{a}}(t) + \mathbf{\Phi}(t) \sum_{l=0}^L \mathbf{\Gamma}_{\text{NV}}^T(l)\mathbf{V}^{-1}(l)\hat{\mathbf{\Gamma}}_{\text{vec}}(t,l), \\ \hat{\mathbf{a}}(0) &= \mathbf{a}_0.\end{aligned}\tag{3.64}$$

Uvedené vzťahy nepotrebujú toľko apriórnej informácie ako dvojica (3.62), matice $\mathbf{\Gamma}_{\text{NV}}$, \mathbf{V} nie sú závislé na čase a môžu byť vypočítané off-line.

Algoritmus môžeme mierne modifikovať tým, že v iteračnom procese (3.64) vynulujeme v každom kroku prípadné záporné členy vektora \mathbf{a} . Modifikácia vyplýva z toho, že hľadané kovariančné matice sú pozitívne definitné a na ich získanie stačia kladné koeficienty lineárnej kombinácie.

Určenie apriórnych informácií

Na využitie Bélangerovej metódy je nevyhnutné mať určitú predstavu o šume vstupujúcom do sústavy. Ako apriórnu informáciu musíme určiť bázové matice a vektor $\boldsymbol{\alpha}_0$. Našu dôveru v tento apriórny odhad vyjadríme pomocou kovariancie $\boldsymbol{\Phi}_0 = E\{(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0)(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0)^T\}$. Budeme predpokladať, že tento náš počiatočný odhad je optimálny a dosadíme ho do (3.60) a vyjadríme vektor $\boldsymbol{\eta}$. Pre kovariančnú maticu \mathbf{W} , resp. \mathbf{V} , platí $\mathbf{W} = E\{\boldsymbol{\eta}(t)\boldsymbol{\eta}^T(t)\}$.

3.7. Metóda ALS (Odelson, et al.)

Metóda vytvorená skupinou autorov Odelson, Rajamani, Rawlings patrí medzi najnovšie, [12]. Vychádza z faktu, že autokovariančná funkcia inovácií je lineárne závislá na prvkoch neznámych matíc \mathbf{Q} , \mathbf{R} . To nám umožňuje, obdobne ako v predošlých prípadoch, analyticky vyriešiť problém metódou najmenších štvorcov. Autokorelačná funkcia inovácií je ukazovateľom optimality Kalmanovho filtra. Pri optimálnom chode filtra nie sú inovácie korelované v čase.

Lineárny stochastický systém má štandardný tvar

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}\mathbf{v}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t).\end{aligned}\tag{3.65}$$

Pre odchýlku odhadu stavu od skutočnej hodnoty platí $\tilde{\mathbf{x}}(t|t-1) \triangleq \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t-1)$, pričom vývoj odchýlky zodpovedá stavovému modelu

$$\tilde{\mathbf{x}}(t+1|t) = \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{C})}_{\bar{\mathbf{A}}} \tilde{\mathbf{x}}(t|t-1) + \underbrace{[\mathbf{G} \quad -\mathbf{A}\mathbf{K}]}_{\bar{\mathbf{G}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{w}}(k)},\tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}(t+1) &= \bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{w}}(k), \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{e}(t),\end{aligned}\tag{3.67}$$

kde označíme nasledovné kovariancie

$$\begin{aligned}E\{\bar{\mathbf{w}}(t)\bar{\mathbf{w}}^T(t)\} &= \bar{\mathbf{Q}}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix}, \\ E\{\bar{\mathbf{w}}(t)\mathbf{v}^T(t)\} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{3.68}$$

Zdôraznime ešte definíciu ustáleného Kalmanovho zosilnenia \mathbf{K} podľa nasledovného vzťahu

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1},\tag{3.69}$$

kde \mathbf{P} je riešením Riccatiho rovnice a predstavuje kovarianciu predikcie chyby odhadu. Predpokladáme, že systém je pozorovateľný, teda dvojica (\mathbf{A}, \mathbf{C}) je pozorovateľná a $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{C}$ je stabilná matica. Ďalej predpokladáme, že v systéme (3.67) odzneli počiatkové podmienky a zvolíme ich rovné ustálenému stavu. Platí teda tretí predpoklad $E\{\boldsymbol{\varepsilon}(0)\} \rightarrow 0$ a $\text{cov}\{\tilde{\mathbf{x}}(0)\} \rightarrow \mathbf{P}_x$. Kovariancia inovácií je riešením Ljapunovovej rovnice $\mathbf{P}_x = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{P}_x\bar{\mathbf{A}}^T + \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{G}}^T$.

Autokorelačná funkcia inovácií má nasledovný tvar

$$\begin{aligned} E\{\tilde{\mathbf{y}}(t)\tilde{\mathbf{y}}^T(t)\} &= \mathbf{C}\mathbf{P}_x\mathbf{C}^T + \mathbf{R}, \\ E\{\tilde{\mathbf{y}}(t+j)\tilde{\mathbf{y}}^T(t)\} &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^j\mathbf{P}_x\mathbf{C}^T - \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{j-1}\mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{R}, \quad j \geq 1. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Označme hodnotu autokorelácie pre jednotlivé časové úseky $\mathbf{e}_j = E\{\tilde{\mathbf{y}}(t+j)\tilde{\mathbf{y}}^T(t)\}$. Následne definujeme tzv. *pásovú maticu autokorelačných funkcií* v tvare

$$\mathbf{R}(N) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 & \cdots & \mathbf{e}_{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}_{N-1}^T & \cdots & \mathbf{e}_0 \end{bmatrix}, \quad (3.71)$$

kde N je voliteľný parameter určujúci maximálny časový posun autokorelácie. Na vyjadrenie uvedenej autokorelačnej funkcie definujeme nasledovné matice

$$\boldsymbol{\mathcal{O}} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{N-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Xi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{N-2} & \cdots & \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Xi} \left(\bigoplus_{j=1}^N (-\mathbf{A}\mathbf{K}) \right), \quad (3.72)$$

kde $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ je štandardná matica pozorovateľnosti, ktorá má na základe uvedených predpokladov hodnotu n . Pomocou matíc (3.72) vyjadríme autokorelačnú maticu $\mathbf{R}(N)$ nasledovne

$$\mathcal{R}(N) \triangleq \mathcal{O} \mathbf{P}_x \mathcal{O}^T + \Xi \left(\bigoplus_{i=1}^N \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{Q}}_w \bar{\mathbf{G}} \right) \Xi^T + \Psi \left(\bigoplus_{i=1}^N \mathbf{R} \right) + \left(\bigoplus_{i=1}^N \mathbf{R} \right) \Psi^T + \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{R}. \quad (3.73)$$

Z predošlého vzťahu je vidieť, že autokorelačná funkcia je lineárne závislá na maticiach \mathbf{Q} , \mathbf{R} . Aby bolo možné s týmto výrazom efektívnejšie pracovať, zmeníme matice na vektory. Na to využijeme operátor $\text{vec}\{\}$ vysvetlený v predošlých kapitolách. Ďalšou algebrickou úpravou bude nahradenie priameho súčtu matice násobením. K tomu využijeme tzv. permutačnú maticu $\mathcal{P}_{r,N}$, ktorá obsahuje len nuly a jednotky. Usporiadanie núl a jednotiek je také, aby platilo nasledovné

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{vec} \left\{ \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{X} \right\} &= \mathcal{P}_{r,N} \text{vec} \{ \mathbf{X} \}, \\ \text{b) } \text{vec} \left\{ \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{X} \right\} &= \mathcal{P}_{n,r,N} \text{vec} \{ \mathbf{X} \}, \end{aligned}$$

kde matica \mathbf{X} má rozmer a) $r \times r$ resp. b) $n \times r$ a permutačná matica bude mať rozmer a) $(rN)^2 \times r^2$ resp. b) $nrN^2 \times nr$. Aj v tejto podkapitole použijeme notáciu s dolným indexom „vec“, ktorý označuje aplikovanie operátora $\text{vec}\{\}$. Do vzťahu (3.73) dosadíme po úpravách za \mathbf{P}_x

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x &= \bar{\mathbf{A}} \mathbf{P}_x \bar{\mathbf{A}}^T + \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{Q}}_w \bar{\mathbf{G}}^T, \\ (\mathbf{P}_x)_{\text{vec}} &= (\bar{\mathbf{A}} \otimes \bar{\mathbf{A}}) (\mathbf{P}_x)_{\text{vec}} + (\bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{Q}}_w \bar{\mathbf{G}}^T)_{\text{vec}}, \\ (\mathbf{P}_x)_{\text{vec}} &= (\mathbf{I}_{n^2} - \bar{\mathbf{A}} \otimes \bar{\mathbf{A}})^{-1} (\bar{\mathbf{G}} \otimes \bar{\mathbf{G}}) (\bar{\mathbf{Q}}_w)_{\text{vec}} \end{aligned} \quad (3.74)$$

a vyjadríme výsledný vektorový vzťah

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}(N))_{\text{vec}} &= \left\{ (\mathcal{O} \otimes \mathcal{O}) (\mathbf{I}_{n^2} - \bar{\mathbf{A}} \otimes \bar{\mathbf{A}})^{-1} + (\Xi \otimes \Xi) \mathcal{P}_{n,N} \right\} (\mathbf{G} \otimes \mathbf{G}) \mathbf{Q}_{\text{vec}} \\ &+ \left\{ \left[(\mathcal{O} \otimes \mathcal{O}) (\mathbf{I}_{n^2} - \bar{\mathbf{A}} \otimes \bar{\mathbf{A}})^{-1} + (\Xi \otimes \Xi) \mathcal{P}_{n,N} \right] (\mathbf{A} \mathbf{K} \otimes \mathbf{A} \mathbf{K}) \right. \\ &+ \left. \left[\Psi \oplus \Psi + \mathbf{I}_{r^2 N^2} \right] \mathcal{P}_{r,N} \right\} \mathbf{R}_{\text{vec}}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

kde r je počet meraných výstupov. Pri prechode z (3.73) na vzťah (3.75) sme maticu $\bar{\mathbf{Q}}_w$ opäť rozdelili na pôvodnú dvojicu \mathbf{Q}, \mathbf{R} .

V predošlých odstavcoch sme odvodili autokovariančnú funkciu inovácií závislú na neznámych parametroch \mathbf{Q}, \mathbf{R} . Cieľom je, aby zmeraná autokorelačná funkcia odpovedala teoretickej podľa vzťahu (3.75). Táto zhoda nastane práve vtedy, ak neznáme parametre \mathbf{Q}, \mathbf{R} budú odpovedať skutočným kovarianciám šumu. V ideálnom prípade by sme z meraní inovácií chceli určiť strednú hodnotu $\tilde{\mathbf{y}}(t)\tilde{\mathbf{y}}^T(t+j)$. Prakticky môžeme uvažovať len konečný počet meraní N_d . Odhad autokorelácie určíme priemerovaním týchto dát. Využijeme nevychýlený odhad v tvare

$$\hat{\mathbf{e}}_j = \frac{1}{N_d - j} \sum_{i=1}^{N_d-j} \tilde{\mathbf{y}}(i)\tilde{\mathbf{y}}^T(i+j) \quad (3.76)$$

Matica odhadu autokorelačných funkcií bude definovaná analogicky k (3.71) ako

$$\hat{\mathbf{R}}(N) \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 & \cdots & \hat{\mathbf{e}}_{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{e}}_{N-1}^T & \cdots & \hat{\mathbf{e}}_0 \end{bmatrix}.$$

Poslednou úpravou bude zápis (3.75) formou lineárnej rovnice v maticovom tvare. Zavedieme nasledovné výrazy

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \left[\mathcal{D}(\mathbf{G} \otimes \mathbf{G}) \quad \mathcal{D}(\mathbf{A}\mathbf{L} \otimes \mathbf{A}\mathbf{L}) + (\boldsymbol{\Psi} \oplus \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{I}_{r^2 N^2}) \mathcal{P}_{r,N} \right], \\ \mathcal{D} &= (\boldsymbol{\mathcal{O}} \otimes \boldsymbol{\mathcal{O}}) (\mathbf{I}_{n^2} - \bar{\mathbf{A}} \otimes \bar{\mathbf{A}})^{-1} + (\boldsymbol{\Xi} \otimes \boldsymbol{\Xi}) \mathcal{P}_{n,N}, \\ \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{Q}})_{\text{vec}} \\ (\hat{\mathbf{R}})_{\text{vec}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{R}}(N)_{\text{vec}}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Teraz môžeme zapísať úlohu ako minimalizáciu kvadratickej normy

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{a}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{b}}\|_2^2, \quad (3.78)$$

riešením je výraz

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}^\dagger \hat{\boldsymbol{b}}, \quad (3.79)$$

kde \boldsymbol{a}^\dagger je pseudoinverzia matice \boldsymbol{a} . Existencia pseudoinverzie je zároveň postačujúcou podmienkou jednoznačného riešenia úlohy. O existencii riešenia teda vieme rozhodnúť na základe hodnosti matice \boldsymbol{a} . Vzťah (3.78) môžeme zapísať aj vo forme

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg \min_{\hat{\boldsymbol{Q}}, \hat{\boldsymbol{R}}} \left\| \boldsymbol{a} \begin{bmatrix} (\hat{\boldsymbol{Q}})_v \\ (\hat{\boldsymbol{R}})_v \end{bmatrix} - \hat{\boldsymbol{b}} \right\|_2^2, \quad \hat{\boldsymbol{Q}} \geq 0, \hat{\boldsymbol{R}} \geq 0. \quad (3.80)$$

Pomocou tohto zápisu môžeme využiť metódy kvadratického programovania a podmienkami vynútiť pozitivnosť matíc \boldsymbol{Q} , \boldsymbol{R} . Ide o tzv. semidefinitné programovanie.

Dôkazy o konvergencii uvedenej metódy sú podrobne rozpísané v [12]. Odhady kovariančných matíc, ktoré získame touto metódou, sú nevychýlené pre ľubovoľnú sadu dát a asymptoticky konvergujú k skutočným kovarianciám šumu. Nevychýlenosť je podmienená odznením počiatočných podmienok systému (3.67).

3.8. Metóda scALS (Rajamani, Rawlings)

Spoluautori metódy ALS Rajamani a Rawlings publikovali v roku 2008 článok [16], v ktorom poskytli inú definíciu metódy ALS. Nazvime ju scALS z anglického *single column ALS*. Presnú definíciu uvedieme v ďalšom odstavci. Odlišnosť spočíva predovšetkým vo využití menších matíc a menšieho množstva Kroneckerových produktov, ktoré vždy vytvárajú matice veľkých rozmerov. Veľké matice sú náročné na pamäť a limitujú aplikovateľnosť metódy ALS v bežných priemyselných systémoch. Iná definícia scALS zároveň eliminuje numerické problémy pri výpočte. Ďalším faktorom zlepšujúcim numerickú stabilitu výpočtu je využitie duplikujúcich matíc. To umožňuje vynechať tie prvky z matice \boldsymbol{a} , ktoré odpovedajú opakujúcim sa zložkám symetrických matíc \boldsymbol{Q} , \boldsymbol{R} . Opakujúce sa členy majú u MIMO systé-

mov za následok, že neplatí rovnosť $\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} = \mathbf{I}$. Preto pri riešení kvadratického programovania podľa vzťahu (3.79) dostaneme numericky nestabilný výsledok. Tento problém bude zdôraznený v kapitole 4. pri testovaní metódy ALS.

Platia nasledovné vzťahy

$$\begin{aligned} E\{\tilde{\mathbf{y}}(t)\tilde{\mathbf{y}}^T(t)\} &= \mathbf{C}\mathbf{P}_x\mathbf{C}^T + \mathbf{R}, \\ E\{\tilde{\mathbf{y}}(t+j)\tilde{\mathbf{y}}^T(t)\} &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^j\mathbf{P}_x\mathbf{C}^T - \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{j-1}\mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{R}, \quad j \geq 1. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Označme N ako maximálne posunutie pri výpočte autokorelačnej funkcie. Platí

$$\mathbf{R}(N) = E\left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}(t)\tilde{\mathbf{y}}^T(t) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{y}}(t+N-1)\tilde{\mathbf{y}}^T(t) \end{bmatrix} \right\} = \boldsymbol{\Theta}\mathbf{P}_x\mathbf{C}^T + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{R}, \quad (3.82)$$

kde

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{N-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p \\ -\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{K} \\ \vdots \\ -\mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{N-2}\mathbf{A}\mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{C} \quad (3.83)$$

a ďalej

$$\mathbf{P}_x = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{P}_x\bar{\mathbf{A}}^T + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{A}\mathbf{K} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{G}}}\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix}\bar{\mathbf{G}}^T. \quad (3.84)$$

Po dosadení do (3.82) za \mathbf{P}_x z rovnice (3.84) môžeme vyjadriť autokovariančnú maticu ako

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}(N))_{\text{vec}} &= \left\{ (\mathbf{C} \otimes \boldsymbol{\Theta})(\mathbf{I}_{n^2} - \bar{\mathbf{A}} \otimes \bar{\mathbf{A}})^{-1} \right\} (\mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T)_{\text{vec}} \\ &+ \left\{ (\mathbf{C} \otimes \boldsymbol{\Theta})(\mathbf{I}_{n^2} - \bar{\mathbf{A}} \otimes \bar{\mathbf{A}})^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{K} \otimes \mathbf{A}\mathbf{K}) + (\mathbf{I}_p \otimes \boldsymbol{\Gamma}) \right\} (\mathbf{R})_{\text{vec}} \end{aligned} \quad (3.85)$$

Pre odhad $\hat{\mathbf{R}}(N)$ na základe meraní platí

$$\hat{\mathbf{R}}(N) \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}}_0 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{c}}_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (3.86)$$

kde

$$\hat{\mathbf{c}}_j = \frac{1}{N_d - j} \sum_{i=1}^{N_d-j} \tilde{\mathbf{y}}(i+j) \tilde{\mathbf{y}}^T(i). \quad (3.87)$$

Riešenie úlohy má kvadratickú formu v nasledovnom tvare

$$\arg \min_{\mathbf{Q}_{\text{mvec}}, \mathbf{R}_{\text{mvec}}} \left\| \mathbf{a} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\text{mvec}} \\ \mathbf{R}_{\text{mvec}} \end{bmatrix} - \hat{\mathbf{R}}(N) \right\|_2^2. \quad (3.88)$$

Z toho riešenie dostaneme pomocou pseudoinverzie matice \mathbf{a}

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\text{mvec}} \\ \mathbf{R}_{\text{mvec}} \end{bmatrix} = \mathbf{a}^\dagger \hat{\mathbf{R}}(N). \quad (3.89)$$

Index „mvec“ označuje vektorizáciu matice s vynechaním tých prvkov a_{ij} kde $i < j$.

V Prílohe 1 je kód funkcie `vecMin{ }`. Ukážka tejto operácie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\text{vec}} = \text{vec}\{\mathbf{A}\} = [a_{11} \ a_{21} \ a_{31} \ a_{12} \ a_{22} \ a_{32} \ a_{13} \ a_{23} \ a_{33}]^T, \\ \mathbf{A}_{\text{mvec}} = \text{vecMin}\{\mathbf{A}\} = [a_{11} \ a_{21} \ a_{31} \ a_{22} \ a_{32} \ a_{33}]^T.$$

Po vylúčení rovnakých prvkov dostaneme výsledný vektor, ktorému budeme priraďovať index „mvec“. Na prechod od minimálnej vektorovej formy k plnej forme, teda od vektora \mathbf{A}_{mvec} k vektoru \mathbf{A}_{vec} je možné využiť tzv. duplikačnú maticu definovanú podľa [24]. Dupli-

kačná matica \mathcal{D}_n obsahuje nuly a jednotky tak, aby pre maticu \mathbf{A} rozmeru $n \times n$ platilo nasledovné

$$\mathcal{D}_n \mathbf{A}_{\text{mvec}} = \mathbf{A}_{\text{vec}}. \quad (3.90)$$

Matica \mathcal{D}_n má rozmer $n^2 \times n(n+1)/2$ a má plnú hodnotu, je možné zostrojiť jej pseudoinverziu. Kód funkcie generovania duplikačnej matice pre Matlab je uvedený v Prílohe 1.

Po definovaní duplikačnej matice môžeme určiť maticu \mathbf{a} v kvadratickej forme (3.88). Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2], \\ \mathbf{a}_1 &= (\mathbf{C} \otimes \mathbf{O})(\mathbf{I}_{n^2} - \bar{\mathbf{A}} \otimes \bar{\mathbf{A}})^{-1} (\mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T) \mathcal{D}_g, \\ \mathbf{a}_2 &= \left\{ (\mathbf{C} \otimes \mathbf{O})(\mathbf{I}_{n^2} - \bar{\mathbf{A}} \otimes \bar{\mathbf{A}})^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{K} \otimes \mathbf{A} \mathbf{K}) + (\mathbf{I}_r \otimes \Gamma) \right\} \mathcal{D}_r, \end{aligned} \quad (3.91)$$

kde g je počet stĺpcov matice \mathbf{G} a r je počet výstupov.

Zlepšenie odhadu pomocou váhovej matice

Z teórie odhadovania vieme, že minimalizáciou kritéria typu (3.88) dostaneme odhad s minimálnym rozptylom vtedy, ak všetky merania sú zaťažené rovnakou chybou. V prípade, že tento predpoklad nie je splnený, pre nájdenie optimálneho riešenia musíme využiť kritérium zohľadňujúce rozdiely v nameraných hodnotách. Matematické vyjadrenie spočíva v doplnení váhovej matice do kritéria, pričom váhová matica odpovedá kovariancii jednotlivých meraní a prípadne ich vzájomných korelácií. Kritérium s váhovou maticou má tvar

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} (\mathbf{a} \mathbf{x} - \hat{\mathbf{t}})^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{a} \mathbf{x} - \hat{\mathbf{t}}). \quad (3.92)$$

Vhodnú váhovú maticu pre metódu ALS definujeme podľa [16], kde je tento výsledok aj dokázaný. Platí

$$\mathbf{W} = \frac{1}{(N_d - N + 1)^2} \mathbf{T} \left(\mathbf{I}_{\tilde{n}^2 \tilde{r}^2} + \mathcal{K}_{(\tilde{n}\tilde{r}), (\tilde{n}\tilde{r})} \right) \left(\left(\mathcal{K}_{\tilde{r}, \tilde{n}} \boldsymbol{\Omega} \mathcal{K}_{\tilde{n}, \tilde{r}} \right) \otimes \left(\mathcal{K}_{\tilde{r}, \tilde{n}} \boldsymbol{\Omega} \mathcal{K}_{\tilde{n}, \tilde{r}} \right) \right) \mathbf{T}^T, \quad (3.93)$$

kde N_d je dĺžka sady odmeraných inovácií a N je maximálny počet krokov posunutia autokorelačnej funkcie. Pre nové konštanty rozmerov platí $\tilde{n} \triangleq N_d - N + 1$ a $\tilde{r} \triangleq rN$.

Ďalej platia vzťahy

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= (\mathcal{P} \otimes \mathbf{I}_r) \left(\mathbf{I}_{\tilde{r}^2} \otimes (\mathbf{I}_{\tilde{n}})_{\text{vec}} \right)^T \left(\mathbf{I}_{\tilde{r}} \otimes \mathcal{K}_{\tilde{r}, \tilde{n}} \otimes \mathbf{I}_{\tilde{n}} \right), \\ \boldsymbol{\Omega}_r &= \boldsymbol{\mathcal{O}} \mathbf{P}_x \boldsymbol{\mathcal{O}}^T + \boldsymbol{\Xi} \left(\bigoplus_{i=1}^N \bar{\mathbf{Q}}_w \right) \boldsymbol{\Xi}^T + \boldsymbol{\Psi} \left(\bigoplus_{i=1}^N \mathbf{R} \right) + \left(\bigoplus_{i=1}^N \mathbf{R} \right) \boldsymbol{\Psi}^T + \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{R}, \\ \boldsymbol{\Omega} &= \mathcal{P}_1 \boldsymbol{\Omega}_r \mathcal{P}_1^T, \\ \mathcal{P} &= [\mathbf{I}_r \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \end{aligned} \quad (3.94)$$

a $\mathcal{K}_{i,j}$ je komutačná matica definovaná podľa [24]. Komutačná matica je špeciálny typ permutačnej matice, pre ktorú platí rovnosť

$$\mathcal{K}_{m,n} \text{vec}\{\mathbf{A}\} = \text{vec}\{\mathbf{A}^T\}. \quad (3.95)$$

Komutačná matica obsahuje len nuly a jednotky a je ortogonálna. Platia pre ňu rovnosti

$$\mathcal{K}_{m,n}^T = \mathcal{K}_{m,n}^{-1} = \mathcal{K}_{n,m}. \quad (3.96)$$

Matica \mathcal{P}_1 je permutačná matica, pre ktorú platí $\mathbf{X}_{\text{vec}} = \mathcal{P}_1 \mathbf{X}$. Kód funkcie pre Matlab generujúcej permutačnej matice je v Prílohe 1.

Uvedené rozšírenie má niekoľko zásadných vlastností, ktoré obmedzujú jeho použitie. Zo vzťahov (3.94) vidíme, že odhad váhovej matice \mathbf{W} závisí na kovariančných maticiach, ktoré hľadáme. Jednou z možností ako postupovať je, že začneme s váhovou maticou \mathbf{I} , vypočítame \mathbf{Q} , \mathbf{R} a následne odhadneme \mathbf{W} . Tento odhad váh použijeme pre nový výpočet v ďalšej iterácii. Konvergencia tohto iteračného postupu nie je zaručená. Zásadnou komplikáciou celého postupu je výrazné zvýšenie výpočtovej náročnosti vyplývajúce zo zložitého vzťahu pre váhovou maticu a následného iteračného algoritmu.

3.9. Rozšírenie ALS, metóda gALS

V predošlej kapitole sme popísali efektívnu metódu odhadu kovariančných matíc s využitím autokorelačnej funkcie inovácií. Metóda ALS predpokladá nekorelované šumy merania a procesu. Korelácie medzi týmito zdrojmi šumu sa môžu objaviť pri využití identifikačných metód pomocou dát. Rovnako môžu vzniknúť pri vzorkovaní spojitého systému s nekorelovaným šumom.

V tejto kapitole rozšírime algoritmus ALS o odhad korelácií medzi šumom a pridáme modelovanie šumu typu náhodná prechádzka, ktorý má integračný charakter. Metóda vychádza predovšetkým z [20] a nazveme ju **gALS**, z a.j. *Generalized autocovariance least-squares method*.

Definujeme všeobecne lineárny stochastický systém s pridaným modelom integračného šumu. Integračný šum sa modeluje pomocou stavu $\mathbf{d}(t)$ a tvorí tzv. náhodnú prechádzku.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}(t+1) &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{G}}_d\mathbf{d}(t) + \bar{\mathbf{G}}\mathbf{v}(t), \\ \mathbf{d}(t+1) &= \mathbf{d}(t) + \mathbf{v}_d(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{C}}_d\mathbf{d}(t) + \mathbf{e}(t),\end{aligned}\tag{3.97}$$

kde n_d je rozmer modelu integračného šumu, n_w je rozmer šumu $\mathbf{v}(t)$ a pre jednotlivé členy platí nasledovné

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} & \bar{\mathbf{S}} \\ \bar{\mathbf{S}}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix}\right), \quad \mathbf{v}_d(t) \sim N(0, \mathbf{Q}_f).\tag{3.98}$$

U integračného šumu predpokladáme, že nie je korelovaný so šumom procesu ani merania. Pri ponechaní matíc $\bar{\mathbf{C}}_d$ resp. $\bar{\mathbf{G}}_d$ nulových dostaneme štandardný tvar stochastického systému. Systém v tvare (3.98) zapíšeme do klasického tvaru s dvomi rovnicami tak, že zlúčime stavy a rozšírime matice systému. Platí

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{G}}_d \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\bar{\mathbf{C}} \quad \bar{\mathbf{C}}_d],\tag{3.99}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{d}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{v}_d(k) \end{bmatrix}. \quad (3.100)$$

Matica \mathbf{R} ostáva v zápise (3.98) aj (3.99) rovnaká, preto nezavádzame pruhovanú kovarianciu šumu merania. Systém môžeme na základe rovností (3.99) a (3.100) zapísať nasledovne

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}\mathbf{w}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Kalmanov filter môžeme definovať buď jednokrokovovo alebo dvojkrokovovo. Platí

$$\hat{\mathbf{x}}(t+1|t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}(t)(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1)), \quad (3.102)$$

alebo

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t|t) &= \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{K}_1(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1)), \\ \hat{\mathbf{w}}(t|t) &= \mathbf{K}_2(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1)), \\ \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t|t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}\hat{\mathbf{w}}(t|t), \end{aligned} \quad (3.103)$$

kde platia pre zosilnenia nasledovné vzťahy

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= (\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{G}\mathbf{S})(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}, \\ \mathbf{K}_1 &= \mathbf{P}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}, \\ \mathbf{K}_2 &= \mathbf{S}(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \end{aligned} \quad (3.104)$$

a algebraická Riccatiho rovnica, kde $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t|t-1) = E\{(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t-1))(\dots)^T\}$

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^T - (\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{G}\mathbf{S})(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{G}^T\mathbf{S}^T) + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T. \quad (3.105)$$

V ďalšom kroku riešenia využijeme metódu ALS z predošlej kapitoly. Zhrnieme vzťahy, ktoré odpovedajú tvaru (3.67)

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1)), \\ \tilde{\mathbf{x}}(t+1) &= \hat{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{w}}(k), \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{e}(t),\end{aligned}\tag{3.106}$$

kde

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}, \quad \hat{\mathbf{G}} = [\mathbf{G} \quad -\mathbf{K}], \quad \hat{\mathbf{w}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{v}_d(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix}.$$

Rovnice autokorelácie rozšírenej metódy gALS majú tvar

$$\begin{aligned}E\{\tilde{\mathbf{y}}(t)\tilde{\mathbf{y}}^T(t)\} &= \mathbf{C}\mathbf{P}_x\mathbf{C}^T + \mathbf{R}, \\ E\{\tilde{\mathbf{y}}(t+j)\tilde{\mathbf{y}}^T(t)\} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{A}}^j\mathbf{P}_x\mathbf{C}^T + \mathbf{C}\hat{\mathbf{A}}^{j-1}\mathbf{V}_x\mathbf{S}\mathbf{R} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{A}}^{j-1}\mathbf{K}\mathbf{R}, \quad j \geq 1,\end{aligned}\tag{3.107}$$

kde $\mathbf{V}_x = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Označme hodnotu autokorelácie pre jednotlivé časové úseky $\mathbf{e}_j = E\{\tilde{\mathbf{y}}(t+j)\tilde{\mathbf{y}}^T(t)\}$. Následne definujeme pásovú maticu autokorelačných funkcií v tvare

$$\mathcal{R}(N) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 & \cdots & \mathbf{e}_{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}_{N-1}^T & \cdots & \mathbf{e}_0 \end{bmatrix},\tag{3.108}$$

kde N je voliteľný parameter určujúci maximálny časový posun autokorelácie. Na vyjadrenie uvedenej matice $\mathcal{R}(N)$ definujeme

$$\boldsymbol{\mathcal{O}} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\hat{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\hat{\mathbf{A}}^{N-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Xi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{C}\hat{\mathbf{A}}^{N-2} & \dots & \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n_d} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_x = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.109)$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Xi} \left(\bigoplus_{j=1}^N (-\mathbf{K}) \right) + \bigoplus_{j=1}^N \mathbf{I}_r, \quad \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Xi} \left(\bigoplus_{j=1}^N (-\mathbf{V}_x) \right), \quad \boldsymbol{\Phi}_d = \boldsymbol{\Xi} \left(\bigoplus_{j=1}^N (-\mathbf{V}_d) \right), \quad (3.110)$$

kde matica $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ má na základe uvedených predpokladov hodnot' n . Pomocou matíc (3.109) a (3.110) vyjadríme $\mathcal{R}(N)$ nasledovne

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(N) \triangleq & \boldsymbol{\mathcal{O}} \mathbf{P}_x \boldsymbol{\mathcal{O}}^T + \boldsymbol{\Phi} \left(\bigoplus_{i=1}^N \mathbf{Q}_w \right) \boldsymbol{\Phi}^T + \boldsymbol{\Phi}_d \left(\bigoplus_{i=1}^N \mathbf{Q}_f \right) \boldsymbol{\Phi}_d^T \\ & + \boldsymbol{\Phi} \left(\bigoplus_{i=1}^N \mathbf{S} \right) \boldsymbol{\Psi}^T + \boldsymbol{\Psi} \left(\bigoplus_{i=1}^N \mathbf{S} \right) \boldsymbol{\Phi}^T + \boldsymbol{\Psi} \left(\bigoplus_{i=1}^N \mathbf{R} \right) \boldsymbol{\Psi}^T. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Kovariančnú maticu \mathbf{P}_x nahradíme výrazom, podrobne odvodeným v [20]. Platí

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_x)_{\text{vec}} = & \left(\mathbf{I}_{(n+n_d)^2} - \hat{\mathbf{A}} \otimes \hat{\mathbf{A}} \right)^{-1} \left\{ (\mathbf{V}_x \otimes \mathbf{V}_x) (\bar{\mathbf{Q}}_w)_{\text{vec}} \right. \\ & + (\mathbf{V}_d \otimes \mathbf{V}_d) (\mathbf{Q}_f)_{\text{vec}} - (\mathbf{V}_x \otimes \mathbf{K}) (\mathbf{S})_{\text{vec}} \\ & \left. - (\mathbf{K} \otimes \mathbf{V}_x) (\mathbf{S})_{\text{vec}} - (\mathbf{K} \otimes \mathbf{K}) (\mathbf{R})_{\text{vec}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Index „vec“ zdôrazňuje aplikovanie operátora $\text{vec}\{\}$. Vzťah (3.112) dosadíme do (3.111)

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}(N))_{\text{vec}} = & \left\{ (\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Phi}) \mathcal{P}_{n_w, N} + \Lambda (\mathbf{V}_x \otimes \mathbf{V}_x) \right\} \mathbf{Q}_{\text{vec}} \\ & + \left\{ (\boldsymbol{\Phi}_d \otimes \boldsymbol{\Phi}_d) \mathcal{P}_{n_d, N} + \Lambda (\mathbf{V}_d \otimes \mathbf{V}_d) \right\} \mathbf{Q}_f \\ & + \left\{ (\boldsymbol{\Psi} \otimes \boldsymbol{\Psi}) \mathcal{P}_{r, N} + \Lambda (\mathbf{K} \otimes \mathbf{K}) \right\} \mathbf{R}_{\text{vec}} \\ & + \left\{ (\boldsymbol{\Psi} \otimes \boldsymbol{\Phi}) \mathcal{P}_{n_w, r, N} - \Lambda (\mathbf{K} \otimes \mathbf{V}_x) \right\} \mathbf{S}_{\text{vec}} \\ & + \left\{ (\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}) \mathcal{P}_{r, n_w, N} - \Lambda (\mathbf{V}_x \otimes \mathbf{K}) \right\} (\mathbf{S}^T)_{\text{vec}}, \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\text{kde } \Lambda = (\boldsymbol{\mathcal{O}} \otimes \boldsymbol{\mathcal{O}}) \left(\mathbf{I}_{(n+n_d)^2} - \hat{\mathbf{A}} \otimes \hat{\mathbf{A}} \right)^{-1}.$$

Definujeme jednotlivé prvky v kvadratickom kritériu analogicky k predošlej kapitole. Platí

$$\mathbf{x} = \text{vec} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 & \mathbf{S} \\ 0 & \mathbf{Q}_f & 0 \\ \mathbf{S}^T & 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} \right\}, \quad \hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathcal{R}}(N)_{\text{vec}}, \quad (3.114)$$

$$\mathbf{a} = [\mathbf{a}_Q \quad \mathbf{a}_f \quad \mathbf{a}_R \quad \mathbf{a}_S \quad \mathbf{a}_{S^T}] \mathcal{P}_{LS}, \quad (3.115)$$

kde platí

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_Q &= (\Phi \otimes \Phi) \mathcal{P}_{n_w, N} + \Lambda(\mathbf{V}_x \otimes \mathbf{V}_x), \\ \mathbf{a}_f &= (\Phi_d \otimes \Phi_d) \mathcal{P}_{n_d, N} + \Lambda(\mathbf{V}_d \otimes \mathbf{V}_d), \\ \mathbf{a}_R &= (\Psi \otimes \Psi) \mathcal{P}_{r, N} + \Lambda(\mathbf{K} \otimes \mathbf{K}), \\ \mathbf{a}_S &= (\Psi \otimes \Phi) \mathcal{P}_{n_w, r, N} - \Lambda(\mathbf{K} \otimes \mathbf{V}_x), \\ \mathbf{a}_{S^T} &= (\Phi \otimes \Psi) \mathcal{P}_{r, n_w, N} - \Lambda(\mathbf{V}_x \otimes \mathbf{K}) \end{aligned} \quad (3.116)$$

a permutačná matica \mathcal{P}_{LS} má tvar

$$\mathcal{P}_{LS} = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_{n_w} & 0 & 0] \otimes [\mathbf{I}_{n_w} & 0 & 0] \\ [0 & \mathbf{I}_{n_d} & 0] \otimes [0 & \mathbf{I}_{n_d} & 0] \\ [0 & 0 & \mathbf{I}_r] \otimes [0 & 0 & \mathbf{I}_r] \\ [0 & 0 & \mathbf{I}_r] \otimes [\mathbf{I}_{n_w} & 0 & 0] \\ [\mathbf{I}_{n_w} & 0 & 0] \otimes [0 & 0 & \mathbf{I}_r] \end{bmatrix}. \quad (3.117)$$

Kvadratické kritérium môže mať nasledovné tvary

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{a}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{t}}\|_2^2, \quad (3.118)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \|\mathbf{a}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{t}}\|_2^2 + d \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2 \right\}, \quad (3.119)$$

kde \mathbf{x}_0 je matica v tvare (3.114) a všetky kovariancie sú apriórne zadané. Tvar kritéria (3.119) umožňuje pomocou konštanty d kontrolovať vzdialovanie riešenia od počiatočných podmienok. To nám umožní postupne zlepšovať odhad kovariančných matíc a zároveň kontrolovať ich pozitívnosť. Kritérium (3.119) je vhodné aj pre prípady, keď matica \mathbf{a} je zle podmienená a výsledok minimalizácie kvadratického kritéria by bol numericky málo stabilný.

3.10. Odhad štruktúry šumu

Vo všetkých uvedených metódach sme predpokladali známe matice systému \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{G} . Prvé štyri matice môžeme získať pomocou identifikačných metód. Tieto algoritmy sú v súčasnej dobe veľmi dobre prepracované a poskytujú výborné výsledky aj u zložitých a časovo premenných systémov. Horšia situácia nastáva u matice \mathbf{G} stochastického vstupu, ktorú väčšinou nepoznáme a jej tvar nie je možné spoľahlivo získať identifikáciou systému. Navyše identifikačné metódy potrebujú k dobrému výsledku dostatočné vybudenie systému, to znamená všetkých jeho módov. Pri vyšetrovaní stochastických vlastností môžeme pracovať len so šumom, ktorý je v systéme prirodzene prítomný aj bez vybudenia. Práve tomuto prístupu sa venuje výskum v posledných niekoľkých rokoch. Pochopenie a presný popis štruktúry šumu a jeho zdrojov vedie k lepšiemu nastaveniu Kalmanovho filtra, ktorého odhady sa tak môžu priblížiť optimálnym. Pri zanedbaní podstatných stochastických vlastností sú prakticky degradované aj presné identifikačné algoritmy, pretože optimalita KF závisí práve na kovariančných maticiach popisujúcich šum.

Metódy odhadu kovariančných matíc obvykle neodhadujú priamo kovariančnú maticu \mathbf{Q} , ale $\mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T$, čo zodpovedá nezohľadneniu štruktúry stochastického vstupu. Navyše, v tomto prípade určenie $\mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T$ nie je jednoznačné. Ukazuje sa, že aj systémy vyšších rádov bývajú zaťažované zdrojmi šumu, ktoré môžu mať nízky rozmer. Významnou úlohou v obore odhadu vlastností šumu je preto identifikácia štruktúry jeho zdrojov. Jedna z metód je popísaná v [16] a [20].

Uvažujeme stochastický systém v štandardnom tvare

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}\mathbf{v}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t),\end{aligned}\tag{3.120}$$

kde matica \mathbf{G} má p stĺpcov, čomu odpovedá p nezávislých zdrojov šumu s kovarianciou \mathbf{Q} . V prípade, že matica \mathbf{G} nie je známa, teda nepoznáme štruktúru šumu, algoritmy z predošlých kapitol vrátia odhad $\mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T$, označme \mathbf{Q}_G . Matica \mathbf{Q}_G bude mať p nenulových singulárnych čísel a zvyšné približne nulové. Na zistenie štruktúry šumu môžeme využiť rozklad SVD. Cieľom úlohy je získať odhad \mathbf{Q} tak, aby mala čo najmenšiu hodnotu. Hodnosti odpovedajú nezávislé zdroje šumu. Komplikáciou tohto prístupu je celočíselnosť hodnosti matice. Ak by

sme chceli formulovať tento problém všeobecne, dostaneme NP-tiažkú úlohu, ktorá nie je riešiteľná v polynomiálnom čase. Využijeme poznatok, že hodnosť matice je rovná počtu nenulových singulárnych čísel. Minimalizáciu celočíselnej hodnosti nahradíme minimalizáciou stopy matice. Stopa matice je súčet jej vlastných čísel. Do kritéria (3.119) doplníme stopu matice, dostaneme

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X}} \left\{ \|\mathbf{AX} - \hat{\mathbf{b}}\|_2^2 + d \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|_2^2 + r \mathcal{P}_r \mathbf{X} \right\}, \quad (3.121)$$

kde \mathcal{P}_r je permutačná matica obsahujúca nuly a jednotky tak, aby platilo

$$\mathcal{P}_r \mathbf{X} = \text{tr}(\mathbf{Q}),$$

\mathbf{X} obsahuje neznáme prvky kovariančných matíc podľa definície (3.114) alebo (3.80). Do kvadratického kritéria (3.121) pribudol váhový koeficient r . Získanie optimálnych hodnôt koeficientov d , r je predmetom súčasného výskumu. Určitý odhad hodnôt môžeme získať buď pomocou apriórnych znalostí o šume a jeho zdrojoch alebo pomocou zobrazenia závislosti kritéria na voľbe hodnoty r . Cieľom je nastavenie r tak, aby kritérium vzrástlo čo najmenej, zatiaľ čo hodnota stopy matice poklesne významne. Tento postup sa nazýva *metóda L-krivky* a je bližšie popísaný v [16].

Po vyriešení úlohy minimalizácie kritéria (3.121) získame nasledovnú maticu, ktorú rozložíme pomocou SVD

$$\begin{bmatrix} \mathbf{GQG}^T & \mathbf{GS} \\ \mathbf{S}^T \mathbf{G}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} = [\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{G}_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^T \\ \mathbf{G}_2^T \end{bmatrix}, \quad (3.122)$$

kde Σ_2 predstavuje približne nulové singulárne čísla. Potom platí

$$\begin{bmatrix} \mathbf{GQG}^T & \mathbf{GS} \\ \mathbf{S}^T \mathbf{G}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \approx \mathbf{G}_1 \Sigma_1 \mathbf{G}_1^T. \quad (3.123)$$

Rozdelíme výslednú maticu \mathbf{G}_1 na šum procesu a šum merania a dostaneme systém v tvare

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}_{11}\mathbf{w}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}_{12}\mathbf{w}(t),\end{aligned}\tag{3.124}$$

kde šum $\mathbf{w}(t)$ má kovarianciu Σ_1 a $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} \\ \mathbf{G}_{12} \end{bmatrix}$.

3.11. Zhrnutie metód odhadu kovariančných matíc

V predošlých kapitolách sme zdôraznili dôležitú vlastnosť autokorelačnej funkcie inovácií, ktorou je lineárna závislosť na neznámych parametroch \mathbf{Q} , \mathbf{R} . Táto skutočnosť umožňuje definovať analytické riešenie problému. Mnoho autorov postupovalo v hľadaní neznámych kovariancií inou cestou. Spoločným znakom týchto metód je ich vyššia zložitosť a výsledok vo forme nelineárnych vzťahov. Tie sú následne riešiteľné numerickými metódami, ktoré do celkového algoritmu zavádzajú ďalšiu výpočtovú a časovú zložitosť. Metóda popísaná v [18] je príkladom algoritmu, ktorý obsahuje množstvo nelineárnych vzťahov a postup vyúsťuje do riešenia lineárnych maticových nerovností, čo je sama o sebe pomerne zložitá úloha. Ďalším výrazným nedostatkom uvedeného algoritmu je predpoklad diagonálnych kovariančných matíc šumu. V reálnych spojitých sústavách platí, že šumy často korelované nie sú, ale ako bolo zdôraznené pri metóde gALS, korelácie sa objavia vzorkovaním, alebo pri identifikačných metódach na základe vstupno–výstupných dát. V týchto prípadoch nie je dobré koreláciu šumu zanedbať, pretože môžeme dospieť k výrazne neoptimálnemu riešeniu. Autori Rajamani a Rawlings vytvorili inú, jednoduchšiu, formuláciu metódy ALS, ktorú sme nazvali scALS. Obsahuje menej Kroneckerových produktov, čím výrazne zlepšuje numerické vlastnosti a predovšetkým znižuje pamäťové nároky. Uvedení autori ukázali priestor na ďalšie zlepšenie algoritmov využívajúcich lineárnu závislosť \mathbf{Q} , \mathbf{R} na autokorelácii inovácií. Ďalšie perspektívy výskumu v tejto oblasti budú diskutované v závere.

4. Testovanie metód odhadu kovariančných matíc šumu

V tejto kapitole sa budeme venovať implementácii a porovnaniu uvedených metód odhadu kovariančných matíc šumu. Porovnanie bude založené na presnosti výsledkov, časovej a výpočtovej zložitosti. Zároveň v niektorých prípadoch presnejšie popíšeme metódy kvadratického programovania, ktoré boli v predošlej kapitole diskutované len minimálne. Na testovanie metódy scALS a gALS boli využité aj kódy zo stránky [26] autorov Rajamaniho a Rawlingsa.

Na testovanie jednotlivých metód využijeme nasledovnú trojicu systémov. Jednotlivé parametre budú v prípade potreby mierne modifikované. Systémy sú volené od najjednoduchšieho skalárneho až po zložitejší MIMO. Popisy (4.2) a (4.3) sú prevzaté z článkov [23], [12], kde slúžili ako testovacie systémy.

Jednoduchý skalárny systém

$$\begin{aligned}x(t+1) &= 0,8x(t) + v(t) \\ y(t) &= x(t) + e(t).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Systém tretieho rádu s jedným výstupom

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) &= [0,1 \quad 0,2 \quad 0] \mathbf{x}(t) + e(t).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Najzložitejší testovaný systém je piateho rádu s dvomi výstupmi a tromi zdrojmi šumu.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \begin{bmatrix} 0,75 & -1,74 & -0,3 & 0 & -0,15 \\ 0,09 & 0,91 & -0,0015 & 0 & -0,008 \\ 0 & 0 & 0,95 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,905 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Každý zo systémov otestujeme s niekoľkými rôznymi nastaveniami. V prvom prípade bude nastavenie filtra optimálne, teda apriórne matice budú odpovedať skutočným kovarianciám šumu. V ďalších pokusoch bude apriórne nastavenie volené neoptimálne v rôznych kombináciách. Porovnáme výsledky všetkých prípadov. Tento systém testovania ukáže, či dochádza k zlepšovaniu odhadu, ak sa blížíme k optimálnemu nastaveniu. Pokiaľ sa odhad zlepšuje, je možné filter adaptovať na odhadnuté kovariancie a celý proces opakovať. Každá metóda prebehne opakovane 100-krát a tento štatistický súbor sa vyhodnotí z pohľadu strednej hodnoty, mediánu a rozptylu.

Skutočné, hľadané, matice šumu budeme označovať indexom „s“. Matice \mathbf{Q} , \mathbf{R} bez indexu predstavujú matice odhadnuté danou metódou. Index „0“ označuje apriórne nastavenie.

4.1. Mehrov test optimality Kalmanovho filtra

Test optimality KF sme popísali v kapitole 3.1. Je založený na určení bielych postupností inovácií. Pokiaľ inovácie tvoria biely nekorelovaný šum, KF pracuje optimálne. Úlohou tohto testu je určiť optimalitu pomocou autokorelácie inovácií. Upresníme, že testov bielych existuje niekoľko. V tejto kapitole overíme vlastnosti algoritmu, ktorý uverejnil Mehra v [11]. Nastavenie zvolíme nasledovne, $N = 2000$ a maximálny počet krokov posunutia autokorelačnej funkcie je 100. Test optimality opakujeme na 100 nezávislých pokusoch, ktorých štatistické spracovanie je uvedené v tabuľke Tab. 4-1.

Z tabuľky vidíme, že test je pomerne spoľahlivý, ale vyžaduje niekoľko opakovaní na získanie dostatočne presného výsledku. Smerodajná odchýlka výsledkov je vo všetkých prípadoch približne rovnaká, môžeme povedať, že test je robustný pre rôzne nastavenia. Z minima v jednotlivých prípadoch vidíme, že v niektorých pokusoch test vráti výsledok „optimálne“ hoci nastavenie je neoptimálne. Práve z tohto dôvodu je nutné test niekoľkokrát opakovať a využiť väčšiu množinu dát.

Posledný riadok tabuľky je zaujímavý tým, že výsledky pre toto nastavenie sú takmer totožné s prvým riadkom napriek tomu, že apriórny odhad sa výrazne líši od skutočnosti. Dôvod tohto výsledku je ten, že inovácie nezávisia priamo na kovariančných maticiach, ale na zosilnení \mathbf{K} , ktoré závisí predovšetkým od pomeru medzi \mathbf{Q} , \mathbf{R} .

Systém (4.1)

Tab. 4-1

\mathbf{R}_s	\mathbf{R}_0	\mathbf{Q}_s	\mathbf{Q}_0	% z $[\hat{\mathbf{p}}_t]_{ii}$ v intervale $\pm \frac{1,96}{\sqrt{N}}$ $m / \text{median} / \text{min} / \text{max} / s$
1	1	1	1	4,31 / 4,0 / 0,0 / 9,0 / 2,06
1	1	1	2	5,96 / 6,0 / 1,0 / 12,0 / 2,41
1	2	1	1	6,58 / 7,0 / 2,0 / 18,0 / 2,62
4	1	20	1	7,50 / 7,0 / 2,0 / 17,0 / 2,79
1	10	1	10	4,75 / 4,0 / 1,0 / 12,0 / 2,20

Pre porovnanie určíme zosilnenia v oboch prípadoch nastavení na riadku 1 a 5 z Tab. 4-1

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{Q} = 1, \mathbf{R} = 1 \\
 & {}^1\mathbf{P}_x = \text{dare}(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{Q}, \mathbf{R}) = 1,37 \\
 & \mathbf{K} = \mathbf{A}\mathbf{P}_x\mathbf{C}(\mathbf{C}\mathbf{P}_x\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} = 0,4624
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

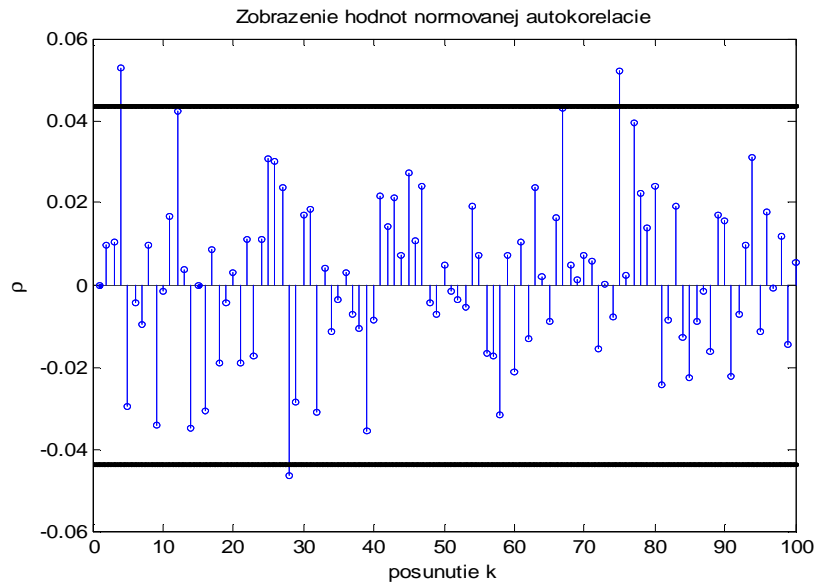
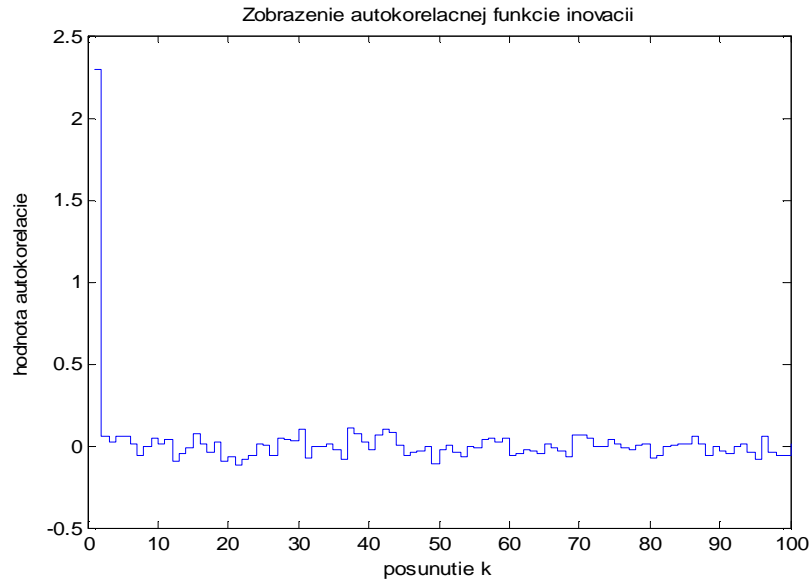
$$\begin{aligned}
 & \mathbf{Q} = 10, \mathbf{R} = 10 \\
 & \mathbf{P}_x = \text{dare}(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{Q}, \mathbf{R}) = 13,70 \\
 & \mathbf{K} = \mathbf{A}\mathbf{P}_x\mathbf{C}(\mathbf{C}\mathbf{P}_x\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} = 0,4624
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Z týchto výsledkov je zrejmé, že pri oboch rôznych apriórnych nastaveniach je výsledné zosilnenie zhodné a tým budú obdobne rovnaké aj postupnosti inovácií. Apriórne nastavenie nie je optimálne, ale zosilnenie je takmer optimálne. Výsledok testu bielosti môžeme označiť za správny.

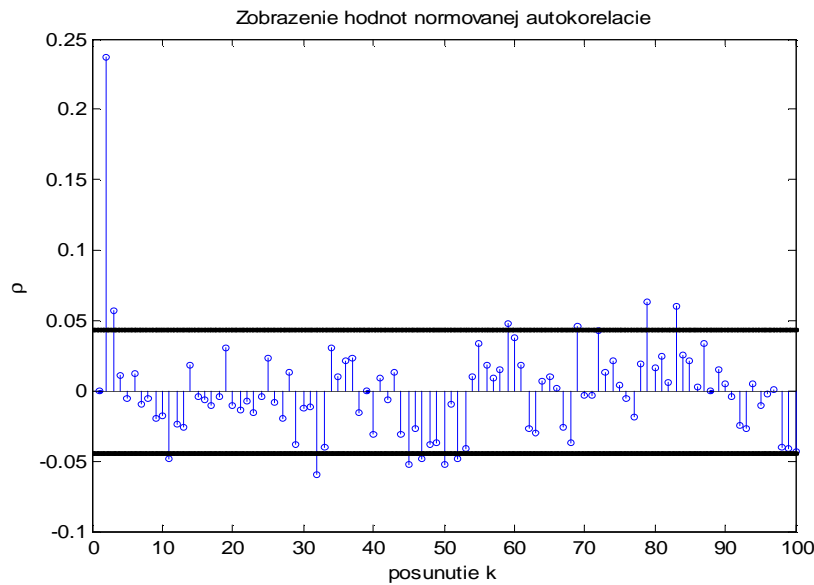
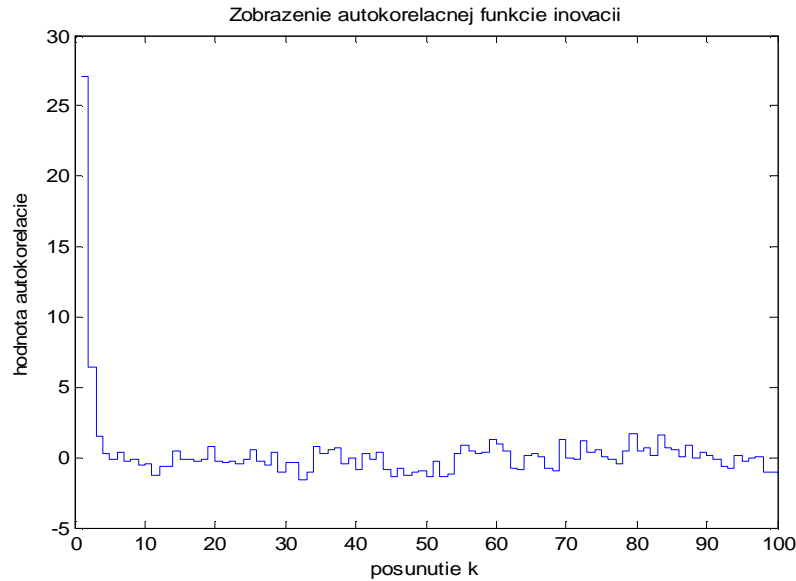
V nasledujúcich grafoch ukážeme autokorelačné funkcie pre optimálne a neoptimálne apriórne nastavenie. Vodorovné čierne čiary označujú hraničné hodnoty $\pm \frac{1,96}{\sqrt{N}}$. Na prvom obrázku je zobrazený priebeh podľa prvého riadku Tab. 4-1.

¹ Funkcia *dare* v Matlabe rieši algebraickú Riccatiho rovnicu.

Odhad kovariančných matíc šumu lineárneho stochastického systému



Na druhom obrázku vidíme, že tri hodnoty prekročili hranicu $\pm \frac{1,96}{\sqrt{N}}$, to činí 3%. Postupnosť inovácií môžeme prehlásiť za biely šum. Na ďalšej dvojici obrázkov vykreslíme rovnaké priebehy pre štvrtý riadok z tabuľky Tab. 4-1.



Na druhom obrázku vidíme, že až 12 hodnôt prekročilo hranicu $\pm \frac{1,96}{\sqrt{N}}$, to činí 12%. Kalmanov filter nie je nastavený optimálne.

Mehrov test optimality patrí do skupiny štatistických testov bielosti. Tieto testy pracujú na rôznych princípoch a je ich niekoľko s rôznymi vlastnosťami. Mnohé testy bielosti alebo testy nezávislosti prvkov bývajú súčasťou štatistických balíkov matematických softvérov. Testy bielosti postupnosti inovácií patria medzi významnú časť adaptívnej filtrácie, pretože umožňujú overiť optimalitu filtra a kvalitatívne zhodnotiť odhady kovariančných matíc. Keďže tieto testy sú pomerne prepracované a vysvetlené v matematických publikáciách, v tejto kapitole venujeme problematike testov optimality len okrajovú pozornosť.

4.2. Mehrova metóda odhadu Kalmanovho zosilnenia pomocou maximálnej vierohodnosti

Táto metóda je odvodená v [10] bez uvedenia príkladu. Samotné odvodenie predpokladá pomerne značné zjednodušenie nelineárnych vzťahov a v konečnom dôsledku vedie na Newtonovu iteračnú metódu výpočtu. Zopakujme výsledné vzťahy

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}(t) &= \mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1), \\
 \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= \mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{K}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\
 \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t+1|t)}{\partial \mathbf{K}^{i,j}} &= \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{K}(t)\mathbf{C}) \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t|t-1)}{\partial \mathbf{K}^{i,j}} + \mathbf{I}_{i,j}\boldsymbol{\varepsilon}(t), \\
 \boldsymbol{\Lambda}(t+1) &= \boldsymbol{\Lambda}(t) + \text{tr} \left(\mathbf{C} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t+1|t)}{\partial \mathbf{K}^{i,j}} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^T(t+1|t)}{\partial \mathbf{K}^{i,j}} \mathbf{C}^T \right), \\
 \mathbf{g}(t+1) &= \mathbf{g}(t) + \text{tr} \left(\boldsymbol{\varepsilon}(t) \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^T(t+1|t)}{\partial \mathbf{K}^{i,j}} \mathbf{C}^T \right), \\
 \mathbf{K}^{i,j}(t+1) &= \mathbf{K}^{i,j}(t) + \boldsymbol{\Lambda}_{(t+1)}^{-1} \mathbf{g}(t+1).
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pri pohľade na tretí výraz vidíme, že stabilita tejto diferenčnej rovnice závisí od odhadovaného zosilnenia. V prvom kroku môžeme uvažovať zosilnenie nulové a pri stabilnej matici \mathbf{A} bude stabilný aj tretí výraz a hodnota $\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t+1|t)}{\partial \mathbf{K}^{i,j}}$ bude závisieť na inovácii $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, takže môže nadobúdať ľubovoľné hodnoty. Pri optimálnom filtri to bude biely šum. Táto hodnota sa následne využije na výpočet premenných $\boldsymbol{\Lambda}(t+1)$ a $\mathbf{g}(t+1)$. Z tejto jednoduchšej úvahy je vidieť, že hodnota zosilnenia v kroku $k+1$ môže nadobúdať ľubovoľné hodnoty. Tým už v druhom kroku môže byť výraz $\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{K}(t)\mathbf{C})$ nestabilný. Hodnota $\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t+1|t)}{\partial \mathbf{K}^{i,j}}$ začne divergovať a následne divergujú aj obe premenné $\boldsymbol{\Lambda}(t+1)$ a $\mathbf{g}(t+1)$.

Autor v článku uvádza, že konvergencia filtra v čase vzniku metódy nebola dokázaná. Pri testovaní sa však nepodarilo nájsť ani jeden systém, s ktorým by algoritmus určil správne zosilnenie a nedivergoval.

4.3. Mehrova metóda s využitím korelácie výstupu

Táto metóda umožňuje jednoznačný odhad kovariančnej matice \mathbf{R} a zosilnenia \mathbf{K} . Maticu \mathbf{Q} nie je možné odhadnúť jednoznačne. Algoritmus zostavíme podľa kapitoly 3.3. Na výpočet korelácie výstupu využijeme zmerané dáta o dĺžke 400. Štatistické spracovanie odhadov je urobené na vzorke 100 opakovaní.

Vzťah (3.16) pre výpočet matice $\mathbf{\Pi}$ je kontrahujúce zobrazenie, čo sa dá ukázať vykreslením grafu v jednorozmernom prípade. Tento fakt môžeme využiť pre nájdenie riešenia tejto rovnice a následný výpočet \mathbf{K} . Počiatočná podmienka iteračného výpočtu musí byť volená v oblasti vyšších čísel ako je singulárny bod funkcie, teda bod, kde výraz $(\mathbf{\Gamma}_0 - \mathbf{C}\mathbf{\Pi}\mathbf{C}^T)^{-1}$ je singulárna matica, pretože funkcia nie je konvexná na celom intervale. Ako počiatočnú hodnotu $\mathbf{\Pi}$ volíme diagonálnu maticu s prvkami s hodnotou 200. Výsledok iteračného výpočtu je možné overiť jednoducho dosadením.

Prvý riadok Tab. 4-2 je nastavenie jednotkových matíc šumu a optimálny apriórny odhad. V druhom riadku sa apriórny odhad líši od skutočnosti o rád. V treťom riadku odhadujeme malé skutočné kovariancie.

System (4.1):

Tab. 4-2

\mathbf{R}_s	\mathbf{R}_0	\mathbf{Q}_s	\mathbf{Q}_0	\mathbf{K}_s	\mathbf{R} <i>m / median / s</i>	\mathbf{K} <i>m / median / s</i>
1	1	1	1	0,462	1,54 / 1,53 / 0,093	-0,94 / -0,25 / 7,59
1	10	1	20	0,462	1,56 / 1,56 / 0,077	-7,75 / -0,19 / 57,54
0,1	1	0,2	1	0,568	0,21 / 0,21 / 0,013	0,783 / 0,395 / 3,18

V tabuľke môžeme pozorovať, že odhad matice \mathbf{R} má malý rozptyl, ale je vychýlený. Táto vychýlenosť ostáva približne na úrovni 50% aj v prípade odhadu šumu s vyššou kovarianciou napr. 10. Odhad zosilnenia \mathbf{K} je takmer úplne nevyhovujúci a predovšetkým si môžeme všimnúť značné rozptyly vo všetkých prípadoch. Takto vysoký rozptyl zapríčiňujú ojedinele sa vyskytujúce odhady v úrovni hodnôt ± 500 (a.j. tzv. outliers). To, že týchto výrazne chybných hodnôt je málo, rádovo jeden alebo dva, je vidieť z veľkého rozdielu aritmetického priemeru

a mediánu. U odhadu \mathbf{R} sú priemer a medián približne totožné. Jednou z možností ako zlepšiť výsledky je odstránenie výrazne chybných hodnôt, ležiacich mimo interval $\langle -3s, 3s \rangle$ a odhad matíc opakovať. Výsledky ukazuje tabuľka.

Tab. 4-3

\mathbf{R}_s	\mathbf{R}_0	\mathbf{Q}_s	\mathbf{Q}_0	\mathbf{K}_s	\mathbf{R} <i>m / median / s</i>	\mathbf{K} <i>m / median / s</i>
1	1	1	1	0,462	1,54 / 1,53 / 0,093	0,016 / 0,17 / 1,76
1	10	1	20	0,462	1,56 / 1,56 / 0,077	1,14 / -0,05 / 7,38
0,1	1	0,2	1	0,568	0,21 / 0,21 / 0,015	0,812 / 0,404 / 3,49

Vidíme, že odhad zosilnenia \mathbf{K} sa zlepšil, ale okrem prípadu malých skutočných kovariancií je stále nevyhovujúci. Výsledok nezlepší ani dlhší interval pre výpočet autokorelácie. Ďalšou možnosťou spresnenia výsledku je využitie väčšieho množstva dát. V predošlých skúškach boli matice odhadnuté jednorázovo. V nasledujúcom postupe necháme algoritmus odhadovať matice v každom kroku z histórie 1000 predošlých krokov. Výsledný odhad určíme ako priemer výsledkov za tento interval. Celý postup opakujeme obdobne ako v predchádzajúcich prípadoch 100-krát a z údajov zostavíme štatistické hodnotenie. Výsledky zhrňuje tabuľka.

Tab. 4-4

\mathbf{R}_s	\mathbf{R}_0	\mathbf{Q}_s	\mathbf{Q}_0	\mathbf{K}_s	\mathbf{R} <i>m / median / s</i>	\mathbf{K} <i>m / median / s</i>
1	1	1	1	0,462	1,55 / 1,54 / 0,060	0,443 / 0,442 / 0,040
1	10	1	20	0,462	1,56 / 1,56 / 0,074	0,443 / 0,445 / 0,043
0,1	1	0,2	1	0,568	0,21 / 0,21 / 0,011	0,528 / 0,531 / 0,041

Výsledky v poslednej tabuľke sú výrazne presnejšie ako u predošlých dvoch testov. Medián je približne zhodný s aritmetickým priemerom, teda metóda nevracia žiadne výrazne chybné odhady. Smerodajné odchýlky u jednotlivých nastavení sú približne zhodné a hodnotou veľmi priaznivé. Zároveň vidíme, že testovaný algoritmus je robustný pre rôzne nastavenia. Nevý-

hodou opäť ostal výrazne vychýlený odhad kovariančnej matice \mathbf{R} . Dôvodom tohto výsledku je využitie len jedného kroku oneskorenia u autokorelačnej funkcie.

V prípade skalárneho systému je táto metóda vyhovujúca pre výpočet Kalmanovho zosilnenia. Pre získanie dobrého výsledku však musíme mať k dispozícii dostatočné množstvo dát. V poslednom testovaní bolo využitých až 2000 vzoriek.

System (4.2):

Na výpočet matice \mathbf{R} využijeme analogicky k predošlému testovaniu priemerovanie za časový interval 1000 krokov.

Tab. 4-5

\mathbf{R}_s	\mathbf{R}_0	\mathbf{Q}_s	\mathbf{Q}_0	k_{11}	\mathbf{R} <i>m / median / s</i>	k_{11} <i>m / median / s</i>
1	1	1	1	0,058	1,08 / 1,09 / 0,058	0,63 / 1,00 / 28,78
1	10	1	20	0,058	1,07 / 1,07 / 0,064	-0,16 / -1,49 / 27,37
0,1	1	0,2	1	0,106	0,12 / 0,12 / 0,005	-0,31 / 1,70 / 26,51

Odhad kovariančnej matice \mathbf{R} je vyhovujúci a pre rôzne nastavenia robustný. Odhad zosilnenia \mathbf{K} je absolútne nevyhovujúci, predovšetkým kvôli veľkému rozptylu výsledných hodnôt. V tabuľke je uvedený len prvý prvok zosilnenia, výsledky ostatných prvkov boli podobné.

System (4.3)

V poslednom prípade sme testovali algoritmus na systéme rádu 5 s dvomi výstupmi. Odhad matice zosilnenia je opäť nevyhovujúci, preto výsledky nie sú zapísané v tabuľke. Z odhadu prvkov matice \mathbf{R} a príslušných štatistík je vidieť, že odhad nie je optimálny ale pomerne robustný. Na dosiahnutie týchto výsledkov je však potrebné veľké množstvo dát, čo predlžuje dobu výpočtu. Ďalším faktorom spomaľujúcim algoritmus je iteračný výpočet matice $\mathbf{\Pi}$. Túto metódu je možné využiť na hrubý odhad kovariancie šumu merania.

Tab. 4-6

\mathbf{R}_s	\mathbf{R}_0	\mathbf{Q}_s	\mathbf{Q}_0	r_{11} <i>m / median / s</i>	r_{12} <i>m / median / s</i>	r_{22} <i>m / median / s</i>
$1\mathbf{I}_2$	$1\mathbf{I}_2$	$1\mathbf{I}_3$	$1\mathbf{I}_3$	1,73 / 1,72 / 0,087	0,17 / 0,17 / 0,095	1,65 / 1,65 / 0,069
$1\mathbf{I}_2$	$10\mathbf{I}_2$	$1\mathbf{I}_3$	$20\mathbf{I}_3$	1,73 / 1,74 / 0,090	0,15 / 0,15 / 0,087	1,65 / 1,65 / 0,085
$0,1\mathbf{I}_2$	$1\mathbf{I}_2$	$0,2\mathbf{I}_3$	$1\mathbf{I}_3$	0,25 / 0,25 / 0,014	0,03 / 0,03 / 0,013	0,23 / 0,23 / 0,011

4.4. Mehrova metóda zlepšovania zhody kovariancie

V tejto kapitole krátko okomentujeme metódu zlepšenia zhody kovariancie popísanú v kapitole 3.4. Metóda využíva kovarianciu inovácií na určenie matíc \mathbf{Q} , \mathbf{R} . Podmienkou pre výpočet matice \mathbf{Q} je plná hodnosť výstupnej matice systému \mathbf{C} . Kovariančnú maticu \mathbf{R} je možné určiť podľa nasledovného vzťahu

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \boldsymbol{\varepsilon}(t-i) \boldsymbol{\varepsilon}(t-i)^T - \mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T. \quad (4.7)$$

Už samotný autor v článku uvádza pochybnosti nad konvergenciou tejto metódy. Na základe testovania môžeme prehlásiť metódu za úplne nepoužiteľnú. Odhad matice \mathbf{Q} vychádzal už pri systéme druhého rádu negatívne definitný. Stredná hodnota matice \mathbf{R} podľa vzťahu (4.7) vyšla rovnako záporná s rozptylom približne 1. Hlavným problémom metódy je, že využíva veľmi malé množstvo informácie z inovácií.

4.5. Metóda odhadu optimálneho zosilnenia (Carew, Bélanger)

Metóda odhadu optimálneho zosilnenia bola popísaná v kapitole 3.5. Odhaduje priamo Kalmanovo zosilnenie pomocou autokorelácie inovácii bez predchádzajúceho určenia kovariančných matíc. Na testovanie použijeme nastavenie $N = 1000$ predstavujúce dĺžku dát použitých autokorelácií inovácií.

Skalárny systém (4.1)

Tab. 4-7

Q_s	Q_0	R_s	R_0	K_{opt}	K <i>m / median / s</i>
1	1	1	1	0,462	0,457 / 0,456 / 0,031
1	20	1	10	0,462	0,459 / 0,463 / 0,029
0,2	1	0,1	1	0,568	0,563 / 0,563 / 0,032
20	1	4	1	0,568	0,564 / 0,565 / 0,034

System (4.2)

Tab. 4-8

Q_s	Q_0	R_s	R_0	K_{opt}	K <i>m / median / s</i>
1	1	1	1	0,057	0,930 / 14,73 / 0,720
				0,057	-0,373 / 7,37 / -0,274
				0,087	0,747 / 14,26 / 0,253

U jednoduchého skalárneho systému vidíme veľmi presné výsledky odhadu s malým rozptylom. V druhej tabuľke sú výsledky systému tretieho rádu s jedným výstupom. Je vidieť, že smerodajné odchýlky sú rádovo väčšie ako hodnoty optimálneho zosilnenia. Už pri zvolení správnych apriórnych hodnôt táto metóda zlyháva. Výsledky nezlepší ani použitie omnoho väčšej sady dát, napr. $N = 6000$.

System (4.3)

Tab. 4-9

\mathbf{Q}_s	\mathbf{Q}_0	\mathbf{R}_s	\mathbf{R}_0	$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{opt} \\ \end{bmatrix}_{11}$ $\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{opt} \\ \end{bmatrix}_{21}$ $\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{opt} \\ \end{bmatrix}_{31}$	k_{11} k_{21} k_{31} <i>m / median / s</i>
\mathbf{I}_3	\mathbf{I}_3	\mathbf{I}_2	\mathbf{I}_2	0,206 -0,025 -0,188	0,196 / 0,197 / 0,067 -0,032 / -0,031 / 0,049 -0,129 / -0,153 / 0,239

Tab. 4-9 obsahuje len jedno nastavenie, pretože porovnanie týmto spôsobom je pomerne zložitá. Metóda dáva uspokojivé výsledky pre všetky nastavenia apriórnych hodnôt. Veľkou výhodou tejto metódy je, že poskytuje kvalitatívne hodnotenie výsledku, ktorým je matica \mathbf{P}_s definovaná vzťahom (3.24). Je to kovariančná matica odchýlky optimálneho odhadu od apriórneho. Túto maticu počíta algoritmus iteračne spolu s odhadom optimálneho zosilnenia. Mierou kvality odhadu môže byť stopa matice \mathbf{P}_s . Informácia uložená v tejto kovariančnej matici je podrobná v tom, že jej diagonálne prvky vypovedajú priamo o rozptyle odhadu jednotlivých stavov. Postup využitia matice \mathbf{P}_s je nasledovný. Nastavíme filter na apriórne hodnoty \mathbf{Q}_0 , \mathbf{R}_0 a odhadneme zosilnenie \mathbf{K} . Adaptujeme filter na nové zosilnenie a odhad opakujeme. Matica \mathbf{P}_s , ktorú dostaneme, je kovarianciou rozdielu optimálneho odhadu a odhadu získaného so zosilnením \mathbf{K} určenom v predošlom kroku. Pri ďalšej adaptácii môžeme podľa zmeny veľkosti stopy matice \mathbf{P}_s rozhodnúť, či došlo k zlepšeniu odhadu \mathbf{K} alebo nie.

Pri testovaní algoritmu so systémom (4.2) sme ukázali, že algoritmus zlyháva aj pri optimálnom apriórnom nastavení. Tento fakt rozoznáme práve podľa matice \mathbf{P}_s , ktorej stopa dosahuje hodnoty okolo 5000, pričom napríklad u systému (4.3) sa pri optimálnom nastavení pohybuje rádovo okolo hodnoty 1.

Metóda testovaná v tejto kapitole odhaduje priamo optimálne Kalmanovo zosilnenie. Kovariančná matica \mathbf{P}_s , ktorá je súčasťou odhadu vypovedá o kovariancii odchýlky medzi optimálnym a apriórny odhadom. Táto matica umožňuje kvalitatívne zhodnotenie získaného odhadu na základe veľkosti jej stopy. Ako sme ukázali na testovaní systému (4.2) algoritmus

na niektorých systémoch zlyháva. Nesprávne výsledky môžeme rozpoznať na základe vysokej hodnoty stopy matice \mathbf{P}_s . Optimálnou hodnotou matice \mathbf{P}_s po adaptovaní filtra na optimálne zosilnenie je nulová matica.

4.6. Bélangerova metóda odhadu kovariančných matíc šumu

Metóda bola publikovaná v článku [23] a bola jednou z prvých metód umožňujúcich odhad kovariančných matíc, nielen zosilnenia. Algoritmus je podrobne odvodený v kapitole 3.6. Medzi jeho vstupné parametre patria bázové kovariančné matice. Výsledkom sú koeficienty lineárnej kombinácie bázových matíc pomocou ktorých je možné určiť kovariancie. Už samotný princíp použitia bázových matíc vytvára problém, ako voliť bázové matice. Nastavenie algoritmu je kľúčové pre získanie uspokojivého výsledku. Už pri skalárnom systéme ukážeme, že voľba bázových matíc výrazne ovplyvňuje výsledok a tým použitie celej metódy. V tabuľke uvedieme pod sebou všetky bázové matice. Počiatočný vektor $\hat{\mathbf{a}}_0$ vo vzťahu (3.62) ponecháme vo všetkých prípadoch jednotkový. Maximálne posunutie pri výpočte autokorelácie inovácii je $L = 10$ a časový horizont odhadovania je 1000 krokov.

Tab. 4-10

\mathbf{Q}_s	\mathbf{Q}_1	\mathbf{R}_s	\mathbf{R}_1	\mathbf{Q} <i>m / median / s</i>	\mathbf{R} <i>m / median / s</i>
1	1	1	1	1,26 / 1,26 / 0,056	1,26 / 1,26 / 0,056
1	20	1	10	6,70 / 6,80 / 0,286	3,50 / 3,41 / 0,143
0,2	1	0,1	1	0,43 / 0,43 / 0,017	0,43 / 0,43 / 0,017
20	1	4	1	13,44 / 13,34 / 0,861	13,44 / 13,34 / 0,861

V tabuľke vidíme, že pokiaľ sú matice \mathbf{Q} , \mathbf{R} zhodné, odhad je prijateľný. Túto skutočnosť však v praktických úlohách nie je možné predpokladať. Pokiaľ sa matice líšia, koeficient lineárnej kombinácie predstavuje určitý kompromis medzi chybami u oboch odhadov. To je vidieť predovšetkým v poslednom riadku tabuľky. Metóda počíta výsledný vektor $\hat{\mathbf{a}}$ iteračne, takže zvýšením časového horizontu výpočtu sa výsledok spresní. Výsledky metódy pre kratšie sady dát vykazujú väčší rozptyl hodnôt. Pre porovnanie, s dĺžkou dát 100 sú rozptyly výslednej matice \mathbf{Q} , analogicky k predošlej tabuľke nasledovné 0,170; 0,861; 0,056, 2,699. Z tohto porovnania vidíme, že metóda poskytuje pomerne dobré výsledky aj pre malé sady dát. S rastúcou dĺžkou dát sa odhad spresňuje.

V ďalšom testovaní vyskúšame dve dvojice bázových matíc.

Tab. 4-11

Q_s	Q_1 Q_2	R_s	R_1 R_2	Q <i>m / median / s</i>	R <i>m / median / s</i>
1	1 1	1	1 1	1,46 / 1,46 / 0,051	1,46 / 1,46 / 0,051
1	20 1	1	10 1	0,81 / 0,82 / 0,143	2,30 / 2,31 / 0,226
0,2	2 0,1	0,1	1 0,1	0,21 / 0,21 / 0,030	0,18 / 0,18 / 0,051
20	5 0,1	4	1 0,1	23,67 / 23,85 / 3,698	3,75 / 3,72 / 6,064

Výsledky v predošlej tabuľke môžeme zhodnotiť ako uspokojivé, predovšetkým pokiaľ ide o rozptyl získaných hodnôt. Za pozornosť stojí posledný riadok tabuľky, ktorý ukazuje odhad pomerne veľmi odlišných kovariancií. Pokiaľ máme apriórnu informáciu o šume, napríklad, že šum merania má 5krát väčší rozptyl ako šum procesu a využijeme tieto poznatky v nastavení algoritmu, výsledok je prijateľný. Vysoký rozptyl u odhadu **R** naznačuje, že je potrebné odhad opakovať, alebo využiť väčšiu sadu dát. Pre porovnanie uvedieme, že pri dátach (inováciách) o dĺžke 2000 sa zníži smerodajná odchýlka odhadu **Q** v poslednom riadku Tab. 4-11 na 2,521 a smerodajná odchýlka odhadu **R** sa zníži na 4,622.

V nasledujúcom kroku testovania overíme posledný riadok Tab. 4-11 s rôznymi apriórными hodnotami a dĺžkou dát 2000. Apriórne informácie budeme voliť rôzne empiricky.

Z tabuľky Tab. 4-12 môžeme pozorovať, že voľba básových matíc má zásadný vplyv na výsledok. Pri „nesprávnom“ nastavení je odhad dokonca záporný (negatívne definitný), čo je úplne zlý výsledok. Zlepšenie uvedených výsledkov nenastalo ani pri použití štyroch dvojíc básových matíc a zdvojnásobení konštanty L na hodnotu 20.

Zásadnou otázkou pre použitie tohto algoritmu je ako zvoliť „správne“ apriórne básové matice. Táto úloha je neriešiteľná pokiaľ nemáme žiadne znalosti o šume. Ani autor článku prof. Bélanger neuvádza žiadne pravidlá ako voliť básové matice. Na základe tohto konštatovania môžeme zhodnotiť metódu ako ťažko použiteľnú na proces, o ktorom nemáme žiadne informácie.

Tab. 4-12

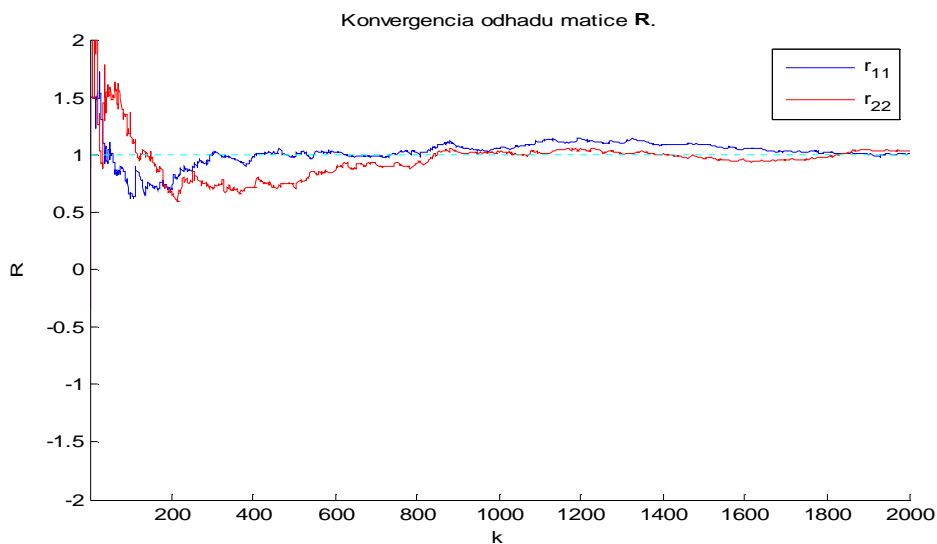
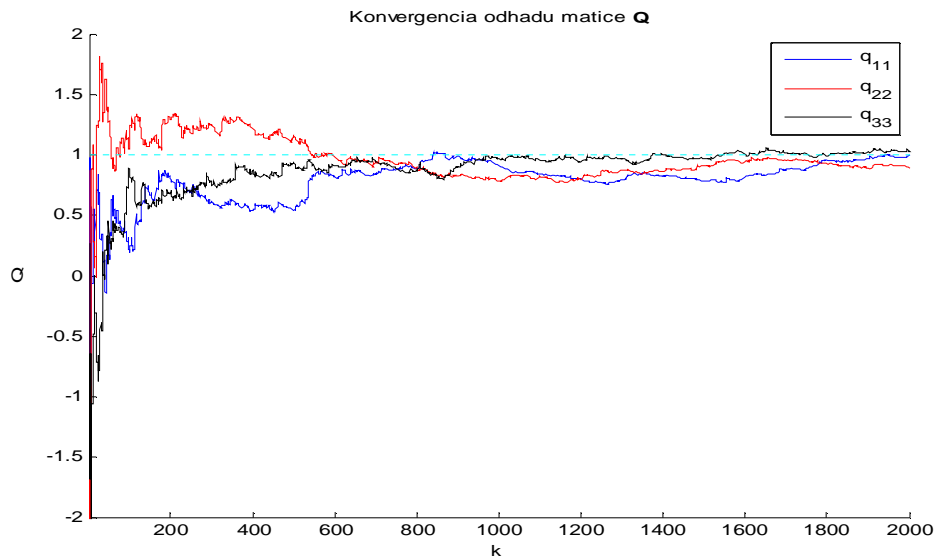
Q_s	Q_1 Q_2	R_s	R_1 R_2	Q <i>m / median / s</i>	R <i>m / median / s</i>
20	1 0,1	4	1 0,1	13,26 / 13,23 / 0,457	13,26 / 13,23 / 0,457
20	10 0,2	4	1 0,1	16,41 / 16,60 / 4,467	20,97 / 22,16 / 9,330
20	2 4	4	1 1	26,21 / 26,21 / 2,46	-1,21 / -1,58 / 3,750
20	20 0,1	4	0,1 10	26,36 / 26,04 / 2,247	-2,10 / -1,69 / 3,140

Metódu otestujeme ďalej na systéme (4.2) s dvojicami bázových matíc. Aj na tejto testovacej sade vidíme, že pri odhadovaní kovariancií, ktoré sú približne rovnaké a pri voľbe správnych kovariančných matíc, získame prijateľné hodnoty. Riadok 2 a 4 však naznačujú, že pri zložitejších podmienkach metóda prakticky zlyháva.

Tab. 4-13

Q_s	Q_1 Q_2	R_s	R_1 R_2	Q <i>m / median / s</i>	R <i>m / median / s</i>
1	1 1	1	1 1	1,00 / 1,00 / 0,039	1,00 / 1,00 / 0,039
1	20 1	1	10 1	-0,12 / 0,04 / 7,746	1,11 / 1,09 / 0,713
0,2	2 0,1	0,1	1 0,1	0,30 / 0,28 / 0,765	0,09 / 0,09 / 0,071
20	5 0,1	4	1 0,1	57,63 / 60,50 / 40,840	0,58 / 0,21 / 3,750

V poslednej časti tejto kapitoly otestujeme metódu na systéme (4.3), ktorý bol uvedený v článku [23] (v tomto článku bola použitá matica G , ktorá mala namiesto jednotkových prvkov čísla 24,6; 0,83 a 1,83). Keďže sa jedná o pomerne zložitý systém, zvýšime množstvo použitých dát na hodnoty $L = 20$, konvergenciu budeme sledovať na intervale 3000 krokov. Správne kovariančné matice sú jednotkové. Apriórne bázové matice sú nasledovné $\mathbf{Q}_1 = \text{diag}(0,25; 0; 0)$, $\mathbf{Q}_2 = \text{diag}(0; 0,5; 0)$, $\mathbf{Q}_3 = \text{diag}(0; 0; 0,75)$, $\mathbf{Q}_4 = \mathbf{Q}_5 = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_3 = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_4 = \text{diag}(0,4; 0)$, $\mathbf{R}_5 = \text{diag}(0; 0,6)$.

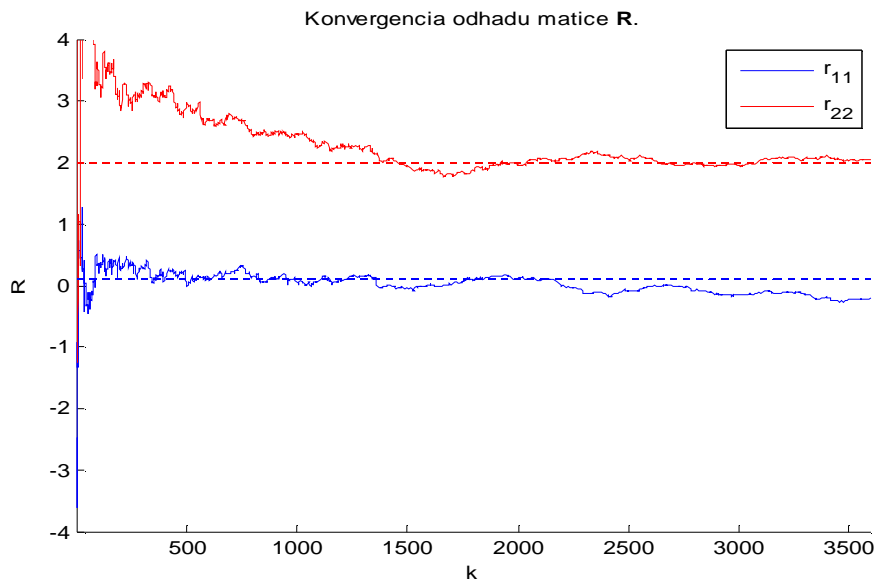
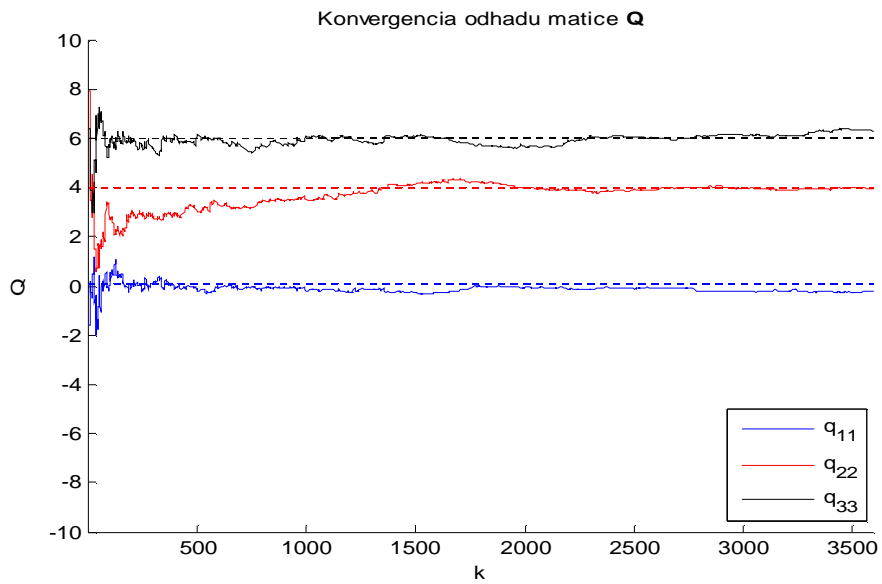


V predošlých dvoch obrázkoch vidíme, že odhady všetkých prvkov kovariančných matíc konvergujú k správnym hodnotám a sú relatívne veľmi presné. Tento príklad dokazuje, že

voľba vhodných básových matíc môže zabezpečiť správny odhad aj pre zložitejšie systémy. Pre jednotkové skutočné matice šumu dáva táto metóda veľmi dobré výsledky aj pre rôzne básové matice.

Otestujeme metódu s nasledovnými kovarianciami šumu $\mathbf{Q} = \text{diag}(0,1; 4; 6)$ a $\mathbf{R} = \text{diag}(0,1; 2)$ a básovými maticami v tvare $\mathbf{Q}_1 = \text{diag}(1; 0; 0)$, $\mathbf{Q}_2 = \text{diag}(0; 1; 0)$, $\mathbf{Q}_3 = \text{diag}(0; 0; 1)$, $\mathbf{Q}_4 = \mathbf{Q}_5 = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_3 = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_4 = \text{diag}(1; 0)$, $\mathbf{R}_5 = \text{diag}(0; 1)$.

Výsledné grafy sú

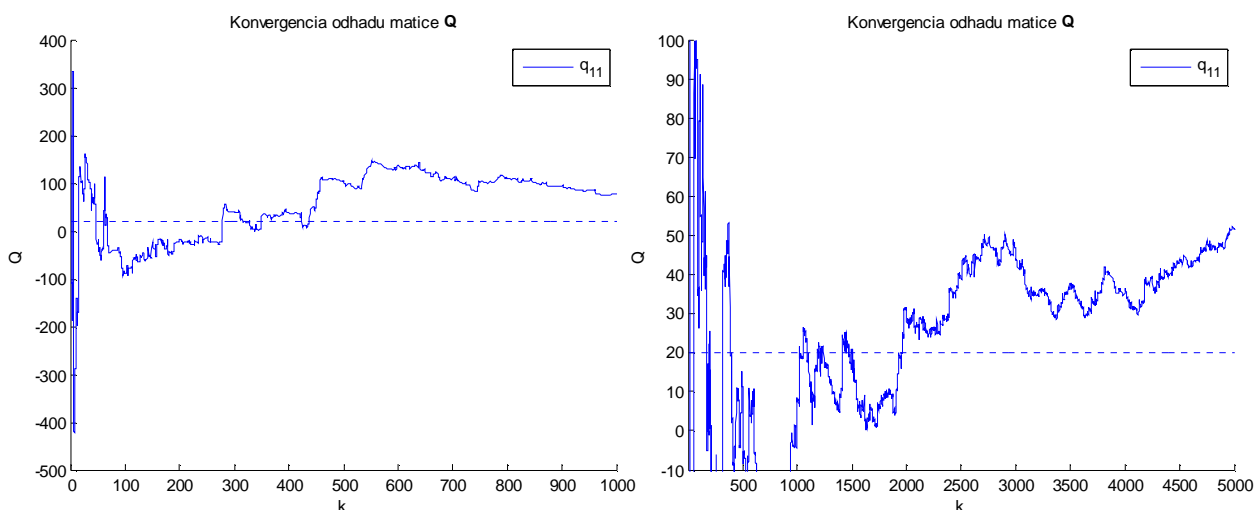


Na obrázkoch vidíme, že metóda určí hľadané kovariančné matice s MIMO systémom piateho rádu uspokojivo presne. Problémom sú prvky r_{11} a q_{11} , ktoré majú hodnotu 0,1 a sú radovo

menšie oproti ostatným diagonálnym prvkom skutočných kovariančných matíc. Tento problém by na základe obrázku bolo možné vyriešiť zvolením malých kladných hodnôt namiesto záporných, ktoré budú výsledkom algoritmu. Dá sa totiž predpokladať, že skutočné (malé) hodnoty sú zakryté šumom a teda sa nenachádzajú v rádovo inej úrovni. Z pohľadu na grafy q_{11} a r_{11} by bolo možné odhadnúť tieto členy v rozsahu 0,1 až 0,3, čo predstavuje pomerne presný odhad.

Bélangerova metóda odhadu kovariancií je založená na hľadaní koeficientov lineárnej kombinácie apriórnych básových matíc na základe autokorelácie inovácií. V predošlých odstavcoch sme metódu otestovali za rôznych podmienok na niekoľkých systémoch. Ukázali sme, že môže pri nevhodnom nastavení zlyhávať. Zároveň bolo na numerických príkladoch ukázané, že je pomerne ťažké určiť básovú maticu ak nemáme o šume žiadne informácie. Metóda sa však správa pomerne dobre u najzložitejšieho prípadu, kde sme testovali systém (4.3). U tohto systému metóda zároveň vykazuje veľmi slušnú robustnosť na voľbu básových matíc. Problémom môže byť odhad malých hodnôt zložiek kovariancie, ktoré môžu byť skryté v šume a ako výsledok získame záporné hodnoty. V tomto prípade je však zrejmé, že správne hodnoty, ktoré algoritmus určil ako záporné, sú v malom okolí nuly. Podľa vývoja odhadu v čase môžeme približne určiť interval, v ktorom sa správna hodnota nachádza. Aj takýto odhad môže byť v mnohých prípadoch prijateľný.

Uvedená metóda podáva predovšetkým so systémom (4.3) veľmi dobré výsledky a celkovo sa správa veľmi robustne. Iteračný priebeh výpočtu umožňuje na základe nových dát spresňovať výsledok. Zároveň výrazne kmitavé alebo divergujúce priebehy odhadu v čase pomôžu k identifikácii nesprávnych výsledkov. Ukážka takéhoto priebehu je na nasledujúcom obrázku. Je to graf, ktorý odpovedá vývoju hodnoty q_{11} v poslednom testovaní podľa Tab. 4-11. Vpravo je rovnaký priebeh na intervale 5000 krokov.



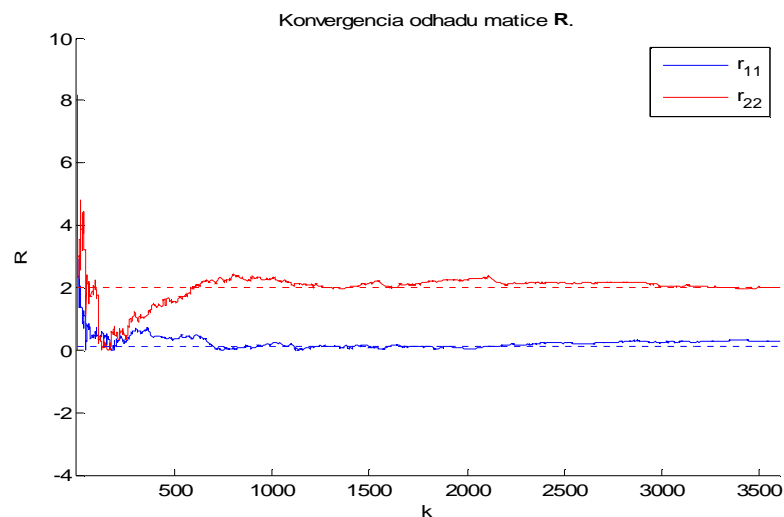
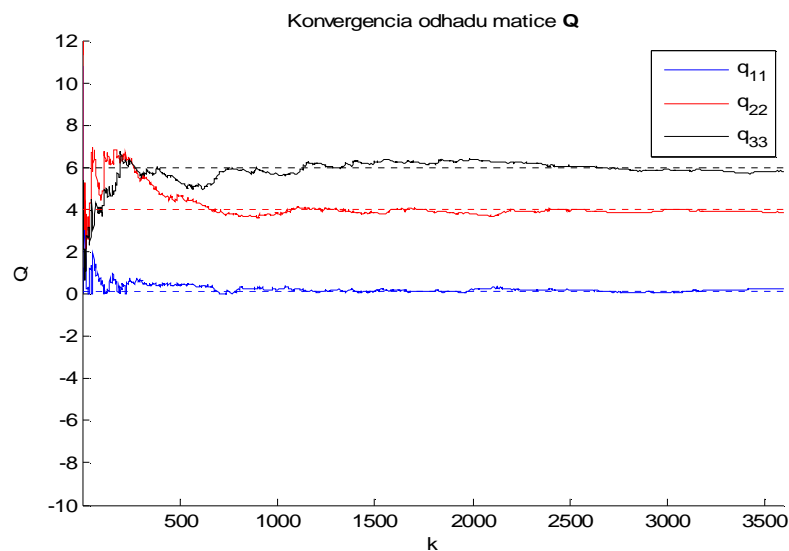
Vidíme, že rozptyl hodnoty q_{11} je príliš veľký na presné určenie zložky kovariančnej matice. Tento priebeh sa čiastočne ustáli na dlhom časovom intervale, ale stále vykazuje rozptyl v ráde desiatok. Empiricky je možné zložku kovariancie určiť pomocou priemeru na dlhom časovom intervale z pravého obrázku v rozsahu 10 až 50. Zopakujme, že skutočná hodnota kovariancie je 20.

Na konci kapitoly 3.6 sme naznačili modifikáciu iteračného výpočtu tak, že zabránime, aby vektor koeficientov lineárnej kombinácie obsahoval záporné čísla. Kovariančné matice sú pozitívne definitné a záporné riešenia nemajú fyzikálny zmysel. Algoritmus rozšírime triviálnym spôsobom tak, že po aktualizovaní hodnôt vektora $\hat{\mathbf{a}}$ vynulujeme jeho záporné zložky.

Overíme výsledok pre systém (4.3) a básovú matice $\mathbf{Q}_1 = \text{diag}(1; 0; 0)$, $\mathbf{Q}_2 = \text{diag}(0; 1; 0)$,

$\mathbf{Q}_3 = \text{diag}(0; 0; 1)$, $\mathbf{Q}_4 = \mathbf{Q}_5 = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_3 = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_4 = \text{diag}(1; 0)$, $\mathbf{R}_5 = \text{diag}(0; 1)$.

Cieľové hodnoty kovariancií sú $\mathbf{Q} = \text{diag}(0, 1; 4; 6)$ a $\mathbf{R} = \text{diag}(0, 1; 2)$.



Z obrázkov môžeme pozorovať zlepšenie odhadu predovšetkým u členov r_{11} a q_{11} , ktoré nadobúdajú správne kladné hodnoty. Ich skutočná hodnota je 0,1. Modifikácia algoritmu zlepšila jeho správanie predovšetkým v oblasti malých odhadovaných hodnôt. Zároveň zabránenie prekmitávaniu odhadu do záporných čísel urýchlilo konvergenciu všetkých odhadov.

V Tab. 4-13 v poslednom riadku je uvedený najhorší dosiahnutý výsledok Bélangerovej metódy. Smerodajná odchýlka odhadu Q nadobúda hodnotu až 40. Po aplikovaní modifikovaného algoritmu na dané zadanie dostaneme výrazne lepší výsledok so smerodajnou odchýlkou na úrovni 20. Stredná hodnota odhadu sa pohybuje na úrovni 40, pričom správna hodnota kovariancie je 20. U uvedeného príkladu, ktorý dosahuje menej vyhovujúce výsledky je vidieť pozitívny vplyv modifikovania algoritmu. Priebeh konvergenzie je menej kmitavý a výsledok presnejší. V prípade, že nemáme k dispozícii lepší odhad kovariancií, môžeme prehlásiť aj výsledky v najhoršom prípade za použiteľné.

4.7. Metóda ALS

Metóda ALS je popísaná v článku Odelson et al., [12] a patrí medzi najnovšie. Vychádza z pozorovania, že autokorelačná matica inovácií je lineárne závislá na neznámych parametroch \mathbf{Q} a \mathbf{R} . Prvé metódy odhadu týchto matíc, ktoré publikoval Mehra, neumožňovali jednoznačný odhad matice \mathbf{Q} , pretože poskytovali len nr rovníc. Bolo možné jednoznačne odhadnúť len maticu \mathbf{R} , prípadne zosilnenie \mathbf{K} alebo maticu \mathbf{Q} v špeciálnom tvare nanajvyš s nr neznámymi.

ALS pracuje s autokorelačnou funkciou inovácií o zvolenej dĺžke posunutia. Práve voľbou posunutia môžeme vytvoriť ľubovoľný počet rovníc a tým získať jednoznačný odhad neznámych kovariančných matíc šumu. Metóda je podrobne odvodená v kapitole 3.7. V nasledujúcej časti overíme jej vlastnosti. ALS má dva ladiace parametre, prvým je maximálne posunutie autokorelačnej funkcie $N = 15$ a druhým je počet inovácií vo výpočte odhadu autokorelácie $N_d = 3000$. Parameter N by mal byť väčší ako je počet neznámych parametrov. Matice \mathbf{Q} , \mathbf{R} sú symetrické. Počet nezávislých parametrov symetrickej matice rozmerov $n \times n$ je $\frac{1}{2}n(n+1)$. Testované systémy majú počet nezávislých parametrov nasledovné: systémy (4.1) a (4.2) dva a systém (4.3) deväť.

Funkčnosť algoritmu overíme tak, že namiesto odhadu autokorelácií inovácií použijeme exaktne vypočítanú maticu $\mathcal{R}(N)$ podľa vzťahu (3.73) s dosadením skutočných hodnôt \mathbf{Q} , \mathbf{R} . Výsledkom odhadu musia byť správne kovariančné matice šumu.

Skalárny systém (4.1)

Tab. 4-14

\mathbf{Q}_s	\mathbf{Q}_0	\mathbf{R}_s	\mathbf{R}_0	\mathbf{Q} <i>m / median / s</i>	\mathbf{R} <i>m / median / s</i>
1	1	1	1	1,01 / 1,00 / 0,058	1,00 / 0,99 / 0,056
1	20	1	10	1,00 / 0,99 / 0,054	1,00 / 1,00 / 0,064
0,2	1	0,1	1	0,20 / 0,20 / 0,01	0,10 / 0,10 / 0,008
20	1	4	1	20,29 / 20,31 / 0,973	3,86 / 3,81 / 0,653

Z Tab. 4-14 vidíme veľmi dobré výsledky odhadu pre rôzne nastavenie filtra. Podľa očakávania najviac rozptýlený odhad dostaneme pre šum s najvyššími kovarianciami. Výsledky v tejto tabuľke sú najlepšie zo všetkých testovaných metód a ukazujú na veľký potenciál metódy ALS.

System (4.2)

Tab. 4-15

Q_s	Q_0	R_s	R_0	Q <i>m / median / s</i>	R <i>m / median / s</i>
1	1	1	1	0,98 / 0,96 / 1,066	1,00 / 0,99 / 0,988
1	20	1	10	1,01 / 0,93 / 1,047	1,00 / 1,01 / 0,102
0,2	1	0,1	1	0,21 / 0,22 / 0,122	0,10 / 0,10 / 0,012
20	1	4	1	20,30 / 19,93 / 5,151	3,97 / 3,97 / 0,479

Pre druhý zvolený SISO systém vidíme nárast kovariancií odhadu. Smerodajná odchýlka sa pohybuje v ráde odhadovanej veličiny. Rozptyl je tak veľký, že nie je možné spoľahnúť sa na jediný odhad. Z tabuľky vidieť, že stredné hodnoty zo 100 opakovaní zodpovedajú pomerne presne očakávaným číslam. Z toho vyplýva, že na dosiahnutie uspokojivých výsledkov je nutné metódu opakovať s rôznymi sadami dát. Algoritmus je možné nastaviť napríklad na hodnoty $N = 7000$, $N_d = 35$. Takto zvolené parametre zohľadňujú pomerne veľkú sadu dát. Výsledky (smerodajná odchýlka) sa čiastočne zlepšia (v prípade matice **Q** približne o 50%, u matice **R** približne 40%), ale veľmi výrazne narastie časová aj pamäťová náročnosť. Algoritmus ALS pracuje s niekoľkými maticami až rozmeru $p^2 N^2$, takže každé zvýšenie parametra N sa prejaví kvadraticky zvýšením pamäťových nárokov. Lepšou metódou je spriemerovať niekoľko samostatných odhadov. Napríklad využiť nastavenie filtra $N = 3000$, $N_d = 15$ a opakovať odhad na rôznych sadoch dát rádovo 10 krát. Čím viac dát máme k dispozícii, tým presnejší odhad získame.

Ďalej otestujeme algoritmus ALS so systémom MIMO. Systém má tri stochastické vstupy a dva výstupy, takže matice **Q**, **R** majú rozmery 3×3 a 2×2 . Problém, ktorý vzniká v tomto prípade oproti systémom SISO je ten, že autokorelácia inovácií je matica rozmeru $p \times p$, teda 2×2 . Táto matica je symetrická a to spôsobí, že matica **a** kvadratickej optimali-

zácie (3.79) bude mať lineárne závislé stĺpce, takže neplatí rovnosť $\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger = \mathbf{I}$. Tento problém je možné odstrániť vynechaním príslušných stĺpcov v matici \mathbf{a} , ktoré odpovedajú opakujúcim sa členom v premennej \mathbf{x} . Princíp vynechania je detailne popísaný v kapitole 3.6.

Na test algoritmu so systémom MIMO budeme pre jednoduchosť využívať diagonálne matice so zhodnými prvkami, výsledky jednotlivých nastavení sú v Tab. 4-16 pod sebou. V tomto prípade máme deväť neznámych, preto parameter N zvýšime na 20. Z nasledujúcej tabuľky je vidieť, že algoritmus zlyháva už pri pomerne jednoduchom MIMO systéme a získané výsledky sú nepoužiteľné.

Tab. 4-16

\mathbf{Q}_s	\mathbf{Q}_0	\mathbf{R}_s	\mathbf{R}_0	\mathbf{Q} <i>m / median / s</i>	\mathbf{R} <i>m / median / s</i>
\mathbf{I}_3	\mathbf{I}_3	\mathbf{I}_2	\mathbf{I}_2	0,98 / 0,96 / 1,066	1,00 / 0,99 / 0,988
\mathbf{I}_3	$20\mathbf{I}_3$	\mathbf{I}_2	$10\mathbf{I}_2$	1,01 / 0,93 / 1,047	1,00 / 1,01 / 0,102
$0,2\mathbf{I}_3$	\mathbf{I}_3	$0,1\mathbf{I}_2$	\mathbf{I}_2	0,21 / 0,22 / 0,122	0,10 / 0,10 / 0,012
$20\mathbf{I}_3$	\mathbf{I}_3	$4\mathbf{I}_2$	\mathbf{I}_2	53,02 / 53,08 / 2,804 -40,69 / -36,10 / 78,50 35,44 / 35,34 / 2,522	-7,86 / -7,90 / 1,204 4,30 / 4,31 / 0,670

Jednou z možností ako dosiahnuť prijateľnejšie výsledky je rozšíriť kvadratické kritérium o člen zohľadňujúci vzdialenosť od apriórneho nastavenia.

Kritérium bude mať tvar

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \|\mathbf{a}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{t}}\|_2^2 + d \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2 \right\}. \quad (4.8)$$

Prepíšeme toto kritérium do tvaru

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ (\mathbf{a}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{t}})^T (\mathbf{a}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{t}}) + d (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right\}. \quad (4.9)$$

Po roznásobení členov v zloženej zátvorke položíme deriváciu tohto výrazu rovnú nule a vyjadríme neznámu. Dostaneme výsledný algebrický tvar

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{a} + d \mathbf{I})^\dagger (\boldsymbol{a} \hat{\boldsymbol{x}} + d \boldsymbol{x}_0). \quad (4.10)$$

Algoritmus ALS týmto rozšírením získava ďalší ladiaci parameter. Čím je hodnota d vyššia, tým viac sa $\hat{\boldsymbol{x}}$ bude blížiť \boldsymbol{x}_0 . Z testovania vyplýva, že vyhovujúce hodnoty je možné voliť v rozsahu 0,1 až 10. Je vhodné začať vyššou hodnotou d , určiť odhady \mathbf{Q} , \mathbf{R} , filter adaptovať a celý proces meraní a odhadov opakovať. Týmto iteračným procesom sa priblížime skutočným hodnotám kovariancií šumu.

Uplatníme uvedené poznatky na systéme (4.3). Pri nastavení parametra d na hodnotu 1 resp. 0,1 dostaneme v odhade matice \mathbf{R} záporné čísla. Odhad zopakujeme pre dve rôzne nastavenia filtra. V prvom prípade (prvý riadok Tab. 4-17) apriórny odhad odpovedá skutočnosti a $d=10$. V druhom prípade odhadujeme pomerne veľké kovariančné matice a $d=20$. Pri nastavení nižšej konštanty d v druhom prípade dostaneme záporný odhad prvkov matice \mathbf{R} . Výsledky sú v nasledujúcej tabuľke.

Tab. 4-17

\mathbf{Q}_s	\mathbf{Q}_0	\mathbf{R}_s	\mathbf{R}_0	\mathbf{Q} <i>m / median / s</i>	\mathbf{R} <i>m / median / s</i>
\mathbf{I}_3	\mathbf{I}_3	\mathbf{I}_2	\mathbf{I}_2	1,25 / 1,25 / 0,040 1,14 / 1,14 / 0,031 1,33 / 1,33 / 0,049	0,52 / 0,52 / 0,062 0,88 / 0,89 / 0,030
$20\mathbf{I}_3$	\mathbf{I}_3	$4\mathbf{I}_2$	\mathbf{I}_2	6,59 / 6,61 / 0,393 10,20 / 10,17 / 0,308 23,75 / 23,68 / 0,839	1,52 / 1,52 / 0,577 6,93 / 6,93 / 0,236

Z tabuľky je vidieť, že odhady sú pomerne nepresné. Pri nastavení nízkej konštanty d dostávame úplne nesprávne záporné výsledky. Zvyšovaním d je výsledok tlačný smerom k apriórному odhadu. Tento problém nemusí vyriešiť ani adaptovanie filtra na odhadnuté hodnoty a opakovanie odhadu. Je vidieť, že pri veľkých kovarianciách a nepresnom apriórnom odhade je metóda použiteľná len veľmi orientačne. Je vhodné ju doplniť kvalitatívnym zhodnotením bielosti inovácií, ktorá pomôže posúdeniu kvality odhadu. Z uvedených výsledkov je zrejmé, že metódu nie je možné nasadiť ako súčasť adaptácie filtra, pretože výsledky

nie sú zaručené a aj v jednoduchých systémoch vyžaduje pomerne veľké množstvo dát. Výrazné zvýšenie parametra N nie je možné, pretože pamäťová náročnosť rastie kvadraticky s týmto parametrom. Už pri $N = 30$ vyhlási MATLAB chybu pamäte. Takto veľké matice rozhodne nie je možné používať v bežných priemyselných počítačoch. Testovanie ALS s nastavením $N = 25$ a $N_d = 6500$ neprinieslo oproti Tab. 4-17 žiadne výrazné zlepšenie.

V kapitole 3.9 sme definovali rozšírenú metódu gALS, ktorá pracuje na rovnakom princípe ako ALS s tým, že berie do úvahy intergačný šum a koreláciu medzi šumom procesu a šumom merania. Výsledky algoritmu sú výrazne horšie ako u ALS už u SISO systému prvého rádu. Toto zhoršenie je dané odhadom autokorelačnej funkcie, ktoré zavádza do výpočtu významné neurčitosti. Druhou nevýhodou metódy oproti ALS je ďalšie zvýšenie pamäťovej náročnosti z dôvodu nárastu členov s Kroneckerovým produktom. Metódu gALS je vhodné formulovať analogicky k scALS a tým zlepšiť jej numerické vlastnosti. Táto úloha a ďalšie testovanie výsledkov bude predmetom ďalšieho výskumu.

V ďalšej časti testovania sa zameriame na zlepšenie numerických vlastností výsledkov metódy gALS. Rozšírime kvadratické kritérium o ďalšie členy, ktoré zaručia pozitívnosť matice. Z Tab. 4-17 vidíme, že metóda ALS (analogicky aj gALS) je pri definícii kvadratického kritéria v tvare (4.9) takmer nepoužiteľná. Výsledkom sú matice s veľkým rozptylom, nesprávnou strednou hodnotou a často negatívne definitné.

Definujeme semidefinitné programovanie ako minimalizáciu kritéria

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{a}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{t}}\|_2^2 + \frac{1}{2} d \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2 + r\mathcal{P}_r\mathbf{x} + tF(\mathbf{x}) \right\}, \quad (4.11)$$

kde \mathcal{P}_r je permutačná matica obsahujúca nuly a jednotky tak, aby platilo

$$\mathcal{P}_r\mathbf{x} = \text{tr}(\mathbf{Q}).$$

$F(\mathbf{x})$ je tzv. bariérová funkcia, pre ktorú platí

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\ln \det(\mathbf{x}), & \mathbf{x} > 0 \\ \infty, & \mathbf{x} \leq 0 \end{cases}. \quad (4.12)$$

Použitie funkcie $F(\mathcal{X})$ zaručí pozitívnosť výslednej matice. Vzdialenosť od hranice pozitívnosti je vážená koeficientom t . Riešenie úlohy semidefinitného programovania (SDP) je pomerne komplexná úloha, presahujúca rozsah diplomovej práce, preto uvedieme len niekoľko výsledkov ako ukážku. Uvedené príklady dokazujú, že SDP môže priniesť uspokojivé výsledky aj v situácii keď jednoduché kvadratické kritérium zlyháva. Zároveň však vzniká problém s nastavením SDP, pretože konštanty priamo ovplyvňujú výsledok metódy. Nasledujúca tabuľka ukazuje výsledky pre systém (4.2), z dôvodu stručnosti vynecháme medián. Konštanty váh v kvadratickom kritériu nastavíme jednotkové.

Z tabuľky, predovšetkým z posledného riadku, vidíme, že výsledky nie sú spoľahlivé. Algoritmus SDP síce zabezpečí pozitívne definitné matice, ale zároveň je výsledok zásadne ovplyvnený váhovými konštantami vo vzťahu (4.11). Použitelnosť tohto algoritmu bez informácií o vlastnostiach šumu je obmedzená. Potiaľ nastáva predovšetkým v zhodnotení výsledkov a vplyve váh v kritériu SDP.

Tab. 4-18

Q_s Q_0	R_s R_0	S_s S_0	Q_{xs} Q_{x0}	Q <i>m/s</i>	R <i>m/s</i>	S <i>m/s</i>	Q_x <i>m/s</i>
1	1	1	1	0,49 / 0,106	0,99 / 0,035	0,61 / 0,080	0,23 / 0,016
1	1	1	0,2				
1	1	1	0,1	0,45 / 0,138	0,96 / 0,035	0,65 / 0,110	0,23 / 0,022
20	10	3	0,4				
20	4	0,5	1	0,34 / 0,264	5,75 / 0,204	1,26 / 0,653	1,08 / 0,098
1	1	0,1	0,1				

4.8. Metóda scALS

Metóda scALS (*a.j. single column ALS*) predstavuje inú matematickú formuláciu ako ALS. Už z pohľadu na definície metódy je zrejmé, že tento prístup je omnoho menej náročný na pamäťové prostriedky ako samotná ALS. U scALS sa nepracuje v takej miere s Kroneckerovými produktmi a tým nevznikajú matice veľkých rozmerov. Výsledná formulácia úlohy rovnako ako ALS vedie na riešenie kvadratického programovania, ale oproti ALS sú vstupné matice menších rozmerov. Výška matice \mathbf{a} je daná konštantou autokorelácie N .

Na základe jednoduchšej formulácie riešenia problému môžeme predpokladať menej numerických problémov a presnejšie výsledky. Metóda ALS poskytovala na systémoch (4.1) a (4.2) pomerne presné výsledky, preto scALS otestujeme na MIMO systéme (4.3) s nastavením $N = 15$ a $N_d = 3000$.

Z Tab. 4-19 vidíme výrazné zlepšenie výsledkov oproti metóde ALS. Aj odhadovanie najväčších kovariancií v poslednom riadku je veľmi presné s uspokojivým rozptylom. Túto metódu môžeme vyhodnotiť ako najlepšiu v odhadovaní diagonálnych kovariančných matíc. Zároveň sa oproti ALS skrátí čas výpočtu a pamäťové nároky. U metódy ALS sme konštatovali, že pri použití parametra autokorelácie $N = 30$ vyhlási Matlab chybu pamäte pri tvorbe Kroneckerovho produktu. U metódy scALS je možné bez problémov využiť maximálne posunutie autokorelácie v dĺžke $N = 50$.

Tab. 4-19

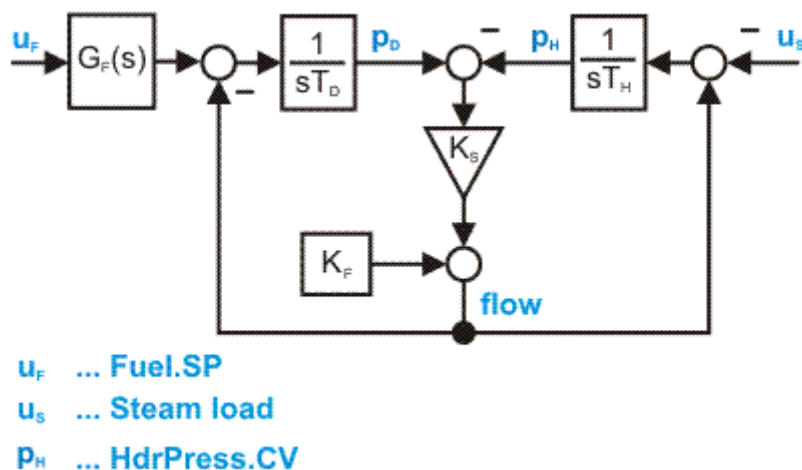
\mathbf{Q}_s	\mathbf{Q}_0	\mathbf{R}_s	\mathbf{R}_0	\mathbf{Q} <i>m / median / s</i>	\mathbf{R} <i>m / median / s</i>
\mathbf{I}_3	\mathbf{I}_3	\mathbf{I}_2	\mathbf{I}_2	1,01 / 1,01 / 0,106 1,00 / 1,00 / 0,092 1,00 / 1,00 / 0,099	1,01 / 1,00 / 0,077 1,00 / 1,01 / 0,094
\mathbf{I}_3	$20\mathbf{I}_3$	\mathbf{I}_2	$10\mathbf{I}_2$	1,00 / 1,00 / 0,116 1,00 / 1,00 / 0,096 1,00 / 1,00 / 0,095	1,00 / 1,00 / 0,073 1,00 / 1,00 / 0,083
$20\mathbf{I}_3$	\mathbf{I}_3	$4\mathbf{I}_2$	\mathbf{I}_2	20,28 / 19,98 / 2,174 19,93 / 19,84 / 1,546 20,40 / 20,40 / 1,609	3,74 / 3,81 / 0,958 4,06 / 4,03 / 1,178

5. Odhadovanie kovariančných matíc šumu z experimentálnych dát

V kapitole 5 máme k dispozícii model dynamického systému a namerané experimentálne dáta. Otestujeme vybrané metódy, ktoré v kapitole 4 dosahovali najlepšie výsledky. Sú to metódy Bélangerera, ALS a scALS. Experimentálne dáta sú zaťažené rôznymi ďalšími chybami a neurčitostami, ktoré sa v teoretických testovacích úlohách nevyskytujú. Overíme, aké výsledky poskytnú metódy za týchto zložitých podmienok. Pre porovnanie máme k dispozícii odhad Kalmanovho zosilnenia, ktoré bolo získané pomocou identifikačných metód s nástrojom GBident (identifikačný nástroj firmy Honeywell) v prostredí Matlab. Kalmanovo zosilnenie počítame v celej kapitole podľa vzťahu $\mathbf{K} = \mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}$, kde $\mathbf{P}(t|t-1)$ je riešením Riccatiho rovnice. V Matlabe je na tento výpočet funkcia *dare*.

5.1. Popis reálneho systému

Testovaný termodynamický systém pozostáva z bubnového kotla a spoločnou zberňou pary. Celá sústava je nelineárna, uvažujeme linearizovaný model v okolí pracovného bodu. Meranými veličinami sú tlak v bubne kotla, tlak v zberni a prietok pary, ktorý je daný ich tlakovou diferenciou. Systém je zložený z troch dynamických členov, prenos $G_F(s)$ je druhého rádu. Systém má celkovo 4. rád, štruktúra je zobrazená na nasledovnom obrázku.



Systém transformujeme na stavový popis tak, že konštantu pracovného bodu K_F budeme modelovať ako samostatný vstup. Dostaneme MIMO systém 4. rádu s tromi vstupmi a tromi výstupmi. Matice spojitého systému majú nasledovný tvar

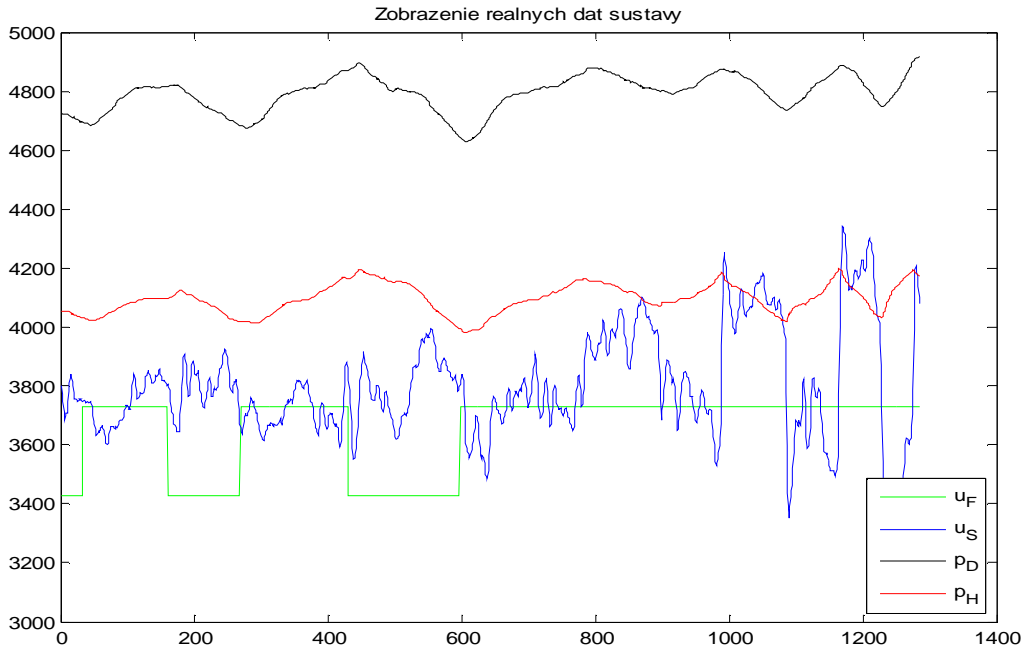
$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{t_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{t_2} & \frac{-1}{t_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_D} & -\frac{K_s}{T_D} & \frac{K_s}{T_D} \\ 0 & 0 & \frac{K_s}{T_U} & \frac{-K_s}{T_U} \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \frac{k}{t_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{T_D} \\ 0 & \frac{-1}{T_U} & \frac{1}{T_U} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & K_s & -K_s \end{bmatrix} & \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Jednotlivé konštanty sú

$$\begin{aligned}
 k &= 1,044 & T_D &= 288s & K_s &= 2,86 \\
 t_1 &= 43s & T_U &= 385s & K_F &= 1770. \\
 t_2 &= 40s & & & &
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Uvedený spojitý systém diskretizujeme s periódou vzorkovania 5s. V ďalších výpočtoch už budeme pracovať len s diskretným systémom.

Experimentálne dáta boli získané metódou tzv. „step testing“. To znamená posielanie skokovej požiadavky na vstup u_F , ktorý vyjadruje požadovaný výstup pary z kotla a vstup u_S , ktorý predstavuje požadovaný odber pary zo zberne. Z týchto experimentálnych dát, ktoré sú na nasledovnom obrázku bol pomocou GBident tool identifikovaný model systému. Identifikačný nástroj dokáže využívať apriórne informácie o systéme (tzv. grey box identification) a tým výrazne zlepšiť kvalitu identifikácie. V prípade uvažovaného systému je takouto informáciou integračný charakter sústavy. Legenda v nasledovnom grafe k jednotlivým priebehom odpovedá obrázku štruktúry systému v úvode kapitoly.



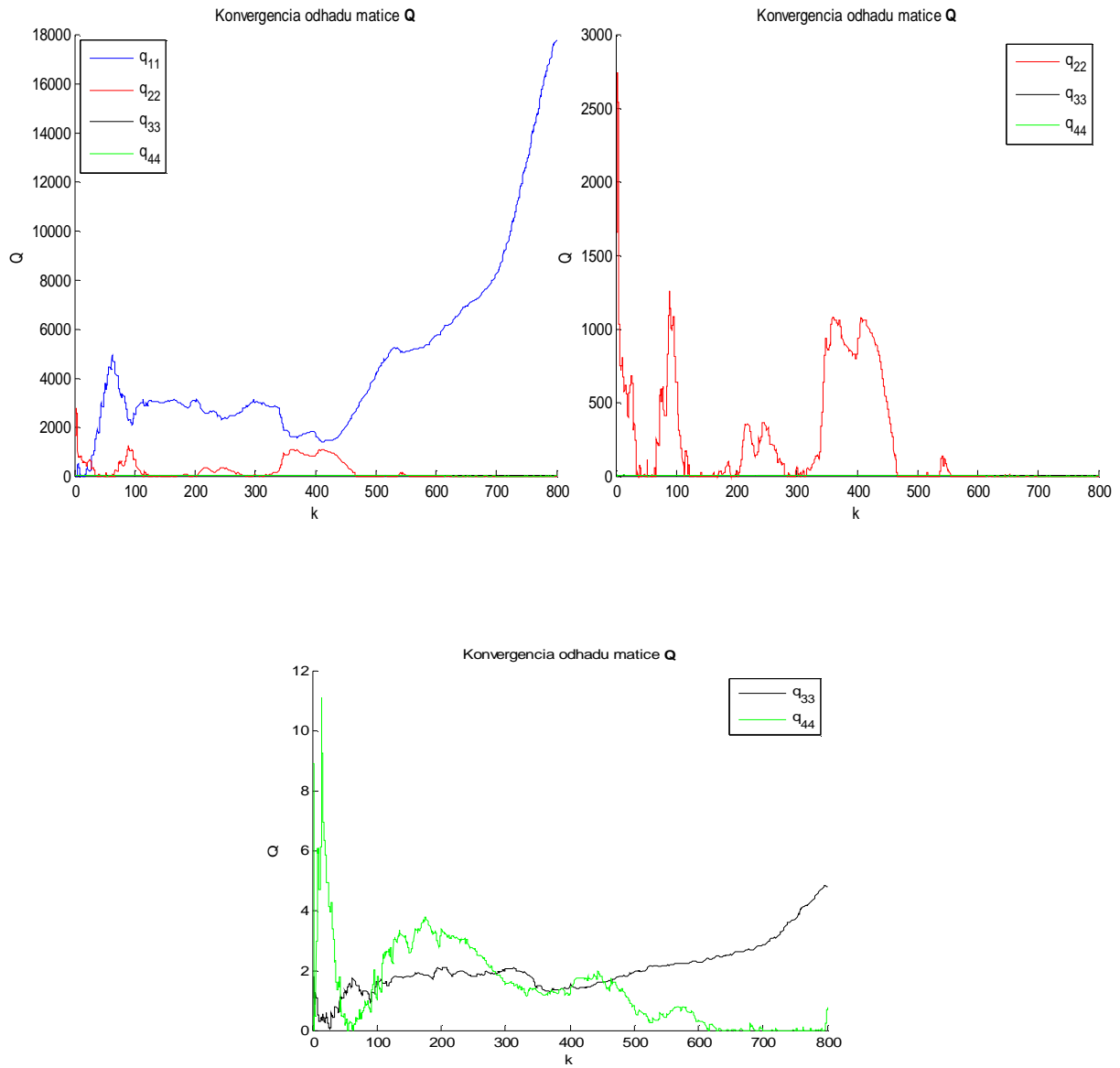
5.2. Odhadovanie kovariančných matíc Bélangerovou metódou

Na odhadnutie matíc použijeme modifikovanú Bélangerovu metódu s eliminovaním záporných členov vo vektore koeficientov lineárnej kombinácie $\hat{\alpha}$. Maximálny posun autokorelácie je $N = 20$, apriórne matice sú jednotkové a nastavenie bázových matíc je nasledovné

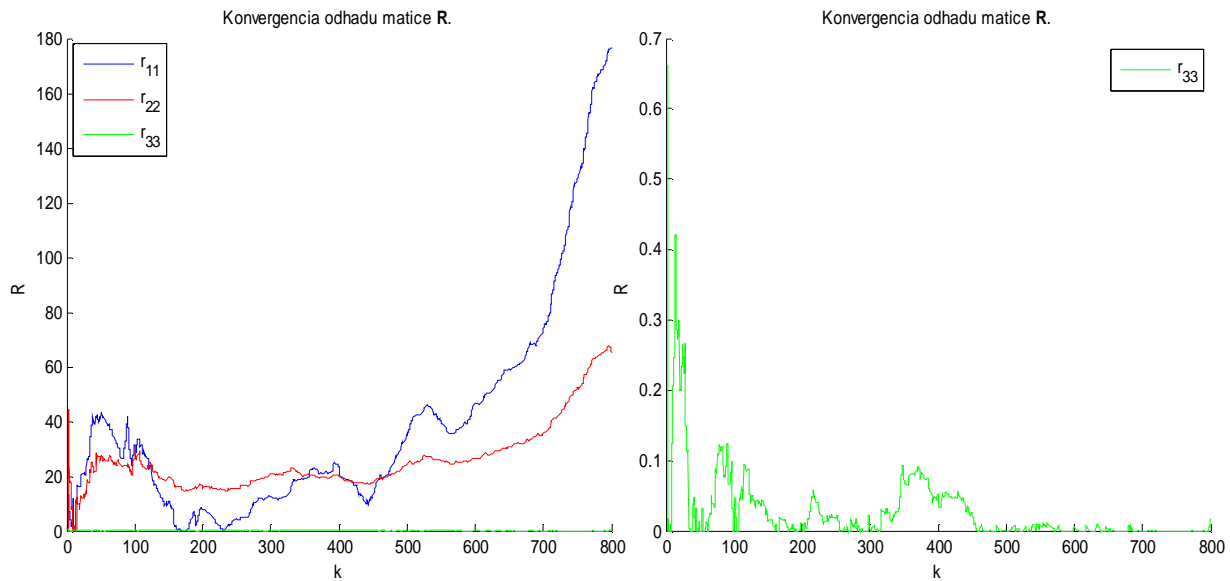
$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_1 &= \text{diag}(1; 0; 0; 0) & \mathbf{R}_{1,2,3,4} &= \text{diag}(0; 0; 0) \\
 \mathbf{Q}_2 &= \text{diag}(0; 1; 0; 0) & \mathbf{R}_5 &= \text{diag}(1; 0; 0) \\
 \mathbf{Q}_3 &= \text{diag}(0; 0; 1; 0) & \mathbf{R}_6 &= \text{diag}(0; 1; 0) \\
 \mathbf{Q}_4 &= \text{diag}(0; 0; 0; 1) & \mathbf{R}_7 &= \text{diag}(0; 0; 1) \\
 \mathbf{Q}_{5,6,7} &= \text{diag}(0; 0; 0; 0)
 \end{aligned}$$

Odhad kovariančných matíc šumu lineárneho stochastického systému

Zobrazíme priebehy iteračného procesu na časovom intervale 800 krokov. Vzorkovanie bolo nastavené na 5s. Jednotlivé priebehy sú pomerne kmitavé a divergujúce, preto zobrazíme tri obrázky s postupným vynechávaním jednotlivých grafov.



Iteračný priebeh odhadu prvkov matice \mathbf{R} vyzerá nasledovne. Na pravom obrázku je jediný konvergujúci priebeh r_{33} .



Z obrázkov môžeme vidieť, že časový interval 800 vzoriek je pre túto metódu príliš málo, aby sme získali uspokojivé výsledky. Takmer všetky grafy divergujú, pretože priebehy sa za daný počet vzoriek nedokázali ustáliť. Môžeme konštatovať, že výsledky tejto metódy, pri danom množstve dát, sú nepoužiteľné.

5.3. Odhadovanie kovariančných matíc šumu metódou ALS

V kapitole 4 sme vyhodnotili metódu ALS ako spoľahlivú pre jednoduché systémy. Testovanie na zložitejších systémoch ukázalo nevyhovujúce odhady. Metóda je navrhnutá tak, že umožňuje získať analytické riešenie a to jej dáva veľký potenciál pre ďalšie modifikovanie s cieľom dosiahnuť čo najlepšie výsledky. V prípade nevyhovujúcich odhadov, napr. negatívne definitných, je možné doplniť do kvadratického kritéria váženie vzdialenosti od apriórnej hodnoty, vzťah (3.119). Váha tejto vzdialenosti je označená ako d .

Analogicky k predošlej podkapitole otestujeme reálny systém za rovnakých podmienok. Metóda ALS nie je iteračná, ako výsledok dostaneme len jediný odhad oboch matíc. Nastavenie metódy je $N_d = 800$ a $N = 20$. Apriórne matice volíme jednotkové.

Pre porovnanie uveďme na úvod výsledky metódy ALS. V prvom prípade nastavíme váhu vzdialenosti od apriórnej hodnoty d na nulu. Odhadnuté kovariančné matice sú

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3189 & -2664 & 120 & 110 \\ -2664 & 824 & 0,2 & -92 \\ 120 & 0,2 & 2,9 & 2,2 \\ 110 & -92 & 2,2 & 2,2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 36,6 & 16,9 & -50,7 \\ 16,9 & 12,1 & -17,4 \\ -50,7 & -17,4 & 36,7 \end{bmatrix}.$$

Na prvý pohľad je zrejmé, že obe matice sú nevyhovujúce s obrovskými kovarianciami. Navyše obe sú negatívne definitné.

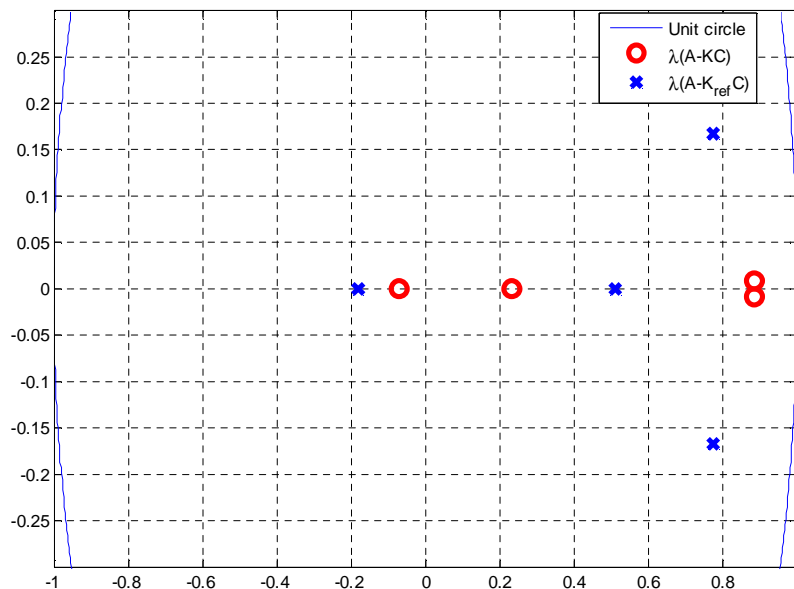
Zvýšením váhy na hodnoty 10 alebo 100 stále dostaneme negatívne definitné matice. Nastavme $d = 200$ a zopakujeme odhad. Výsledok je nasledovný

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1,01 & 0,01 & 0,11 & -0,09 \\ 0,01 & 1,01 & 0,15 & -0,12 \\ 0,11 & 0,15 & 2,66 & -0,70 \\ -0,09 & -0,12 & -0,70 & 1,74 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 4,10 & 1,41 & -3,53 \\ 1,41 & 1,12 & -1,56 \\ -3,53 & -1,56 & 4,06 \end{bmatrix}.$$

Váhová konštanta $d = 200$ je relatívne veľká, čo znamená, že výsledok je pomerne silno „pútany“ k apriórnej hodnote, ktorou sú jednotkové matice. Pri porovnaní výsledkov s $d = 0$ a $d = 200$ vidíme, že v druhom prípade, na rozdiel od prvého, je matica \mathbf{Q} veľmi blízka jednotkovej. Je teda otázne nakoľko presný výsledok sme týmto výpočtom získali. Urobíme porovnanie s referenčným zosilnením analogicky k predošlej podkapitole

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0,004 & 0,013 & 0,009 \\ 0,016 & 0,019 & 0,024 \\ 0,357 & 0,168 & 0,425 \\ 0,411 & -0,155 & 0,346 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{ref} = \begin{bmatrix} 34,966 & 3,819 & 2,174 \\ 66,274 & 1,937 & -0,890 \\ 1,355 & 0,303 & 0,275 \\ 0,648 & -0,008 & 0,003 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že matice sa výrazne líšia, v niektorých prvkoch až o dva rády. Porovnáme tieto výsledky z pohľadu polohy vlastných čísel matice $\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}$.



Z polohy oboch skupín vlastných čísel vidíme rozdielnosť medzi zosilneniami \mathbf{K} a \mathbf{K}_{ref} . Zosilnenie \mathbf{K} získané metódou ALS má dve vlastné čísla blízko nuly a druhá dvojica má výrazne menšie imaginárne časti. Z polohy vlastných čísel môžeme konštatovať, že vypočítané zosilnenie je viac stabilizujúce ako referenčné.

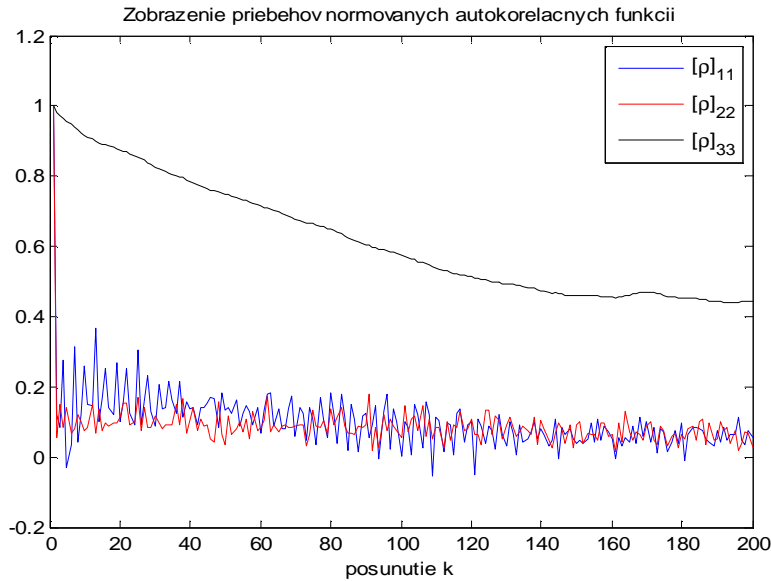
Na ďalšie kvalitatívne zhodnotenie oboch nastavení uplatníme Mehrov test optimality, popísaný v kapitole 3.1. Na detekovanie využijeme autokorelačnú funkciu s maximálnym posunutím 200 krokov a spriemerovaním $N = 800$ prvkov. Zaujímá nás počet prvkov $[\hat{\rho}_k]_{ii}$

ležiacich mimo interval $\pm \frac{1,96}{\sqrt{N}}$. Výsledky sú nasledovné

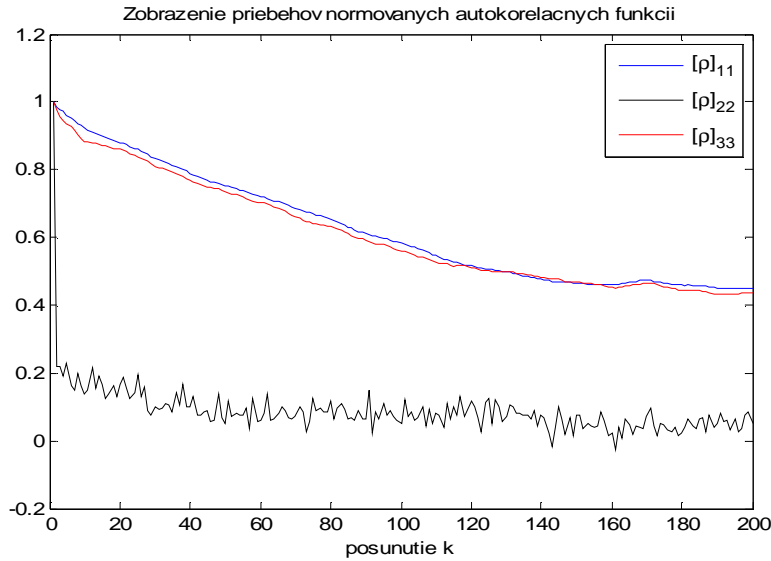
Tab. 5-1

Použité zosilnenie	% prvkov $[\hat{\rho}_k]_{ii}$ ležiacich mimo interval
\mathbf{K}_{ref}	76,83
\mathbf{K}_{ALS}	85,33

Z výsledkov vidíme, že obe zosilnenia sú výrazne neoptimálne. Optimálne nastavenie by vygenerovalo len približne 5% prvkov $[\hat{\rho}_k]_{ii}$ ležiacich mimo interval $\pm \frac{1,96}{\sqrt{N}}$. Metóda ALS s nastavením $d = 200$ vráti horší výsledok ako identifikačné metódy GBident. Pre lepšie porovnanie výsledkov zobrazíme priebehy normovaných autokorelačných funkcií inovácií $[\hat{\rho}_k]_{11}$, $[\hat{\rho}_k]_{22}$ a $[\hat{\rho}_k]_{33}$ v závislosti na posunutí k . Prvý obrázok je výsledok s použitím \mathbf{K}_{ref} .

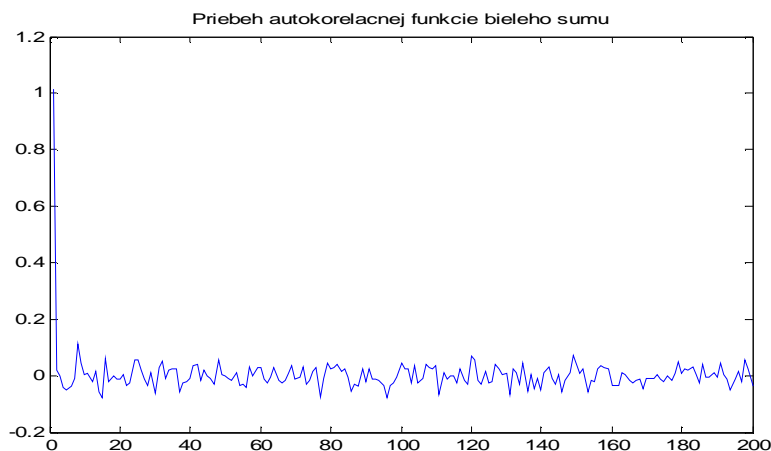


Z obrázku je zrejmé, že dôvod pomerne zlého výsledku v Mehrovom teste optimality nie je veľký rozptyl hodnôt normovaných autokorelácií, ale posunutie strednej hodnoty priebehov. Vidíme, že funkcie $[\hat{\rho}_k]_{11}$, $[\hat{\rho}_k]_{22}$ majú približne správny tvar, ktorý by odpovedal bielemu šumu. Na základe porovnania priebehov autokorelácií inovácií s metódou ALS môžeme vyhodnotiť kvalitu odhadu ALS. Analogické priebehy k predošlému obrázku so zosilnením \mathbf{K}_{ALS} sú nasledovné



Na priebehoch korelačných funkcií so zosilnením \mathbf{K}_{ALS} pozorujeme, že len priebeh $[\hat{\rho}_k]_{22}$ má požadovaný tvar. Zosilnenie \mathbf{K}_{ALS} môžeme prehlásiť za kvalitatívne horšie ako \mathbf{K}_{ref} . Grafy $[\hat{\rho}_k]_{11}$ a $[\hat{\rho}_k]_{33}$ tvarom odpovedajú viac šumu s rovnomerným rozdelením ako gaussovskému. V kapitole 4 sme pri viacnásobnom testovaní zistili veľký rozptyl výsledkov metódy ALS. Pri odhade z malého množstva zmeraných dát je problematické vyhodnotiť výsledok. Pokiaľ by sme mali niekoľkonásobné množstvo dát, bolo by možné odhad opakovať viackrát a výsledky spriemerovať.

Zobrazíme priebeh autokorelačnej funkcie bieleho šumu (optimálne nastavenie) a porovnáme s predošlými dvomi sadami grafov.



Z ideálneho priebehu autokorelácie bieleho šumu vidíme, že jeho stredná hodnota pre posunutie $k > 0$ je nulová. Toto neplatí ani pre jedno odhadnuté nastavenie Kalmanovho zosilnenia.

5.4. Odhadovanie kovariančných matíc šumu metódou scALS

Ďalšou možnosťou riešenia kvadratickej optimalizácie je využitie semidefinitného programovania v rámci metódy scALS, ktoré zároveň zaručí pozitívnosť výsledných matíc pomocou bariérových funkcií. Otestujeme metódu scALS zo stránky [26] od autorov Rajamaniho a Rawlingsa. Výsledky odhadu pre $N_d = 800$ a $N = 20$ sú nasledovné

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1,01 & 0,03 & 0,20 & -0,21 \\ 0,03 & 1,01 & 0,20 & -0,21 \\ 0,20 & 0,20 & 1,10 & -0,21 \\ -0,21 & -0,21 & -0,21 & 1,12 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1,07 & 0,21 & -0,09 \\ 0,21 & 0,92 & -0,20 \\ -0,09 & -0,20 & 1,07 \end{bmatrix}.$$

Kalmanovo zosilnenie dané uvedenými maticami je v porovnaní s \mathbf{K}_{ref} nasledovné

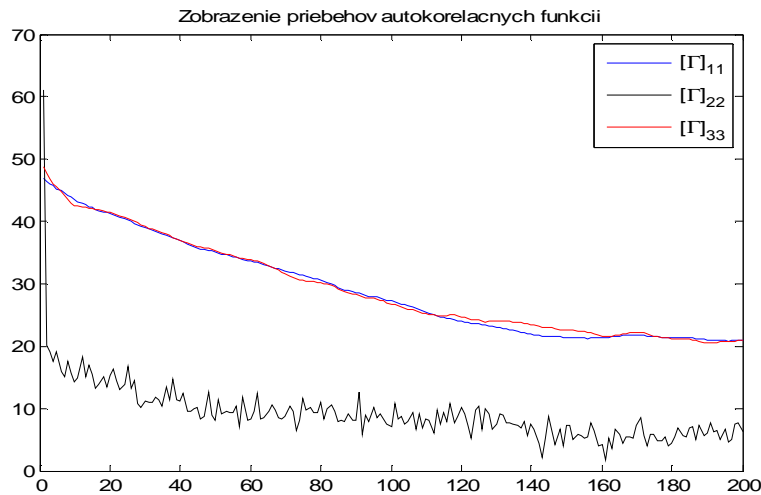
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0,014 & 0,047 & 0,014 \\ -0,014 & 0,047 & 0,014 \\ 0,194 & 0,152 & 0,286 \\ 0,287 & -0,154 & 0,194 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{ref} = \begin{bmatrix} 34,966 & 3,819 & 2,174 \\ 66,274 & 1,937 & -0,890 \\ 1,355 & 0,303 & 0,275 \\ 0,648 & -0,008 & 0,003 \end{bmatrix}.$$

Riešenie algoritmu scALS je robustné aj pre rôzne apriórne nastavenia. Výsledky odhadu sú takmer identické aj pri počiatočnom nastavení $\mathbf{Q} = 20\mathbf{I}_4$ a $\mathbf{R} = 0,1\mathbf{I}_3$. Zistíme kvalitu odhadu matíc pomocou Mehrovho testu optimality. Výsledky sú v Tab. 5-1. Vidíme, že odhad algoritmu scALS je najhorší zo všetkých troch, ktoré máme k dispozícii. Pri testovaní v kapitole 4 sme vyhodnotili scALS ako najlepšiu metódu, ktorá poskytuje vyhovujúce výsledky aj pre zložitejšie systémy.

Tab. 5-2

Zosilnenie	% prvkov $[\hat{\rho}_k]_{ii}$ ležiacich mimo interval
\mathbf{K}_{ref}	76,83
\mathbf{K}_{ALS}	85,33
\mathbf{K}_{scALS}	98,17

Aby sme demonštrovali výrazne nízku kvalitu odhadu metódy scALS (s použitím SDP), zobrazíme priebehy autokorelačnej funkcie inovácií, ktorá by mala mať, v ideálnom teoretickom prípade, tvar jednotkového impulzu. Obrázok obsahuje tri priebehy, pretože autokorelačná matica má rozmer 3×3 . Zobrazíme len jej diagonálne prvky.



Už z jednoduchého porovnania uvedených obrázkov je zřejmé, že všetky zosilnenia, ktoré sme získali, sú výrazne neoptimálne. Ako najlepšia hodnota sa javí práve \mathbf{K}_{ref} , ktorá pri porovnaní grafov autokorelačných funkcií dosahuje najlepšie výsledky.

5.5. Zhrnutie poznatkov z odhadovania kovariančných matíc šumu z experimentálnych dát

V kapitole 5 sme otestovali vybrané metódy na reálnych dátach. Demonštrovali sme problémy, ktoré vznikajú v reálnych podmienkach. Do riešenia odhadovania kovariančných matíc vstupujú ďalšie neurčitosti oproti testovacím modelom. Sú nimi predovšetkým nepresnosť modelu a nedostatočne popísaná dynamika systému, ktorý reaguje na vstupy inak ako uvažovaný model. Reálna termodynamická sústava, z ktorej pochádzajú experimentálne dáta je pomerne vysokého rádu. Pri identifikácii sme hľadali systém štvrtého rádu, ktorý by najlepšie aproximoval správanie reálnej sústavy. Takéto zjednodušenie vnáša do identifikovaného

modelu neurčitost', predovšetkým, na vyšších frekvenciách. Presnosť modelu s rastúcou frekvenciou klesá a to sa môže odraziť na komplikovanejších priebehoch reálnych dát, ako by sme očakávali od teoretického modelu 4. rádu. Touto úvahou môžeme vysvetliť aj tvar autokorelačnej funkcie inovácií pri nastavení zosilnenia na \mathbf{K}_{ref} , ktorá sa v niektorých vlastnostiach líši od ideálneho priebehu u bieleho šumu. Upozornili sme predovšetkým na nenulovú strednú hodnotu autokorelačnej funkcie pre posunutie $k > 0$. Ďalším významným problémom je pomerne malé množstvo dát, ktoré sa ešte redukuje tým, že sústava s pozorovateľom sa musí dostať do ustáleného stavu.

Najlepšie výsledky boli očakávané, na základe kapitoly 4, od metódy scALS. Tento algoritmus vrátil oproti metóde ALS horšie výsledky, ale odhad sa ukázal ako robustný aj pri rôznych apriórnych nastaveniach. Bélangerova metóda pri danom množstve dát úplne zlyhala, priebehy sa neustálili a na intervale 800 vzoriek sa javili ako divergujúce.

Za referenčné zosilnenie sme zobrali výsledok získaný pomocou identifikačných metód. Je treba zdôrazniť, že všetky výsledky dosiahnuté v kapitole 5 sa značne líšia od \mathbf{K}_{ref} , čo dokazuje rozdiel v polohe vlastných čísel. Spôsob odhadovania Kalmanovho zosilnenia pomocou identifikačných metód je predmetom súčasného výskumu a v tejto práci nebol testovaný. Ku kvalite odhadu \mathbf{K}_{ref} sa môžeme vyjadriť len na základe Mehrovho testu optimality a grafu autokorelačných funkcií. Optimálne zosilnenie by v Mehrovom teste vygenerovalo približne 5% hodnôt prvkov $[\hat{\mathbf{p}}_k]_{ii}$ mimo interval $\pm \frac{1,96}{\sqrt{N}}$. Testovanie ukázalo, že až 76,8% prvkov leží mimo požadovaný interval, čo predstavuje podstatnú vzdialenosť od optimálneho priebehu. Na základe grafov autokorelačnej funkcie sme konštatovali, že dva z troch priebehov majú približne správny tvar ale sú posunuté v smere osi y. To malo za následok, že väčšina bodov autokorelačnej funkcie leží mimo interval daný testom optimality. Tretí graf vykazoval úplne nesprávny priebeh, ktorý približne odpovedá rovnomernému rozdeleniu. Na základe uvedených grafov sme porovnali nastavenia \mathbf{K}_{ref} a \mathbf{K}_{ALS} a konštatovali sme, že prvé uvedené je bližšie k optimu.

Môžeme zhrnúť, že všetky metódy odhadu kovariančných matíc majú určité nedostatky. Prvoradou úlohou ich ďalšieho zlepšenia bude zvýšiť robustnosť pre rôzne podmienky. V kapitole 4 sme ukázali, že napríklad Bélangerova metóda dáva nepresné výsledky pre systém tretieho rádu, ale u MIMO systému piateho rádu bol odhad veľmi dobrý. Obdobné potiaže sa vyskytujú u metódy ALS, ktorá s rastúcou zložitou zadania dáva výrazne horšie odhady. Doplňujúce formulácie riešenia kvadratického programovania poskytujú určité možnos-

ti získania pozitívnych výsledkov. Na druhú stranu vnášajú do výpočtu ďalšie parametre, ktoré je obtiažne nastaviť bez apriórnych znalostí a dosiahnuté výsledky na týchto parametroch priamo závisia. Testovanie potvrdzuje, že pre nasadenie pozorovateľov stavu v rozsiahlych priemyselných aplikáciách je nevyhnutné zlepšiť metódy ich naladenia tak, aby bolo možné priblížiť sa optimálnemu odhadu.

6. Záver

6.1. Zhodnotenie metód

V kapitole 3 sme popísali metódy odhadu kovariančných matíc šumu lineárneho stochastického systému. Zastúpené boli metódy z počiatkov tejto výskumnej oblasti. Sem patria klasické metódy od Mehru, Carewa a Bélangerera zo začiatku sedemdesiatych rokov. Súčasnú publikáciu patria tímom autorov Odelson, Rajamani a Akesson, ktorí publikovali články v rokoch 2005 a 2008. Už v počiatku rozvoja tejto oblasti upozornili autori Neethling a Young vo svojom komentári k Mehrovým článkom, [14], že je dôležité brať do úvahy proces odhadovania autokorelačnej funkcie inovácií z nameraných dát. Takýto odhad obsahuje ďalšie neurčitosti, ktoré zhoršujú jeho použitie na mieste teoreticky správnych autokorelácií. Jedným z príkladov je testovanie metódy ALS pre systém MIMO piateho rádu. Druhým významným prínosom uvedených autorov je upozornenie na fakt, že neznáme kovariančné matice šumu sú lineárne závislé práve na autokorelácií inovácií. Tento poznatok využil vo svojom článku Bélanger. Ďalší pokrok urobili až autori Odelson, Rawlings a Rajamani. Vytvorili metódu ALS umožňujúcu analytické riešenie výpočtu neznámych kovariančných matíc a svojim princípom poskytuje veľký potenciál v tejto oblasti. Jej výborné vlastnosti dokazuje testovanie na systéme prvého rádu. Ďalšie testovanie na zložitejších systémoch však ukázalo, aký významný vplyv má odhad autokorelačnej funkcie inovácií. Tento proces v podstate znehodnotí výhody metódy ALS, ktorá sa stáva takmer nepoužiteľnou pre veľký rozptyl výsledných hodnôt. Správnosť naprogramovaného algoritmu môžeme veľmi jednoducho dosadením teoreticky správnej autokorelačnej funkcie inovácií. Metóda vráti presný výsledok.

Pomerne dobrý výsledok sme dostali pri testovaní Bélangerovej metódy. Jej cieľom je určenie koeficientov lineárnej kombinácie bazových matíc. Prvým problémom je práve správne určenie týchto bazových matíc. Na SISO systéme tretieho rádu sme ukázali aký významný vplyv má voľba matíc na konečný výsledok. Zároveň metóda dosiahla veľmi dobré a predovšetkým robustné výsledky u najzložitejšieho testovaného MIMO systému. Bélangerova metóda pracuje iteračne s postupným spresňovaním odhadu. Priebeh iteračného výpočtu zároveň môže slúžiť ako ukazovateľ kvality. Pokiaľ je tento priebeh kmitavý s veľkým rozptylom, výsledný odhad bude mať rovnako malú presnosť. V tomto prípade je vhodné využiť inú metódu, prípadne zmeniť počiatočné nastavenie.

Na začiatku tretej kapitoly sme overili Mehrov test optimality filtra. Ide v podstate o test bielosti postupnosti inovácií. Toto testovanie nebolo tak komplexné ako u iných metód, pretože algoritmov na test bielosti, prípadne na test nezávislosti prvkov existuje niekoľko a sú pomerne dobre prepracované pre rôzne situácie. Niektoré z týchto metód sa vyskytujú v štatistických balíkoch matematických softvérov.

Ďalšou skupinou testovaných algoritmov boli Mehrove metódy, ktoré sa zaraďujú medzi klasické a Mehrove články patria medzi najčastejšie citované v tejto oblasti. Ukázali sme nedostatky týchto metód, prípadne obmedzenie ich použitia. Niektoré príčiny zmienených vlastností objasňujú komentáre autorov Neethlinga a Younga. Úplným neúspechom skončilo testovanie metódy založenej na maximálnej vierohodnosti, kde sa nepodarilo získať správny odhad a metóda diverguje pre aj pre rôzne systémy. Celé odvodenie tejto metódy je založené na značnom zjednodušení a využití iteračných numerických metód. Použitelnosť výsledného algoritmu je otázna. Využitie maximálnej vierohodnosti popisujú aj ďalší autori, ktorí publikovali svoje články v 80–tych a 90–tych rokoch.

Medzi najkomplexnejšie spracované metódy patrí gALS od autorov Akesson et al. Riešenie zahŕňa aj nájdenie vzájomnej kovariančnej matice šumu \mathbf{S} a kovarianciu integračného šumu. Tento prístup má veľký potenciál pre ďalší rozvoj. Samotná metóda gALS však trpí rovnakými nedostatkami ako ALS, medzi ktorými je predovšetkým vysoká pamäťová náročnosť. gALS obsahuje vo svojej definícii matice autokorelačných funkcií viac členov a to výrazne zhoršuje numerické vlastnosti, ktoré boli diskutované v kapitole 4.7. Jedným zo zdrojov nepresností je odhad autokorelačnej funkcie, ktoré vnáša do výpočtu významnú neurčitosť. Ďalším podstatným negatívnym faktorom je samotná definícia zloženej matice \mathbf{X} vo vzťahu (3.114). Tento tvar zvyšuje rozmery matice \mathbf{A} pri riešení kvadratickej optimalizácie a zároveň \mathbf{A} nemá plnú hodnotu a jej pseudoinverzia je numericky nestabilná. Jedno z riešení je vynechanie nulových stĺpcov. Výsledkom gALS sú nepresné hodnoty odhadu kovariančných matíc s vysokým rozptylom už u skalárneho systému.

V práci sme v kapitole tri uviedli krátky popis detekcie štruktúry šumu, resp. odhadu zdrojov šumu s minimálnou dimenziou. Táto metóda však nebola testovaná, pretože tematika detekcie štruktúry šumu prekračuje zadanie diplomovej práce. Ide o komplexný problém, ktorého výskum je v počiatočných fázach. Metóda odhadu minimálneho počtu stochastických vstupov je uverejnená v článku [16]. Jej použitelnosť bez apriórnych znalostí je otázna, pretože s nárastom dimenzie matice \mathbf{GQG}^T oproti matici \mathbf{Q} pribúdajú ďalšie numerické problémy sprevádzané numerickou nestabilitou výsledkov.

6.2. Zhodnotenie diplomovej práce

Cieľom diplomovej práce bolo vytvorenie súboru metód na odhadovanie kovariančných matíc šumu a ich otestovanie. V tomto smere bolo zadanie diplomovej práce splnené v plnom rozsahu. Každá z metód bola otestovaná s rôznym nastavením a pre rôzne systémy. Tým vznikol omnoho lepší testovací profil ako uvádzajú autori publikovaných článkov. Každá z metód bola testovaná opakovane a tento súbor bol štatisticky spracovaný. Tým sme získali prehľad o tom, či odhady získané metódou sú presné, alebo sa môžu objaviť výsledky s veľkým rozptylom. Metódy, u ktorých sme zistili vysoké rozptyly výsledkov je možné použiť len v prípade, že máme k dispozícii veľké množstvo dát. Metódu je následne možné nasaďovať opakovane a výsledky spriemerovať.

U jednotlivých testovacích príkladov sme zhodnotili výsledky a snažili sa nájsť príčiny týchto javov. V tomto smere sa odкрýva priestor pre ďalší výskum. Cieľom je vytvoriť metódy, ktoré by boli robustné vzhľadom na počiatkové nastavenie a predovšetkým na zložitosť systému.

Diplomová práca poskytuje ucelený súbor metód s čiastočným odvodením a otestovaním na príkladoch rôznej zložitosti. Môže sa stať východiskovým materiálom pre ďalšie výskumné ciele v oblasti určovania stochastických vlastností dynamických systémov.

6.3. Perspektívy ďalšieho výskumu

Diplomová práca popisuje metódy publikované od počiatku sedemdesiatych rokov až po súčasnosť. Je možné pozorovať určité spoločné znaky a postupnosť vývoja jednotlivých metód. Metódy publikované v roku 2008 rozširujú ALS pracujúcu s autokorelačnou funkciou inovácií. Autori Akesson et al. rozšírili ALS na odhad vlastností korelovaného šumu, ktorý môže obsahovať integračný šum. Zároveň poskytli postup na určenie zdroja šumu minimálnej dimenzie. Vo všetkých predošlých algoritmoch sme považovali maticu \mathbf{G} za jednu z matíc systému, ktoré sú známe. Problémom je, že táto matica je vo väčšine prípadov neznáma a nie je možné ju spoľahlivo určiť identifikačnými metódami, pretože ide o maticu tzv. stochastických vstupov. Metódy, ktoré neberú do úvahy dimenziu matice \mathbf{Q} a skutočný počet zdrojov

šumu v podstate odhadujú maticu $\mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T$ rozmeru $n \times n$. Nevýhoda tohto prístupu sa prejaví u zložitejších systémov, prípadne u komplexných stochastických štruktúr. Následkom nesprávnej detekcie stochastických vlastností je nekvalitný odhad stavu dynamického systému, ktorý môže byť v niektorých prípadoch úplne nepoužiteľný. Práve nespoľahlivosť týchto metód bráni ich nasadeniu do priemyselných aplikácií a zlepšiť tak účinnosť nadväzujúcich algoritmov, predovšetkým riadenia a regulácie.

Úlohou ďalšieho výskumu v tejto oblasti je komplexnejšia analýza stochastických vlastností dynamických systémov, zdrojov šumu a detekcia ich štruktúry. Jedným z výsledkov je určenie správnej matice \mathbf{G} a tým dimenzie matice \mathbf{Q} . Ďalším podstatným prvkom v pôsobení šumu sú korelácie, ktoré vyžadujú správny odhad matice \mathbf{S} . Po zvládnutí detekcie týchto prvkov je potrebné rozšíriť všeobecnosť metód na farebné negaussovské šумы, ktoré vyžadujú prídanie tvarovacieho filtra šumu do systému. Problém sa stáva zložitejším v tom zmysle, že nedetekujeme len matice \mathbf{Q} , \mathbf{R} , ale musíme odhadnúť popis tvarovacieho filtra, čo je sám o sebe dynamický systém. Poslednou etapou je rozšírenie metód na nelineárne systémy. Tejto úlohe sa v súčasnosti venuje niekoľko vedeckých skupín. Publikované metódy využívajú numerické metódy, napríklad Monte Carlo, alebo rôzne formy numerickej integrácie s využitím Bayesovského prístupu.

Cieľom výskumu nasledujúcich rokov bude zlepšenie spoľahlivosti a robustnosti uvedených metód tak, aby bolo možné nasadiť ich v priemyselných aplikáciách. Jeden z najnovších teoretických prístupov je rozšírenie definície KF tak, aby zahrňoval aj tretí moment štatistickej veličiny. Výhoda tohto prístupu sa prejaví predovšetkým u odhadovania stavu nelineárneho systému, kde algoritmy zohľadňujúce len prvé dva momenty zlyhávajú, alebo poskytujú nepresné výsledky. Podrobnejšie informácie a odkazy na ďalšie zdroje sú uvedené v [25].

Príloha 1 – pomocné funkcie pre MATLAB

```

function v = vec (A)
%VEC  A columnwise stacking of a matrix into a vector
%
%v = vec (A)

v = A(:);

function V = vecMin (v)
%VECMIN  A columnwise stacking of a matrix to vector with repetitions
%removed
%
%v = vecMin (A)
%
%Parameters:
%A - square symetric input matrix of size p x p
%
%Output
%v - vector of lenght p(p-1)/2
%
%Example:
%A = [1 2 3;
%     2 5 6;
%     3 6 7];
%v = [1 2 5 3 6 7]';
%
%The repetitions are removed if i < j, where 'i' is a row number and 'j' is
%a column number

L = zeros(size(v));
j = 1;

for i=1:size(v,2);
    L(i, 1:j) = 1;
    j = j + 1;
end
L = logical(L);
V = v(L);

```


Odhad kovariančních matic šumu lineárního stochastického systému

```
function V = unvecMin (v, vyska)
%UNVECMIN    A columnwise unstacking of vector back to matrix. Inverse
%operation to vecMin function
%
%A = unvecMin (v, height)
%
%Parameters:
%v          - vector returned by vecMin function of size p(p+1)/2
%height    - the number of rows of returned matrix
%
%Output
%A - square symmetric matrix of size height x height
%
%Example:
%v = [1 2 5 3 6 7]'; h = 3;
%A = unvecMin(v, h);
%
%A = [1 2 3;
%     2 5 6;
%     3 6 7];
%
%The repetitions were removed in vecMin function if  $i < j$ , where 'i' is a
%row number and 'j' is a column number. unvecMin is inverse operation.

V = zeros(vyska,vyska);
j = 0;  vi = 0;

for i=1:vyska
    V(i:end, i) = v(i+vi:vyska+vi);
    j = vyska - i;
    vi = vi + j;
end
V = V + V' - diag(V(logical(eye(vyska)))));
```

```

function V = unvec (v, height)
%UNVEC    Unstacking the vector back to matrix
%
% V = unvec(A, height)
%
% A      - input matrix
% height - the number of rows of the final matrix

V = reshape(v, height, length(v)/height);

function DS = direct_sum(A, N)
%DIRECT_SUM    Creates a direct sum of input matrix
%
%D = direct_sum(A, N)
%
%Parameters:
%
%A - a square matrix of size p x p
%N - a number of summation
%
%Output:
%
%D - the matrix of size N*p x N*p
%D is block diagonal matrix (A, A, ..., A), where the number of diagonal
blocks is N

n = size(A,1);
m = size(A,2);
DS = zeros(n, m);

for i=0:N-1
    DS(i*n+1:i*n+n, i*m+1:i*m+m) = A;
end

```

```

function D = duplication_matrix(n)
%DUPLICATION_MATRIX      The function creates a special duplication matrix
%
%D = duplication_matrix(n)
%
%Duplication matrix consist of zeros and ones so that next equation holds
%
% D*vecMin(A) =  vec(A)
%
%Parameters:
%
%n - the size of square matrix A
%
%Output:
%
%The matrix of size n^2 x n(n+1)/2

D = zeros(n^2, n*(n+1)/2);
i = 0;
m = n;

while i < n

    o = i + 1;
    k = n;
    for j=1:i
        D(i*n+j, o) = 1;
        o = sum(n:-1:k) + i-j+1;
        k = k - 1;
    end

    D(i*n+1+i:i*n+n,m-n+1:m-i) = eye(n-i);
    m = m + n - i;
    i = i + 1;
end

```

Odhad kovariančných matíc šumu lineárneho stochastického systému

```
function R = kron_sum(A, B)
%KRON_SUM   Kronecker summation
%
%R = kron_sum(A, B)
%
%R = kron(A, Im) + kron(In, B)
%
%where A is of size n x n
%      B is of size m x m
%
%      In = eye(n)
%      Im = eye(m)

Im = eye(size(B,1));
In = eye(size(A,1));

R = kron(A, Im) + kron(In, B);
```

Odhad kovariančných matíc šumu lineárneho stochastického systému

```
function P = permuteMN (p, q, N)
%PERMUTEM      The function creates a special permutation matrix
%
%Permutation matrix consist of zeros and ones so that next equation holds
%
%vec( direct_sum(A, N) ) = P_pqN*vec(A)
%
%Parameters:
%
%p, q - the size of matrix A, [p, q] = size(A)
%N - the number of direct sumations at direct_sum(A, N)
%
%Output:
%
%The matrix of size p*q*N^2 x p*q

P = zeros(p*q*N^2, p*q);
I = eye(p);

i = 1;
m = 1;

while i*p <= p*q*N^2

    P(i*p-p+1:i*p, m*p-p+1:m*p) = I;

    i = i + N;
    m = m + 1;
    if m > q
        m = 1;
        i = i + 1;
    end
end
end
```

Použitá literatura

- [1] Havlena V., Štecha J.: *Moderní teorie řízení*, Ediční středisko ČVUT, Praha, 1999
- [2] Duník J.: *Design of nonlinear estimation system for filtering, prediction and smoothing*. Disertační práce, ZČU Plzeň, 2007
- [3] Simon D.: *Optimal state estimation*. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2006
- [4] Štecha J.: *Optimální rozhodování a řízení*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2002
- [5] Vallail J., Georgakis C.: „Systematic Estimation of State Noise Statistics for Extended Kalman Filter“, *AIChE Journal*, Vol. 40, No. 2, 2000, pp. 292.
- [6] Zhou J., Luecke R. H.: „Estimation of the covariances of the process noise and measurement noise for a linear discrete dynamic system“, *Computers and Chemical Engineering*, Vol. 19, No. 2, 1995, pp. 187.
- [7] Rogalewicz V.: *Pravděpodobnost a statistika pro inženýry*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2000.
- [8] Anderson B. D. O., Moore S. B.: *Optimal Filtering*. Prentice Hall, USA, 2005
- [9] Zhou K., Doyle J. C., Glover K.: *Robust and Optimal Control*., 1996
- [10] Mehra R. K.: „Approaches to Adaptive Filtering“, *IEEE Trans. on Automat. Control*, AC-17, 1972, pp. 693–698
- [11] Mehra R.K.: „On the identification of variances and adaptive Kalman filtering“, *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-15, 1970, pp. 175–184
- [12] Odelson B. J., Rajamani M. R., Rawlings J. B.: „A new autocovariance least-squares method for estimating noise covariances“, *Automatica*. Vol. 42., 2005 pp. 303–308
- [13] Peterka V.: „Bayesian approach to system identification“, In P. Eykhoff (Ed.), *Trends and Progress in System Identification*. Pergamon Press, Oxford, UK, 1981
- [14] Neethling C., Young P.: Comments on „Identification of optimum filter steady-state gain for systems with unknown noise covariances“, *IEEE Trans. on Automat. Control*, 19(5), pp. 623–625, 1974
- [15] Labarre D., Grivel E., Berthoumieu Y., Todoni E., Najim M.: „Consistent estimation of autoregressive parameters from noisy observations based on two interacting Kalman filters“, *Signal Processing*, Vol. 86, pp. 2863–2876, 2006
- [16] Rajamani M. R., Rawlings J. B.: „Estimation of the disturbance structure from data using semidefinite programming and optimal weighting“, *Automatica*, pp.1–7, 2008

- [17] Schei T. S.: „On–line estimation for process control and optimization applications“, *Journal of Process Control*, Vol. 18, pp. 821–828, 2008
- [18] Liang Y., An D. X., Zhou D. H., Pan Q.: „A finite–horizon adaptive Kalman filter for linear systems with unknown disturbances“, *Signal Processing*, Vol. 84, pp. 2175–2194, 2004
- [19] Triantafyllopoulos K.: „Covariance Estimation for Multivariate Conditionally Gaussian Dynamic Linear Models“, *Journal of Forecasting*, Vol. 26, pp. 551–569, 2007
- [20] Akesson B. M., Jorgensen J. B., Poulsen N. K., Jorgensen S. B.: „A generalized autocovariance least–squares method for Kalman filter tuning“, *Journal of Process control*, Vol. 18, pp. 769–779, 2008
- [21] Wiberg D. M., Powell T. D., Ljungquist D.: „An on–line parameter estimator for quick convergence and time–varying linear systems“, *IEEE Trans. On Automat. Control*, Vol. 45, pp. 1854–1863, 2000
- [22] Carew B., Belanger P. R.: „Identification of optimum filter steady–state gain for systems with unknown noise covariances“, *IEEE Trans. On Automat. Control*, Vol. AC–18, No. 6, pp. 582–587, 1973
- [23] Belanger P. R.: „Estimation of noise covariance matrices for a linear time–varying stochastic process“, *Automatica*, Vol. 10, pp. 267–275, 1974
- [24] Magnus J. R., Neudecker H.: *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, John Wiley & Sons, 2007
- [25] Duník J., Šimandl M., Straka O.: „Methods for estimating state and measurement noise covariance matrices: Aspects and comparison“, *Preprints of 15th IFAC Symposium on System Identification*, Francúzsko, 2009

Internetové zdroje

- [26] Rajamani M. R., Rawlings J. B.: [online] <http://jbrwww.che.wisc.edu/software/als>

